

Овом градом асистенту и сараднику
Султану Елезовић-Хаџић

17 јуна 1987.

Љ. Мухоморовић

Dr ĐORĐE MUŠICKI

UNOD U
TEORIJSKU
FIZIKU I
TEORIJSKA MEHANIKA

IV допуњено издање

PREDGOVOR

I Z D A V A Č:

ODSEK ZA FIZIČKE I METEOROLOŠKE NAUKE

Prirodno matematičkog fakulteta

Univerziteta u Beogradu

RECENZENTI:

Dr Božidar MILIĆ

Dr Velibor ROGLIĆ

Štampanje ovog udžbenika odobreno je Odlukom
Naučno-nastavnog veća Izdavača 28.1.1987.g. i
finansirano Odlukom Saveta Izdavača 12.2.1987.g.

TIRAŽ: 200 primeraka

UMNOŽAVANJE: S.Z.R. "Gaudeamus" Beograd

Ništa nije praktičnije od teorije (Boltzmann)

Ovaj udžbenik „Uvod u teorijsku fiziku“ zasniva se na mojim predavanjima iz ovih disciplina teorijske fizike, koja držim već niz godina na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Ovo drugo izdanje iz osnova je prerađeno i prošireno i podeljeno je u tri knjige: prva sadrži teorijsku mehaniku, druga će obuhvatiti statističku fiziku, a treća elektrodinamiku sa teorijom relativnosti. Pri tome se one oslanjaju na matematički aparat izložen u našem udžbeniku „Matematičke osnove teorijske fizike“, koji sam napisao u zajednici sa kolegom dr. Božidarom Milićem. Kao dopuna ovom udžbeniku može služiti „Zbirka zadataka iz teorijske fizike, I deo — Mehanika i II deo — Elektrodinamika“ od dr. Božidara Milića, radena prema tekucem programu iz ovih disciplina teorijske fizike, dok je treći deo ove zbirke u pripremi.

Ovom prilikom, kao i u prvom izdanju, želeo bih da izložim osnovne koncepcije kojima sam se rukovodio pri pisanju ovog udžbenika. Po mom mišljenju osnovni cilj nastave teorijske fizike treba da bude trojak: 1) shvatiti suštinu fizičkih pojava, njene osnovne pojmove i zakone koji leže u osnovi fizike, 2) ovladati opštim metodima teorijske fizike i pomoću njih tumačiti složenije fizičke pojave i 3) upoznati osnove savremene teorijske fizike, kako na savremenom tumačenju klasičnih disciplina tako i na izabranom gradivu i primerima od posebnog interesa iz moderne fizike. Svi navedeni ciljevi, zajedno sa ostalima, treba bitno da doprinesu formiranju kulture iz fizike kod studenta i njegovom osposobljavanju za samostalan rad. S tog stanovišta, izlaganje gradiva je pretežno deduktivno i mikrofizičko i kao takvo ono ističe u prvi plan logičku i atomističku strukturu fizike, pošto smatram da se na ovaj način može najdublje ući u samu suštinu ove naučne discipline. Posle izlaganja opštih principa i zakona teorijske fizike navode se njihove tipične primene, čime se želi kako ukazati na opšte metode teorijske fizike za rešavanje problema, tako i dati tumačenje najvažnijih fizičkih pojava. Pri tome je posebna pažnja posvećena gradivu koje čini bazu savremene teorijske fizike, te je obuhvaćen ne samo materijal neophodan za proučavanje savremenih grana fizike, već je njime kroz odabrane primere protkano i gradivo klasične teorijske fizike.

Pri izlaganju gradiva, radi što boljeg ostvarivanja navedenih ciljeva, u mehanici sam razdvojio postulate mehanike od definicije sile, u statističkoj fizici spojio sam pojmove mikrostanja i makrostanja sa pojmom ansambla, a u elektrodinamici sam pošao od posebnog sistema osnovnih zakona kao postulata. Na taj način želeo sam pre svega da što strožije i što jasnije izložim odgovarajuće discipline teorijske fizike i istovremeno da naviknem čitaoca na strog fizički način

IV

mišljenja. U ovom izdanju trudio sam se da navedene ciljeve još bolje sprovedem, te sam izvršio temeljnu reviziju naročito onih glava u kojima su izlagani opšti principi, što je najviše došlo do izražaja u statističkoj fizici. Sem toga, u svim oblastima dodao sam niz novih glava i odeljaka, koji s jedne strane treba da upotpune opšte principe (kao na pr. glava o opštim zakonima mehanike kontinuuma), tako i da pruže tumačenje niza novih fizičkih pojava (kao na pr. glava o realnim gasovima i kristalima).

Na kraju želeo bih da izrazim svoju zahvalnost dr. Velimiru Rogliću i dr. Božidaru Miliću, koji su kao recenzenti pročitali ovaj rukopis, na vrlo korisnim primedbama i sugestijama.

U Beogradu, 1 oktobra 1973 g.

DORĐE MUŠICKI

S A D R Ž A J

Predgovor	III
GLAVA I. OPŠTI POJMOVI	1
1. Osnovne ideje mehanike	1
1.1. Zadatak i podela mehanike	1
1.2. Osnovni pojmovi mehanike	2
1.3. Newton-ovi principi mehanike	3
1.4. Granice primenljivosti klasične mehanike	3
1.5. Sistemi jedinica	3
1.6. Kratak pregled istorijskog razvoja mehanike	3
2. Pojmovi prostora i vremena	4
2.1. Osnovne pretpostavke	4
2.2. Inercijalni sistemi	4
2.3. Galilei-eve transformacije	5
2.4. Klasični princip relativnosti	6
3. Elementi kinematike	7
3.1. Određivanje položaja tačke	7
3.2. Putanja (trajektorija) čestice	8
3.3. Brzina čestice	9
3.4. Ubrzanje čestice	11
3.5. Primeri kretanja	14
3.6. Generalisane koordinate	17
3.7. Primer	19
GLAVA II. ZAKONI DINAMIKE	
4. Pojam sile. Osnovna jednačina dinamike	23
4.1. Definicija sile	23
4.2. Postulati sile	24
4.3. Primeri pravih sila	25
4.4. Izolovani i neizolovani sistemi	26
4.5. Osnovna jednačina dinamike	27
4.6. Diferencijalne jednačine kretanja	27
5. Opšti zakoni dinamike	28
5.1. Rad i efekat sila	28
5.2. Momenti mehaničkih veličina	30
5.3. Konzervativne sile	31

5.4. Giroskopske i disipativne sile	33
5.5. Centar masa	34
5.6. Zakon kinetičke energije	35
5.7. Zakon impulsa	37
5.8. Zakon momenta impulsa	39
6. Prinudno kretanje	41
6.1. Veze i vrste veza	41
6.2. Primeri veza	42
6.3. Moguća i virtuelna pomeranja	44
6.4. Reakcije i vrste reakcija	45
6.5. Primeri reakcija	47
6.6. Opšti zakoni dinamike	48

GLAVA III. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA

7. D'Alembert-Lagrange-ev princip	49
7.1. Opšti principi mehanike	49
7.2. Fiktivna sila inercije	50
7.3. D'Alembert-Lagrange-ev princip	50
7.4. Lagrange-ev princip mogućih pomeranja	51
8. Jednačine slobodnog kretanja	52
8.1. Diferencijalne jednačine slobodnog kretanja	52
8.2. Nalaženje konačnih jednačina kretanja	53
8.3. Mehanički princip kauzalnosti	54
8.4. Primeri	55
9. Jednačine prinudnog kretanja	61
9.1. Metod množitelja veza	61
9.2. Jednačine sa množiteljima veza	62
9.3. Primer	64
9.4. Prirodne jednačine kretanja	66
9.5. Primer	69

GLAVA IV. ANALITIČKA MEHANIKA

10. Lagrange-eve jednačine	71
10.1. Metod generalisanih koordinata	71
10.2. Primeri	73
10.3. Rad u generalisanim koordinatama	74
10.4. Kinetička energija u generalisanim koordinatama	76
10.5. Lagrange-eve jednačine	77
10.6. Analiza Lagrange-evih jednačina	80
10.7. Primeri	81
11. Zakoni održanja	84
11.1. Osobine prostora i vremena	84
11.2. Održanje energije	85
11.3. Održanje impulsa	86
11.4. Održanje momenta impulsa	87
12. Hamilton-ov princip	89
12.1. Elementi varijacionog računa	89
12.2. Pravi i zaobilazni put	92
12.3. Varijacije generalisanih koordinata	94
12.4. Hamilton-ov princip	95
12.5. Maupertuis-Lagrange-ev princip	98
12.6. Teorema Emmy Noether	99
12.7. Smisao varijacionih principa	101
13. Hamilton-ove jednačine	101
13.1. Generalisani impulsi	101
13.2. Primer	103

13.3. Hamilton-ove jednačine	104
13.4. Veza sa Hamilton-ovim principom	106
13.5. Smisao Hamilton-ove funkcije	107
13.6. Analiza Hamilton-ovih jednačina	109
13.7. Primeri	110
13.8. Jednačine kretanja i Poisson-ove zagrade	114
13.9. Osobine Poisson-ovih zagrada	115
13.10. Integrali kretanja	116
13.11. Generalisane Hamilton-ove jednačine	118
13.12. Degenerisani sistemi	120
14. Kanonske transformacije	123
14.1. Formulacija kanonskih transformacija	123
14.2. Tipovi generatriše	125
14.3. Primeri	126
14.4. Invarijante kanonskih transformacija	128
14.5. Integralne invarijante	130
14.6. Hamilton-Jacobi-eva jednačina	134
14.7. Hamilton-Jacobi-ev metod	136
14.8. Primer	139
14.9. Promenljive dejstvo-ugao	141

GLAVA V. SPECIJALNI PROBLEMI

15. Sistemi sa jednim stepenom slobode	145
15.1. Jednodimenziono kretanje	145
15.2. Linearni oscilator	146
15.3. Matematičko klatno	152
16. Male oscilacije	158
16.1. Stabilna ravnoteža sistema	158
16.2. Diferencijalne jednačine malih oscilacija	160
16.3. Normalne koordinate sistema	162
16.4. Primer	164
17. Centralno kretanje	168
17.1. Opšte osobine centralnog kretanja	168
17.2. Jednačine putanje pri centralnom kretanju	171
17.3. Kepler-ov problem	172
17.4. Opšti problem dvaju tela	176
18. Sudari čestica	178
18.1. Elastični sudar dvaju čestica	178
18.2. Uglovi skretanja u oba sistema	181
18.3. Gubitak energije čestice pri sudaru	182
18.4. Rasejanje čestica	183
18.5. Efikasni presek rasejanja	185
18.6. Primer	186

GLAVA VI. KRETANJE KRUTOG TELA

19. Kinematički elementi krutog tela	189
19.1. Određivanje položaja krutog tela	189
19.2. Ortogonalne transformacije	191
19.3. Euler-ova i Chasles-ova teorema	193
19.4. Konačne rotacije krutog tela	196
19.5. Elementarne rotacije. Ugaona brzina	197
19.6. Apsolutni i relativni izvod vektora	199
19.7. Ugaona brzina i Euler-ovi uglovi	200
19.8. Brzina i ubrzanje tačaka krutog tela	201
20. Dinamički elementi krutog tela	203
20.1. Karakteristike rasporeda masa	203
20.2. Osnovne osobine momenta inercije	205

VIII

20.3. Primeri	210
20.4. Rad pri elementarnom pomeranju krutog tela	213
20.5. Kinetička energija krutog tela	213
20.6. Moment impulsa krutog tela	215
20.7. Tenzor inercije	216
21. Zakoni kretanja krutog tela	219
21.1. Metod opštih zakona dinamike	219
21.2. Lagrange-ev metod za kruta tela	221
21.3. Euler-ov metod za kruta tela	222
21.4. Ravno kretanje krutog tela	223
21.5. Obrtanje krutog tela oko nepomične ose	226
21.6. Kretanje krutog tela oko nepomične tačke	228

GLAVA VII. RELATIVNO KRETANJE

22. Kinematika relativnog kretanja	233
22.1. Apsolutno, relativno i prenosno kretanje	233
22.2. Brzina čestice pri relativnom kretanju	233
22.3. Ubrzanje čestice pri relativnom kretanju	235
23. Dinamika relativnog kretanja	235
23.1. Diferencijalna jednačina relativnog kretanja	235
23.2. Inercijalne sile	236
23.3. Kretanje na Zemlji koja rotira	237
23.4. Primeri	239

GLAVA VIII. KRETANJE SA PROMENLJIVOM MASOM

24. Jednačina Meščerskog	243
24.1. Slučaj promenljive mase	243
24.2. Jednačina Meščerskog	243
24.3. Analiza jednačine Meščerskog	246
24.4. Problem rakete	247

GLAVA IX. OPŠTE JEDNAČINE MEHANIKE KONTINUUMA

25. Osnovne ideje mehanike kontinuuma	251
25.1. Metod proučavanja kretanja deformabilnih tela	251
25.2. Prelaz sa diskontinuuma na kontinuum	252
26. Kinematika kontinuuma	253
26.1. Dva načina proučavanja	253
26.2. Lagrange-ev prilaz. Polje elementarnih pomeranja	255
26.3. Osnovna Helmholtz-ova teorema	257
26.4. Euler-ov prilaz. Tenzor deformacije	258
26.5. Mehanički smisao komponenata e_{ik}	260
26.6. Tenzor brzine deformacije	263
27. Dinamika kontinuuma	265
27.1. Dve vrste sila	265
27.2. Naponsko stanje. Tenzor napona	267
27.3. Opšta jednačina kretanja	270
27.4. Simetričnost tenzora napona	273
27.5. Održanje mase. Jednačina kontinuiteta	275
27.6. Zakon promene mehaničke energije	277
27.7. Potpun sistem jednačina	279

GLAVA X. KRETANJE ELASTIČNIH TELA

28. Osnovne jednačine elastičnosti	281
28.1. Elastična tela	281
28.2. Naponsko stanje. Hooke-ov zakon	281

IX

28.3. Koeficijenti elastičnosti i njihov smisao	289
28.4. Jednačine kretanja elastičnih tela	288
28.5. Talasno prostiranje malih poremećaja	290
28.6. Ravni talasi. Dva tipa talasa	292
28.7. Opšte rešenje talasne jednačine	293
28.8. Sferni talasi	297
29. Oscilacije žice	299
29.1. Transverzne oscilacije žice	299
29.2. Longitudinalne oscilacije žice	302
29.3. Talasno prostiranje poremećaja	303
29.4. Bernoulli-evo rešenje problema	304
29.5. Svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije	306

GLAVA XI. KRETANJE FLUIDA

30. Kinematički i dinamički elementi fluida	309
30.1. Realni i idealni fluidi	309
30.2. Dva načina proučavanja kretanja fluida	309
30.3. Naponsko stanje idealnog fluida	310
30.4. Veza između naponskog stanja i deformacije	312
30.5. Veličine koje karakterišu kretanje fluida	313
30.6. Hidromehanički smisao divergencije i rotora	315
31. Diferencijalne jednačine kretanja idealnog fluida	317
31.1. Osnovna jednačina dinamike idealnog fluida	317
31.2. Analiza osnovne jednačine	319
31.3. Potencijal ubrzanja	320
31.4. Euler-ov metod za fluide	320
31.5. Transformisana Euler-ova jednačina	322
31.6. Helmholtz-ova jednačina	323
32. Vrste kretanja idealnog fluida	325
32.1. Mirovanje fluida	325
32.2. Stacionarno kretanje	326
32.3. Potencijalno kretanje	329
32.4. Vrtložno kretanje	332
32.5. Helmholtz-ove teoreme	335
32.6. Talasno prostiranje malih poremećaja	338
33. Kretanje viskoznog fluida	341
33.1. Viskozni fluidi	341
33.2. Naponsko stanje viskoznog fluida	342
33.3. Smisao koeficijenta viskoznosti	344
33.4. Jednačine kretanja viskoznog fluida	345
33.5. Proticanje fluida kroz cev	348
33.6. Laminarno i turbulentno kretanje	350

D O D A C I

I. Kovarijantnost Lagrange-evih jednačina	353
II. Totalne varijacije i njihova primena	355
III. O karakteru stacionarnosti dejstva	361
IV. Generalisana teorema Emmy Noether	365
V. Odnos između Lagrange-evog i Hamilton-ovog formalizma	368
VI. Karakteristike degenerisanih sistema	375
VII. Generalisane kanonske transformacije	380
VIII. Relativno kretanje čestice (Lagrange-ev metod)	384

X

IX. Lagrange-ev i Hamilton-ov formalizam za konti- nuirane sredine	388
X. Polje elementarnih pomeranja (Euler-ov metod)	398
XI. Zakon održanja energije kod fluida	403
XII. Stacionarno proticanje viskoznih fluida kroz cevi ...	405
Literatura	411
Registar	415

Glava I

OPŠTI POJMOVI

1. OSNOVNE IDEJE MEHANIKE

1.1. Zadatak i podela mehanike

Grana fizike koja se bavi proučavanjem kretanja materijalnih tela kao i uzroka usled kojih nastaju promene stanja kretanja naziva se *mehanika*. Pri tome pod kretanjem podrazumevamo promenu položaja posmatranih tela u odnosu na koordinatni sistem vezan za neko telo koje smo uzeli za osnovno. Ako je ovo osnovno telo nepokretno, kažemo da je kretanje tela apsolutno, a u protivnom slučaju relativno.

Podela mehanike može se izvršiti sa dve tačke gledišta, ili prema logičnoj strukturi ili prema objektu kretanja. U prvom slučaju mehanika se može podeliti na dve discipline: kinematiku i dinamiku. *Kinematika* ispituje kretanje geometrijskih oblika tela ne vodeći računa o uzrocima koji ih izazivaju. *Dinamika* proučava kretanja materijalnih tela pod uticajem sila kao uzroka koji izazivaju ta kretanja. Specijalna grana dinamike je *statika*, koja proučava mirovanje materijalnih tela.

U drugom slučaju mehaniku možemo podeliti na dve osnovne discipline: mehaniku sistema i mehaniku kontinuuma. *Mehanika sistema* proučava kretanja takvih materijalnih tela koja se mogu smatrati sistemom čestica. *Mehanika kontinuuma* ispituje kretanja takvih tela koja možemo aproksimativno smatrati kontinuiranim. U prvu kategoriju spadaju na pr. *kruta tela*, a u drugu *elastična tela* i *fluidi*.

1.2. Osnovni pojmovi mehanike

Matematička analiza operiše samo sa jednim osnovnim elementom — količinom, pojmom koji se prikazuje brojem i koji se provlači kroz sve egzaktno nauke. Geometrija uvodi nov element — *prostor*, koji predstavlja i prvi osnovni pojam mehanike, a proučavanje kretanja geometrijskih oblika tela unosi nov osnovni pojam — *vreme*. Uzimanje u obzir i uzroka koji izazivaju kretanja uvodi još jedan osnovni pojam — *materijalnost*. Stoga u mehanici ova tri pojma predstavljaju osnovne pojmove, a odgovarajuće veličine su *dužina*, *vreme* i *masa*.

Pojmovi prostora i vremena u klasičnoj mehanici shvataju se apsolutno, te u osnovi mehanike leže *apsolutni prostor* i *apsolutno vreme*. To znači da se uzima da postoji sistem koji

apsolutno miruje u vasioni, a kretanje u odnosu na takav sistem predstavlja apsolutno kretanje. Istovremeno se uzima da postoji jedno jedino vreme za celu vasionu, tj. vreme koje jednako teče za sve sisteme u vasioni. O tome jasno govore sledeće *Newton-ove* reči o prostoru i vremenu: „Apsolutni prostor, po svojoj sopstvenoj prirodi i bez obzira na ma šta spoljnje, ostaje uvek sebi sličan i nepokretan. Apsolutno, pravo i matematičko vreme, po sebi i po svojoj sopstvenoj prirodi, teče jednako bez obzira na ma šta spoljnje, i drugim imenom naziva se trajanje“. Međutim, ovakvo shvatanje prostora i vremena, čak i u okvirima klasične mehanike, samo je delimično tačno. Naime, svako kretanje materije vrši se u prostoru i vremenu i ovi pojmovi ne mogu se ni zamisliti bez materije. Stoga se prostor i vreme moraju smatrati osobinama materije u širem smislu te reči.

Što se tiče pojma materijalnosti, on je tesno vezan za pojam mase tela. Newton je smatrao da je masa mera količine materije, međutim ovakvo shvatanje pojma mase prevaziđeno je razvojem fizike. Današnje naučno shvatanje ovog pojma bazira na inerciji tela kao jednoj prirodnoj osobini materije, koja se sastoji u tome da svako telo pruža otpor svakoj promeni stanja njegovog kretanja. Tada se *masa tela*, koja je skalar, može smatrati kao *mera inercije tela*, tj. mera otpora promeni stanja njegovog kretanja. Ovako shvaćena masa takode predstavlja jednu osobinu materije u gornjem smislu.

1.3. Newton-ovi principi mehanike

U osnovi klasične mehanike leže *Newton-ovi principi*, koji sumiraju u konciznoj formi celokupno iskustvo o kretanjima tela u vidu osnovnih zakona i mogu se smatrati aksiomama mehanike. Određujući uslove kretanja tela, Newton-ovi principi istovremeno određuju i uzroke koji izazivaju kretanje, te predstavljaju i implicitnu definiciju pojma sile. Ovi principi mogu se formulisati na sledeći način.

Prvi Newton-ov princip: Svako materijalno telo ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja dogod pod dejstvom sile ne bude prinuđeno da to svoje stanje promeni. Ovaj princip naziva se *princip inercije* i njime je dat jedan deo definicije pojma sile, naime kadgod telo menja svoje stanje kretanja, uvek postoji sila koja dejstvuje na to telo, čime je ukazano na postojanje sile.

Drugi Newton-ov princip: Promena količine kretanja srazmerna je sili koja dejstvuje na telo i vrši se u pravcu dejstva sile. Ovaj princip naziva se *princip dejstva sile* i predstavlja osnovni zakon kretanja, dajući istovremeno i glavni deo definicije pojma sile. Njime je određena veličina sile kao vektora i na osnovu toga data je mogućnost merenja odnosno upoređivanja sile. Kao dodatak svom drugom principu, Newton je dao *pravilo paralelograma sila*: Ako dve sile dejstvuju istovremeno na telo, njihova rezultanta jednaka je dijagonali paralelograma konstruisanog nad ovim silama. Ovo pravilo kazuje da se sile sabiraju kao vektori i da je dejstvo svake sile nezavisno od dejstva ostalih sila.

Treći Newton-ov princip: Akciji uvek odgovara jednaka po intenzitetu i suprotno orijentisana reakcija, ili dejstva dvaju tela jednog na drugo uvek su jednaka i suprotno usmerena. Ovaj princip naziva se *princip akcije i reakcije* i ukazuje na izvor sile. Prema njemu, za svaku silu koja dejstvuje na jedno telo postoji drugo telo koje predstavlja izvor ove sile i na koje dejstvuje sila istog intenziteta i pravca ali suprotnog smera. Ovakve sile nazivaju se *prave sile* i za njih se uvek može naći neko telo kao izvor ovih sila. Sistemi u kojima dejstvuju samo prave sile, tj. u kojima sva ubrzanja potiču od dejstva drugih tela nazivaju se *inercijalni sistemi*, takav jedan sistem je sistem koji apsolutno miruje.

Međutim, Newton-ovi principi u svojoj uobičajenoj formulaciji imaju i jedan logički nedostatak. Naime, u njima nije razdvojena definicija pojma sile od osnovnih zakona mehanike, što pruža teškoće u razumevanju logičke strukture mehanike.

1.4. Granice primenljivosti klasične mehanike

U osnovi klasične mehanike prećutno su sadržane izvesne pretpostavke, koje istovremeno daju i granice njene primenljivosti. Tako se pretpostavlja da su *brzine tela vrlo male u odnosu na brzinu svetlosti*, što je ekvivalentno apsolutnom shvatanju prostora i vremena kao i nezavisnosti mase tela od njegove brzine. S druge strane, pretpostavlja se da su *mase tela vrlo velike u odnosu na mase mikroobjekata*, što ima za posledicu da se samim procesom merenja položaja i brzine tela praktično ne menja njegovo kinematičko stanje, te se ove veličine u idealiziranom eksperimentu istovremeno mogu precizno odrediti.

Ukoliko prvi uslov nije zadovoljen, odgovarajuća disciplina teorijske fizike koja zamenjuje klasičnu mehaniku je *teorija relativnosti*. Ako pak drugi uslov nije ispunjen, kao što je slučaj u atomskoj i nuklearnoj fizici, takve pojave u fizici mikrosвета tumači *kvantna mehanika*. Pri tome obe ove discipline sadrže klasičnu mehaniku kao graničan slučaj.

1.5. Sistemi jedinica

U mehanici, kao i u ostalim granama fizike, upotrebljavaju se uglavnom dva sistema jedinica, koje baziraju na osnovnim veličinama: *dužina, masa i vreme*. Prvi od ovih, *CGS sistem* ima kao odgovarajuće osnovne jedinice centimetar, gram i sekund, a drugi, *MKS sistem* kao odgovarajuće jedinice metar, kilogram i sekund. Pored njih, u praksi se upotrebljava i *tehnički sistem*, koji umesto mase ima silu — težinu kao osnovnu veličinu, ali on nije mnogo pogodan za teorijska razmatranja.

Pomoću ovih jedinica mogu se definisati jedinice i svih ostalih mehaničkih veličina u svakom od ovih sistema. Pri tome napomenimo da sve jednačine mehanike imaju isti oblik u svim sistemima jedinica, za razliku od elektrodinamike, gde nije takav slučaj.

1.6. Kratak pregled istorijskog razvoja mehanike

Još u starom veku započeo je razvoj statike kao prve grane mehanike. Osnivačem statike može se smatrati *Arhimed* (287—212 pre n.e.), koji je prvi uočio osnovna svojstva sile kao statičkog pojma i prvi počeo primenjivati matematičke metode za proučavanje mehanike. Pored statike i kinematika je bila u izvesnoj meri razvijena još u starom veku. Međutim, tek je *Galilei* (1564—1642) uveo pojam ubrzanja, doveo ga u vezu sa pojmom sile i na taj način je formulisao osnovne zakone dinamike, koji predstavljaju bazu za njen dalji razvoj.

Temelje mehanike kao egzaktna nauke udario je *Newton* (1643—1727). U svom glavnom delu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematički principi prirodne filozofije), koje je objavljeno 1687 g., formulisao je osnovne principe mehanike kao aksiome, iz kojih je deduktivnim putem izveo ostale zakone. Sem toga, Newton je veoma poznat i po otkriću opšteg zakona gravitacije kao osnovnog zakona koji upravlja kretanjem svih nebeskih tela. Kao matematičar, stvorio je nezavisno od Leibnitz-a infinitezimalni račun, međutim i pored velike pogodnosti ovog metoda on ga nije iskoristio u svom izlaganju mehanike.

Posle Newton-a razvoj mehanike pošao je ubrzanim tempom. Prvi je *Euler* (1707—1783) uveo sistematsku primenu matematičke analize u mehanici, a zasnovao je i razvio mehaniku fluida. Rad na daljem razvoju mehanike fluida nastavio je njegov savremenik *Bernoulli* (1700—1782), naročito poznat po svojoj jednačini, dok je *d'Alembert* (1717—1783) formulisao jedan opšti princip kao metod za rešavanje dinamičkih problema, primenljiv i na prinudna kretanja. Dalji veliki korak u razvoju mehanike učinio je *Lagrange* (1736—1813), koji je uveo čisto analitički metod u mehaniku umesto ranijih geometrijskih metoda, zasnovan na tzv. generalisanim koordinatama, čime je postao osnivač analitičke mehanike. On je dao opšte diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama, koje važe pri bilo kakvim ograničenjima kretanja i predstavljaju najmoćnije oruđe za rešavanje problema

mehanike. Njegov rad nastavio je *Hamilton* (1805—1865), koji je formulisao jedan opšti varijacioni princip mehanike i dao jedan novi metod dinamike, kojim se određuje ne samo položaj već i stanje sistema u generalisanim koordinatama. Međutim, posebni značaj ovog metoda leži u tome što se on može primenjivati i van mehanike, u statističkoj fizici kao i u kvantnoj mehanici, gde on predstavlja bazu za korespondenciju između klasične i kvantne fizike.

Na tom polju nauke radio je čitav niz fizičara i matematičara, kako na razvoju opštih principa i pojedinih grana mehanike tako i na njenim raznovrsnim primenama. Između mnogih imena navedimo samo sledeća: *Poisson* (1781—1840), *Jacobi* (1804—1851), *Poincaré* (1854—1912), *Appell* (1855—1930), *Cartan* (1869—1951), *Ljapunov* (1857—1918), *Meščerski* (1859—1935), *Ciolkowski* (1857—1935). Najzad, kad su izvesne eksperimentalne činjenice došle u raskorak sa klasičnom mehanikom, odlučujući korak za dalji razvoj mehanike učinio je *Einstein* (1879—1955), tvorac teorije relativnosti. On je, odbacivši pojmove apsolutnog prostora i vremena, 1905 g. zasnovao svoju teoriju na principu ekvivalentnosti svih inercijalnih sistema i konstantnosti brzine svetlosti u takvim sistemima, čime je iz osnova izmenio poglede na niz pojmova mehanike, ali tako da klasična mehanika ipak predstavlja graničan slučaj ove teorije.

2. POJMOVI PROSTORA I VREMENA

2.1. Osnovne pretpostavke

Posle ovog opšteg osvrta, predimo sad na sistematsko izlaganje mehanike. Sva kretanja tela odvijaju se u prostoru i vremenu i stoga se pre svega zadržimo na strožijoj formulaciji i analizi ovih pojmova. U osnovi klasične mehanike leži pretpostavka da postoji jedan sistem referencije S koji apsolutno miruje u vasioni, pri čemu je rastojanje između dveju tačaka u bilo kom sistemu referencije S' isto kao u sistemu S

$$r_{12}' = r_{12}. \quad (2.1)$$

Kretanje u odnosu na sistem S koji apsolutno miruje predstavlja *apsolutno kretanje*, a navedena osobina ukazuje na to da je prostor u klasičnoj mehanici *Euklidov prostor*.

Sem toga, klasična mehanika bazira na pretpostavci da je *vremenski interval između dva događaja isti u svim sistemima referencije S' , koji se na proizvoljan način kreću u odnosu na sistem S*

$$t_{12}' = t_{12}. \quad (2.2)$$

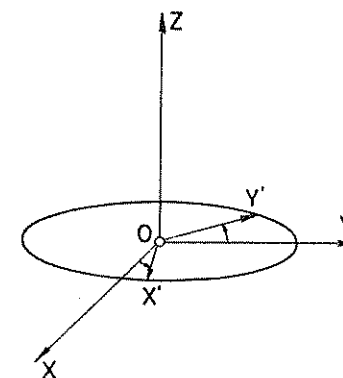
To znači da je vreme *apsolutno*, tj. jednako teče za sve sisteme u vasioni i ono bazira na pojmu *apsolutne istovremenosti*. Pri tome napomenimo da se u klasičnoj mehanici i ne postavlja pitanje kako se ovi pojmovi apsolutnog prostora i vremena mogu realizovati i da li ima smisla upotrebljavati ovako shvaćene pojmove ukoliko ne postoji odgovarajuća realizacija.

2.2. Inercijalni sistemi

U različitim sistemima referencije zakoni kretanja mogu imati različiti vid, čak i zakoni sasvim prostih oblika kretanja u nekim sistemima mogu biti vrlo složeni. Stoga je od interesa naći takve sisteme u kojima će ovi zakoni imati najprostiji oblik.

U odnosu na proizvoljan sistem referencije prostor u opštem slučaju nije homogen i izotropan, tj. različite tačke i pravci ne moraju biti ekvivalentni. Tako na pr. ako uočimo sistem $OX'Y'Z'$ koji rotira oko Z -ose (sl. 2.1), koordinatni početak je jedna istaknuta tačka, a osa rotacije istaknuti pravac. Ukoliko sa ovim sistemom povežemo neko telo koje ne deluje ni sa kakvim drugim telima, njegovi različiti položaji i orijentacije u prostoru u mehaničkom pogledu nisu više ravnopravni.

Isto tako, ni vreme u opštem slučaju nije homogeno, tj. različiti trenuci takođe ne moraju uvek biti ekvivalentni. Tako na pr. slobodna čestica ne može mirovati u odnosu na navedeni rotirajući sistem $OX'Y'Z'$ jer ako u jednom trenutku i miruje, u sledećem trenutku će se kretati za posmatrača u ovom sistemu.



Sl. 2.1

Istovremeno pak pokazuje da u prirodi postoje sistemi referencije u odnosu na koje je prostor homogen i izotropan, a vreme homogeno. Takvi sistemi nazivaju se *inercijalni sistemi*, a navedeni stav izražava *postulat o postojanju inercijalnih sistema*. Ako se u takvom sistemu posmatra neko slobodno telo koje u nekom trenutku miruje, ono će ostati neograničeno dugo u stanju mirovanja, jer bi u protivnom slučaju položaj i trenutak kad telo počinje da se kreće kao i početni pravac kretanja predstavljali istaknute elemente prostora i vremena. To važi i za uniformno kretanje, te vidimo da u inercijalnim sistemima svako telo teži da zadrži svoje stanje mirovanja odnosno jednakog pravolinijskog kretanja. To je tzv. *princip inercije*, odakle i potiče ime ovih sistema.

Takav jedan sistem, koji bi imao navedene osobine, bio bi sistem S koji apsolutno miruje u vasioni i za koji smo pretpostavili da postoji u klasičnoj mehanici. Međutim, ove osobine prostora i vremena ostaće sačuvane i ako predemo na bilo koji sistem S' koji se kreće ravnomerno i pravolinijski u odnosu na sistem S , jer se uniformnim kretanjem ne može pojaviti na pr. neka istaknuta tačka ili pravac u sistemu S' ako ih nije bilo u sistemu S . Oдавде zaključujemo da su svi sistemi referencije koji se uniformno kreću u odnosu na sistem koji apsolutno miruje inercijalni, što može služiti i kao njihova ekvivalentna definicija.

2.3. Galilei-eve transformacije

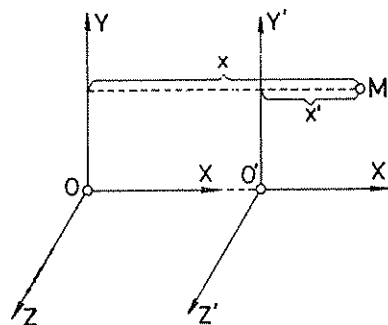
Da bismo matematički formulisali apsolutnost prostora i vremena, posmatrajmo dva koordinatna sistema S i S' (sl. 2.2), od kojih prvi apsolutno miruje, a drugi se kreće translatorno u odnosu na prvi. Pošto se svako translatorno kretanje može razložiti na tri takva kretanja duž koordinatnih osa, dovoljno je posmatrati translatorno kretanje sistema S' duž X -ose. Pri tome označimo elementarno pomeranje koordinatnog početka O' u odnosu na sistem S za vreme dt sa $u(t)dt$.

Prema slici vidimo da za ma koju tačku M postoji sledeća veza između njenih apscisa u ova dva sistema

$$x' = x - \overline{OO'}, \quad \overline{OO'} = \int_0^t u(t) dt,$$

a ostale dve koordinate ostaju nepromenjene, tako da važe relacije

$$x' = x - \int_0^t u(t) dt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.3)$$



Sl. 2.2

Sem toga, apsolutnost vremena, koja bazira na pojmu apsolutne istovremenosti, izražava se na taj način što je bilo koji trenutak t za posmatrača u sistemu S isti kao i za posmatrača u sistemu S'

$$t' = t \quad (2.4)$$

Skup ovih obrazaca (2.3) i (2.4) predstavlja tzv. *Galilei-eve transformacije*. Pošto koordinate (x, y, z) i trenutak t određuju jedan *događaj* koji se desio na jednom određenom mestu u određenom trenutku, Galilei-eve transformacije uspostavljaju veze između koordinata i vremena jednog istog događaja u dva *razna* inercijalna sistema. Ako se sistem S' kreće uniformno u odnosu na sistem S , biće $u = \text{const}$, pa se gornje relacije svode na

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.5)$$

2.4. Klasični princip relativnosti

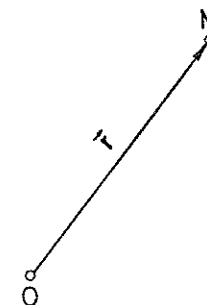
Iz dosadašnjeg izlaganja videli smo da u inercijalnim sistemima, koji miruju ili se kreću uniformno, osnovna svojstva prostora i vremena su ista i u njima važi mehanički princip inercije. Sem toga, zbog ovih osobina prostora i vremena su u inercijalnim sistemima isti ne samo zakoni slobodnog kretanja već i kretanja pod dejstvom sila, jer bi se u protivnom slučaju pojavile istaknute tačke i pravci u prostoru i vremenu. Oдавde možemo zaključiti da su ovi sistemi u geometrijskom i mehaničkom pogledu potpuno ravnopravni, usled čega jednačine kretanja klasične mehanike moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima, tj. moraju biti invarijantne u odnosu na Galilei-eve transformacije (2.5). Na osnovu svega toga možemo reći:

Svi inercijalni sistemi su međusobno ekvivalentni, tj. zakoni mehanike isti su u svim inercijalnim sistemima. To je poznati *Galilei-ev princip relativnosti*, koji leži u osnovi klasične mehanike. Tako na pr. za posmatrača u vozu koji se kreće uniformno telo slobodno pada po istim zakonima kao i za posmatrača na Zemlji koji miruje.

3. ELEMENTI KINEMATIKE

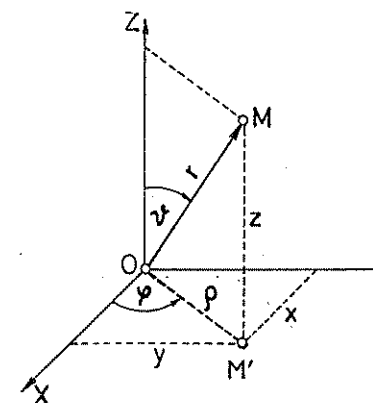
3.1. Određivanje položaja tačke

Položaj tačke u prostoru može se odrediti na više načina. Vektorski način određivanja položaja tačke sastoji se u tome da se on određuje pomoću vektora (sl. 3.1) čiji je početak u jednoj stalnoj tački prostora O , a kraj u posmatranoj tački M . Ovaj vektor naziva se *vektor položaja* i on je određen svojim intenzitetom, pravcem i smerom.



Sl. 3.1

Analitički način određivanja položaja tačke bazira na metodu koordinata. Pod koordinatama tačke podrazumeva se skup triju veličina koji potpuno određuje položaj ove tačke. Najpoznatija su tri koordinatna sistema: *Descartes-ov pravougli*, *cilindrični* i *sferni* (sl. 3.2). U pravouglojnom sistemu položaj tačke M se određuje njenim rastojanjima x , y i z od triju međusobno normalnih ravni. U cilindričnom sistemu položaj tačke M se određuje rastojanjem ρ njene projekcije M' na stalnu ravan XOY od stalne tačke O , uglom φ između pro-



Sl. 3.2

jekcije OM' i stalne poluprave OX i rastojanjem z od stalne ravni XOY . Najzad, u sfernom sistemu položaj tačke M se određuje njenim rastojanjem r od stalne tačke O , uglom ϑ između duži OM i stalne poluprave OZ i uglom φ između ravni ZOM i stalne ravni ZOX . Pri tome se sve ove veličine uzimaju orijentisane, kao što je prikazano na slici.

Veza između pravouglih i cilindričnih koordinata data je obrascima

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (3.1)$$

Na sličan način dobija se i veza između pravouglih i sfernih koordinata

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \quad (3.2)$$

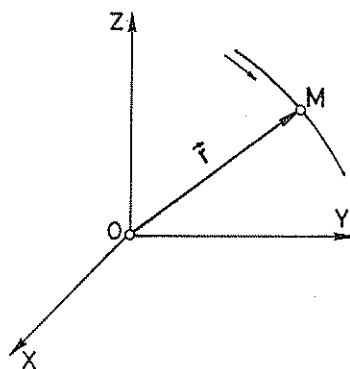
Ovi obrasci mogu se rešiti i po ρ , φ i z odnosno po r , ϑ i φ i omogućavaju prelaz sa jednih koordinata na druge.

3.2. Putanja (trajektorija) čestice

Predimo sad na proučavanje kretanja materijalnih tela. Da bismo uprostiti posmatranje kretanja tela i drugih prirodnih pojava i istakli samo one bitne karakteristike koje nas pod datim uslovima interesuju, često se uzima uprošćen *mehanički model* posmatrane pojave. Takav jedan model u dinamici predstavlja materijalna tačka, koja se može uvesti na sledeći način.

Uočimo neko telo čije su dimenzije veoma male u odnosu na dimenzije oblasti u kojoj se vrši posmatrano kretanje i čije naš unutrašnje kretanje pri tome ne zanima, takvo telo zvaćemo *čestica*. Na pr. planete Sunčanog sistema, pod uslovom da zanemarimo njihovu rotaciju, pružaju nam primer tela koja možemo smatrati česticama. Pri tome ma koja geometrijska tačka u unutrašnjosti čestice može nam služiti kao predstavnik njenog kretanja i ako još zamislimo celokupnu masu čestice koncentrisanu u ovoj geometrijskoj tački, tako zamišljena *geometrijska tačka sa celokupnom masom čestice* naziva se *materijalna tačka*. Ovako uvedena materijalna tačka predstavlja tada odgovarajući mehanički model kretanja i ubuduće ćemo pod kretanjem čestice uvek podrazumevati kretanje odgovarajuće materijalne tačke u navedenom smislu.

Konačne jednačine kretanja



Sl. 3.3

Kretanje jedne čestice potpuno je određeno ako znamo kako se njen vektor položaja menja u toku vremena, tj. ako znamo vektor položaja $\mathbf{r}$ kao funkciju od vremena t

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (3.3)$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne, koje u pravouglom sistemu imaju oblik

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (3.4)$$

u cilindričnom sistemu

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t), \quad (3.5)$$

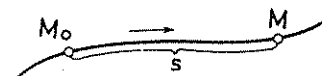
a u sfernom

$$r = r(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (3.6)$$

Ove jednačine, koje određuju vektor položaja, odnosno koordinate čestice kao funkcije vremena, nazivaju se *konačne jednačine kretanja*.

Kretanje čestice može se odrediti i na drugi način (sl. 3.4): ako znamo geometrijski oblik putanje, tj. njene jednačine oblika $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ i pređeni put s , računat od početnog trenutka i orijentisan u smeru kretanja, kao funkciju od vremena

$$s = s(t). \quad (3.7)$$



Sl. 3.4

Ova jednačina naziva se *zakon puta* i ovaj način određivanja kretanja ekvivalentan je prvom.

Ako znamo konačne jednačine kretanja (3.4), jednačine putanje možemo iz njih dobiti eliminacijom vremena t . Zakon puta možemo naći iz metričke forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt^2,$$

odakle dobijamo

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (3.8)$$

što posle uvrštavanja jednačina (3.4) i integracije daje s kao funkciju od t .

3.3. Brzina čestice

Neka se posmatrana čestica (sl. 3.5) u trenutku t nalazi u položaju M , a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju M' . Ako sa $\Delta \mathbf{r}$ označimo razliku vektora položaja u ovim tačkama, *brzina čestice u tački M* definiše se kao granična vrednost količnika priraštaja vektora položaja $\Delta \mathbf{r}$ i odgovarajućeg intervala vremena Δt kad Δt teži nuli

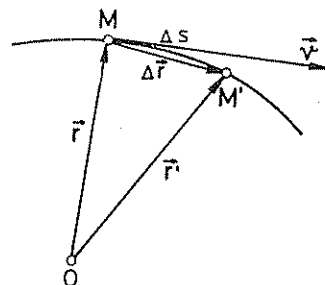
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (3.9)$$

To je prvi izvod vektora $\mathbf{r}$ po vremenu t u tački M , što se obično označava tačkom iznad oznake veličine. Pošto je u graničnom slučaju $|d\mathbf{r}| = ds$, intenzitet brzine iznosi

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (3.10)$$

Pravac i smer brzine određen je graničnim položajem pravca i smera vektora $\Delta \mathbf{r}$, te brzina ima pravac tangente, a smer odgovara smeru kretanja. Označimo li sa $\vec{\tau}_0$ jedinični vektor tangente, imaćemo

$$\mathbf{v} = v \vec{\tau}_0 = \dot{\mathbf{s}} \vec{\tau}_0. \quad (3.11)$$



Sl. 3.5

Ako jedinične vektore koordinatnih osa označimo sa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ i razložimo vektor položaja duž njih

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3,$$

diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{e}_1 + \dot{y} \mathbf{e}_2 + \dot{z} \mathbf{e}_3$$

Oдавde vidimo da su komponente brzine u pravouglim koordinatama

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (3.12)$$

tj. jednake izvodima odgovarajućih koordinata po vremenu i njih možemo naći diferenciranjem konačnih jednačina kretanja (3.4).

Kvadrat brzine

Od posebnog interesa je kvadrat brzine, kako zbog određivanja njenog intenziteta tako i zbog nalaženja kinetičke energije. U pravouglom sistemu prema obrascima (3.12) imamo

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (3.13)$$

i ovaj obrazac omogućava nalaženje intenziteta brzine ako znamo konačne jednačine kretanja. U cilindričnom sistemu relacije (3.1) daju

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{z} = \dot{z},$$

te će biti

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \dot{z}^2,$$

odnosno

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \quad (3.14)$$

Polarni sistem u ravni može se shvatiti kao specijalan slučaj cilindričnog sistema kod koga je $z = 0$, te je $\rho = r$, pa se gornji izraz svodi na

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3.15)$$

Kvadrat brzine u sfernom sistemu možemo naći pomoću relacija (3.2)

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi,$$

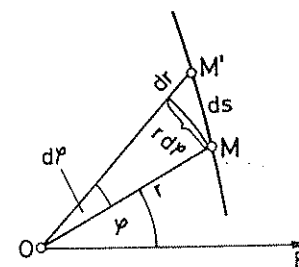
$$\dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta,$$

odakle dobijamo

$$v^2 = \dot{r}^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \dot{r}^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \cdot \\ + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \dot{r}^2 (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + r^2 \dot{\vartheta}^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2,$$

tj. konačno

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \quad (3.16)$$



Sl. 3.6

Ove rezultate možemo dobiti i geometrijskim putem, nalaženjem kvadrata elementa luka ds^2 i deljenjem sa dt^2 . Na pr. za polarni sistem u ravni (sl. 3.6) iz elementarnog trougla na slici imamo

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

a odavde dobijamo

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (3.17)$$

što se poklapa sa izrazom (3.15).

3.4. Ubrzanje čestice

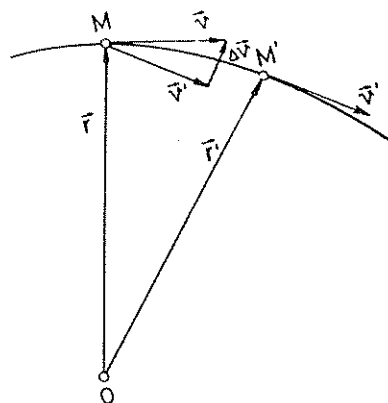
Neka se čestica (sl. 3.7) u trenutku t nalazi u položaju M , a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju M' . Ako sa $\Delta \mathbf{v}$ označimo razliku brzina u ovim tačkama, ubrzanje čestice u tački M definiše se kao granična vrednost količnika priraštaja brzine $\Delta \mathbf{v}$ i odgovarajućeg intervala vremena Δt kad Δt teži nuli

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} \quad (3.18)$$

Prema obrascu (3.9) vidimo da je ubrzanje čestice drugi izvod vektora položaja po vremenu, što se obično označava sa dve tačke iznad vektora

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.19)$$

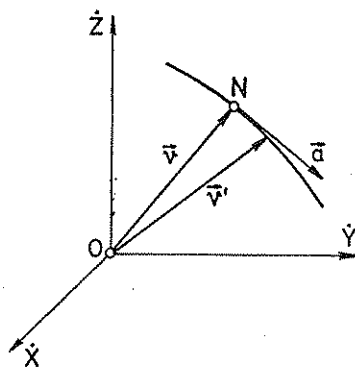
Ubrzanje možemo predstaviti očiglednije ako posmatramo kako se menja brzina u toku vremena (sl. 3.8). Ako brzine u raznim trenucima prenesemo translatorno u zajednički početak, kraj vektora brzine opisivaće izvesnu liniju u prostoru. Ova linija naziva se *hodograf brzine*. Pošto ovde brzina igra ulogu vektora položaja, *ubranje čestice predstavlja brzinu odgovarajuće tačke na hodografu brzine*.



Sl. 3.7

Komponente ubrzanja možemo naći dvostrukim diferenciranjem vektora položaja

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$$



Sl. 3.8

po vremenu, čime dobijamo

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{e}_1 + \ddot{y} \mathbf{e}_2 + \ddot{z} \mathbf{e}_3$$

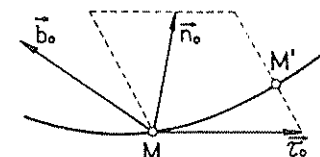
Odavde vidimo da su *komponente ubrzanja* u pravouglim koordinatama

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z} \quad (3.20)$$

i njih možemo naći dvostrukim diferenciranjem konačnih jednačina kretanja (3.4).

Prirodne komponente ubrzanja

Izrazimo još ubrzanje u prirodnom trijedru osa (sl. 3.9), koji čine tangenta, glavna normala i binormala. Kao što je poznato, oskulatorna ravan u tački M može se definisati kao graničan položaj ravni koja prolazi kroz tangentu u toj tački i njoj blisku tačku M' kad ova tačka teži tački M. *Glavna normala* se tada definiše kao ona normala u tački M koja leži u oskulatornoj ravni, a *binormala* kao ona normala koja je normalna na oskulatornoj ravni. Usmerimo tangentu u smeru kretanja, glavnu normalu ka centru krivine, a binormalu tako da sa tangentom i glavnom normalom čine desni trijedar i označimo njihove jedinične vektore sa τ_0 , n_0 i b_0 .

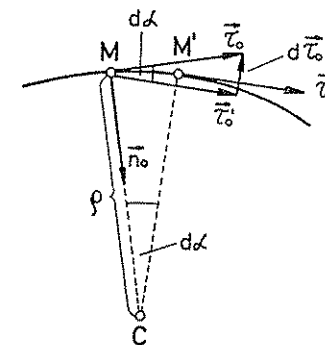


Sl. 3.9

Neka se čestica u trenutku t (sl. 3.10) nalazi u položaju M, a u beskonačno bliskom trenutku $t+dt$ u položaju M'. U toku ovog beskonačno malog intervala vremena dt možemo smatrati da se kretanje vrši u jednoj ravni. Pošto ova ravan sadrži tangentu u tački M i njoj beskonačno blisku tačku M', to je oskulatorna ravan. U njoj leže jedinični vektori tangente u ovim dvema tačkama τ_0 i τ_0' , pa i njihova razlika $d\tau_0$.

Ubrzanje u tački M prema obrascu (3.11) možemo napisati u obliku

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (v \tau_0) = \dot{v} \tau_0 + v \dot{\tau}_0 \quad (3.21)$$



Sl. 3.10

Izvod jediničnog vektora tangente možemo transformisati na sledeći način

$$\dot{\tau}_0 = \frac{d\tau_0}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\tau_0}{ds}$$

Vektor $\vec{d}\tau_0$ kao graničan slučaj vektora $\Delta\tau_0$ kad tačka M' teži tački M ima pravac normale u tački M , a pošto leži u oskulatornoj ravni, to je pravac glavne normale. Ako sa dx označimo ugao između jediničnih vektora $\vec{\tau}_0$ i $\vec{\tau}_0'$, prema slici biće

$$d\tau_0 = |d\tau_0| n_0 = dx n_0. \quad (3.22)$$

Pošto je presek dveju glavnih normala u beskonačno bliskim tačkama M i M' centar krivine, označavajući sa ρ poluprečnik krivine, imaćemo

$$ds = \widehat{MM'} = \rho dx.$$

Tada se drugi član u izrazu (3.21) može napisati u obliku

$$\vec{v} \tau_0 = v^2 \frac{d\tau_0}{ds} = v^2 \frac{dx n_0}{\rho dx} = \frac{v^2}{\rho} n_0,$$

te konačno dobijamo

$$\vec{a} = \dot{v} \tau_0 + \frac{v^2}{\rho} n_0. \quad (3.23)$$

Oдавде vidimo da se *ubrzanje može razložiti duž tangente i glavne normale, te uvek leži u oskulatornoj ravni*. Prva komponenta ubrzanja duž tangente naziva se *tangencijalno ubrzanje*, a druga komponenta duž glavne normale *normalno ubrzanje*. Pošto su tangenta i glavna normala međusobno normalne, kvadrat ubrzanja je

$$a^2 = \dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2} \quad (3.24)$$

i ovaj obrazac određuje intenzitet ubrzanja kao funkciju od v , $\dot{v}$ i ρ .

U slučaju pravolinijskog kretanja krivina je jednaka nuli, te je $\rho = \infty$, pa preostaje samo tangencijalno ubrzanje. Ako se pak kretanje vrši sa konstantnim intenzitetom brzine, kao na pr. pri ravnomernom kretanju po krugu, biće $\dot{v} = 0$, te se ubrzanje svodi samo na normalno ubrzanje.

3.5. Primeri kretanja

1. Navedimo kao prvi primer ravnomerno kretanje čestice po krugu poluprečnika R (sl. 3.11). Ako ravan kretanja uzmemo za XOY ravan, a centar kruga za koordinatni početak i ako X-osu postavimo kroz početni položaj čestice, prema slici imamo

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi.$$

Zbog ravnomernog kretanja čestice opisani ugao φ biće srazmeran odgovarajućem vremenu t

$$\varphi = \omega t,$$

pa konačne jednačine kretanja imaju oblik

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = 0 \quad (3.25)$$

Jednačine putanje mogu se dobiti eliminacijom vremena t iz prvih dveju jednačina

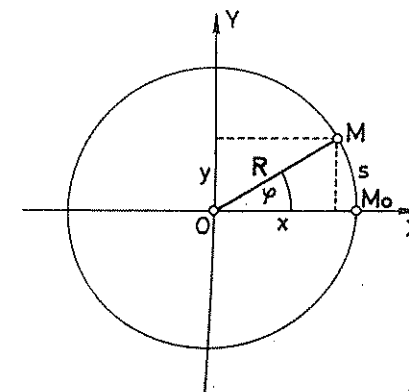
$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0,$$

a zakon puta iz metričke forme ili neposredno prema slici

$$s = R \varphi = R \omega t. \quad (3.26)$$

Komponente brzine prema jednačinama (3.25) biće

$$v_x = \dot{x} = -\omega R \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = \omega R \cos \omega t, \quad v_z = \dot{z} = 0,$$



Sl. 3.11

a njen intenzitet

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \omega R. \quad (3.27)$$

Komponente ubrzanja dobijamo ponovnim diferenciranjem po vremenu

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 R \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad a_y = \ddot{y} = -\omega^2 R \sin \omega t = -\omega^2 y, \quad a_z = \ddot{z} = 0,$$

a prirodne komponente ubrzanja na osnovu obrasca (3.23)

$$a_\tau = \dot{v} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 R, \quad (3.28)$$

pri čemu a_n predstavlja i intenzitet ubrzanja.

2. Kao drugi primer uzmimo kretanje jedne fiksirane tačke M kruga poluprečnika a koji se ravnomerno kotrlja bez klizanja po pravouj OX (sl. 3.12). Tako dobijena kriva naziva se *cikloida* i ako navedenu pravu uzmemo za X-osu, a početni položaj tačke M za koordinatni početak, prema slici imamo

$$x = OP = OQ - PQ,$$

$$y = PM = QC - NC.$$

Zbog kotrljanja bez klizanja biće

$$OQ = \widehat{MQ} = a \varphi,$$

a sem toga je

$$PQ = a \sin \varphi, \quad NC = a \cos \varphi,$$

te prethodne jednačine dobijaju oblik

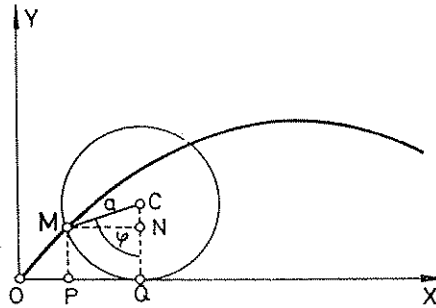
$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi) \quad (3.29)$$

Opisani ugao φ zbog ravnomernog kretanja kruga biće i ovde srazmeran vremenu t

$$\varphi = \omega t,$$

pa konačne jednačine kretanja posmatrane čestice biće

$$x = a(\omega t - \sin \omega t), \quad y = a(1 - \cos \omega t), \quad z = 0 \quad (3.30)$$



Sl. 3.12

To su parametarske jednačine cikloide, čiji je oblik prikazan na slici. Komponente brzine tačke M su

$$v_x = \dot{x} = \omega a (1 - \cos \omega t), \quad v_y = \dot{y} = \omega a \sin \omega t, \quad v_z = \dot{z} = 0,$$

a njen intenzitet

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\omega^2 a^2 (1 - \cos \omega t)^2 + \omega^2 a^2 \sin^2 \omega t} = \omega a \sqrt{2(1 - \cos \omega t)},$$

tj.

$$v = 2 \omega a \sin \frac{\omega t}{2} \quad (3.31)$$

Odavde neposredno možemo naći i zakon puta

$$s = \int_0^t v dt = 2 \omega a \int_0^t \sin \frac{\omega t}{2} dt = 2 \omega a \left[-\frac{\cos \frac{\omega t}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right]_0^t,$$

odnosno

$$s = 4a \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2} \right) \quad (3.32)$$

Komponente ubrzanja ovde će imati oblik

$$a_x = \ddot{x} = \omega^2 a \sin \omega t, \quad a_y = \ddot{y} = \omega^2 a \cos \omega t, \quad a_z = \ddot{z} = 0,$$

a otuda

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \omega^2 a$$

Na osnovu ovih rezultata mogu se odrediti i prirodne komponente ubrzanja

$$a_\tau = \dot{v} = \omega^2 a \cos \frac{\omega t}{2}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \omega^2 a \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (3.33)$$

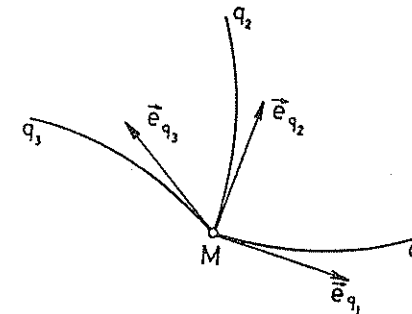
koje se u ovom slučaju menjaju sa vremenom i to tako da kad jedna dostiže maksimum druga je u minimumu i obrnuto.

3.6. Generalisane koordinate

Kao što je poznato iz matematike, (v. na pr. Đ. Mušicki i B. Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, odeljak 3.1), tri ma kakve veličine koje potpuno određuju položaj tačke u prostoru nazivaju se *generalisane koordinate* te tačke. Označimo ove veličine sa q_1, q_2 i q_3 i neka su veze između pravouglavih i generalisanih koordinata

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \quad (3.34)$$

za koje pretpostavljamo da se mogu rešiti po q_1, q_2 i q_3 .



Sl. 3.13

Iz svake tačke prostora (sl. 3.13) mogu se povući tri koordinatne linije, duž kojih se menja samo jedna generalisana koordinata. Tangente povučene na koordinatne linije u posmatranoj tački predstavljaju *koordinatne ose*. Usmerimo ove ose u smeru raščćenja odgovarajućih generalisanih koordinata i označimo jedinične vektore ovako usmerenih osa sa e_{q_1}, e_{q_2} i e_{q_3} .

Za svaki tako definisan generalisani koordinatni sistem može se naći odgovarajuća *metrička forma*, koja određuje kvadrat elementa luka. To se postiže transformacijom izraza $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ u generalisane koordinate i tako se dobija

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij} (e_{q_i} \cdot e_{q_j}) dq_i dq_j, \quad (3.35)$$

gde su h_i tzv. *Lamé-ovi koeficienti*, definisani obrascem

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i \mathbf{e}_i, \quad h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| \quad (3.36)$$

i mogu se naći na osnovu relacija (3.34). Ako je sistem ortogonalan, što je u praksi najčešći slučaj, gornji izraz se svodi na sumu čisto kvadratnih članova

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 dq_i^2. \quad (3.37)$$

Projekcije brzine na koordinatne ose

Posmatrajmo sad kretanje neke čestice u generalisanom koordinatnom sistemu i potražimo projekcije brzine i ubrzanja u ma kojoj tački M na koordinatne ose u toj tački. Ako brzinu čestice $\mathbf{v}$ pomnožimo skalarno sa jediničnim vektorom $\mathbf{e}_{q_i}$, dobićemo odgovarajuću projekciju brzine

$$v_i = \mathbf{v} \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_{q_i}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_{q_i},$$

a s obzirom na obrazac (3.36) biće

$$v_i = \frac{1}{h_i} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \quad (3.38)$$

Da bismo ovaj izraz sveli na neku poznatu veličinu, podimo od

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

odakle sledi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (3.39)$$

pa gornji izraz možemo napisati u obliku

$$v_i = \frac{1}{h_i} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right)$$

ili kraće

$$v_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, 2, 3), \quad (3.40)$$

gde smo uveli oznaku

$$T^* = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} v^2. \quad (3.41)$$

Ovaj obrazac određuje *projekcije brzine* na ose generalisanog sistema, pri čemu T^* predstavlja kinetičku energiju jedinice mase. Za primenu ovog obrasca potrebno je znati samo metričku formu u obliku (3.35), iz koje možemo neposredno da pročitamo vrednosti Lamé-ovih koeficijenata h_i , a deobom metričke forme sa $2 dt^2$ dobićemo i funkciju T^* . Uvrštavanjem ove funkcije u gornje obrasce lako tada nalazimo sve odgovarajuće projekcije brzine v_i .

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose

Na sličan način dobićemo i projekciju ubrzanja $\mathbf{a}$ na koordinatnu osu određenu jediničnim vektorom $\mathbf{e}_{q_i}$.

$$a_i = \mathbf{a} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{q_i}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{q_i},$$

pa prema obrascu (3.36) imaćemo

$$a_i = \frac{1}{h_i} \left(\dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right). \quad (3.42)$$

Da bismo i ovde uveli funkciju T^* , iskoristimo identitet

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i},$$

na osnovu koga gornji izraz možemo napisati u obliku

$$a_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right] \quad (3.43)$$

Imajući u vidu da su operacije totalnog diferenciranja po vremenu i parcijalnog diferenciranja po generalisanoj koordinati međusobno nezavisne, možemo izmeniti njihov red

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i},$$

pa s obzirom i na obrazac (3.39) biće

$$a_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right],$$

te konačno dobijamo

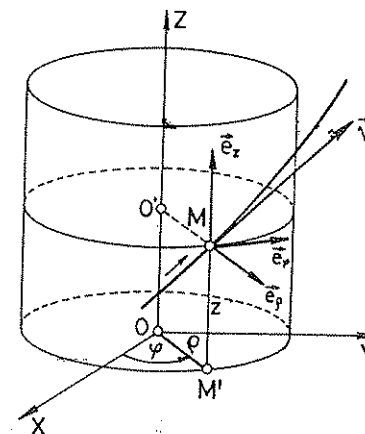
$$a_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \right) \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.44)$$

Ovaj obrazac određuje *projekcije ubrzanja* na ose generalisanog sistema. Da bismo ih odredili, moramo znati samo metričku formu (3.35), iz koje sličnim postupkom kao u prethodnom slučaju možemo naći sve projekcije ubrzanja.

Napomenimo na kraju da se projekcije brzine i ubrzanja na ove ose u opštem slučaju ne poklapaju sa njihovim komponentama u pravcu tih osa. Samo u slučaju ortogonalnih sistema one se poklapaju i tada dobijeni rezultati istovremeno određuju i ove komponente

3.7. Primer

Posmatrajmo cilindrični koordinatni sistem (sl. 3.14) i potražimo projekcije brzine i ubrzanja neke čestice u položaju M na ose ovog sistema. Koordinatne linije u ovom slučaju su: za ρ prava $O'M$, za φ krug paralelan XOY ravni i za z prava $M'M$, a odgovarajuće koordinatne ose su tangente na ove linije u tački M , čije jedinične vektore označimo sa $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ i $\mathbf{e}_z$.



Sl. 3.14

Metrička forma ovog sistema određena je obrascem

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (3.45)$$

Odavde vidimo da su odgovarajući Lamé-ovi koeficienti

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1,$$

a funkcija T^* biće

$$T^* = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Projekcije brzine u tački M na koordinatne ose ovog sistema možemo tada naći primenom obrasca (3.40)

$$v_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\rho}} = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\varphi}} = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, \quad (3.46)$$

a projekcije ubrzanja na osnovu (3.44) imaju oblik

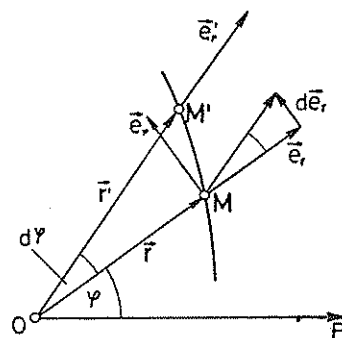
$$\left. \begin{aligned} a_\rho &= \frac{1}{h_\rho} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T^*}{\partial \rho} \right) = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, & a_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T^*}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}), \\ a_z &= \frac{1}{h_z} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T^*}{\partial z} \right) = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Pošto je ovaj sistem ortogonalan, dobijeni izrazi istovremeno predstavljaju i komponente brzine odnosno ubrzanja duž jediničnih vektora e_ρ , e_φ i e_z . Za polarni sistem u ravni, kad je $z=0$ i $\rho=r$, gornji izrazi se svode na

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & v_\varphi &= r \dot{\varphi}, \\ a_r &= \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, & a_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Napomenimo da se do ovih rezultata može doći i čisto vektorskim putem. Tako na pr. za polarne koordinate u ravni (sl. 3.15) podimo od

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r,$$



Sl. 3.15

pa diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \quad (3.49)$$

Prema slici vidimo da kad se pomerimo iz tačke M u M' , odgovarajuća elementarna promena jediničnog vektora $\mathbf{e}_r$ imaće pravac i smer vektora $\mathbf{e}_\varphi$

$$d\mathbf{e}_r = |d\mathbf{e}_r| \mathbf{e}_\varphi = d\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

odakle sledi

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.50)$$

Tada prethodni izraz za brzinu možemo napisati u obliku

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.51)$$

čime je brzina razložena na komponente duž jediničnih vektora $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$.

Odavde neposredno vidimo da su odgovarajuće komponente brzine

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi},$$

što se poklapa sa njenim projekcijama (3.48). Na sličan način, ponovnim diferenciranjem po vremenu, možemo dobiti i odgovarajući izraz za ubrzanje u ovom sistemu.

Glava II

ZAKONI DINAMIKE

4. POJAM SILE. OSNOVNA JEDNAČINA DINAMIKE

4.1. Definicija sile

Da bismo uveli pojam mase, podimo od našeg osnovnog postulata da *postoje* inercijalni sistemi, koje smo definisali osobinom da je u odnosu na njih prostor homogen i izotropan a vreme homogeno. Na osnovu toga smo pokazali da u takvim sistemima važi *princip inercije*, tj. svako telo teži da zadrži svoje stanje mirovanja odnosno uniformnog kretanja. Sa tog stanovišta, *masa čestice* se uvodi kao *mera njene inercije*, tj. *mera njenog otpora svakoj promeni stanja njenog kretanja* i ta veličina je skalar. Tada se pojam sile može definisati na sledeći način.

Posmatrajmo čisto mehaničko kretanje neke čestice i pretpostavimo da se ne vrši nikakvo pripajanje ili odvajanje drugih čestica. Uvedimo sad proizvod mase čestice i njene brzine i označimo ga sa

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (4.1)$$

Ovako uvedena veličina naziva se *impuls čestice* ili *količina kretanja*, pri čemu napomenimo da mnogi autori pojam impulsa definišu kao proizvod sile i vremena dejstva, što je na osnovu definicije sile jednako promeni količine kretanja $m \mathbf{v} - m \mathbf{v}_0$.

Ako se impuls čestice menja u toku vremena, kažemo da postoji dejstvo izvesne sile. Neka posmatrana čestica u trenutku t ima impuls $\mathbf{p}$, a u trenutku $t+dt$ impuls $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$, tada se *promena impulsa čestice po jedinici vremena* može smatrati merom ovog dejstva i naziva se *sila*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (4.2)$$

Prema ovoj definiciji *sila koja deluje na neku česticu jednaka je izvodu impulsa te čestice po vremenu u tom trenutku*.

Ako je masa čestice stalna, što odgovara klasičnoj mehanici, gornji izraz se svodi na

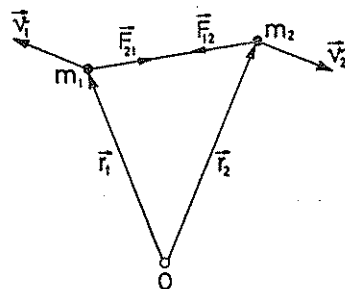
$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a}, \quad (4.3)$$

te je u ovom slučaju sila jednaka proizvodu mase čestice na koju deluje ova sila i ubrzanja te čestice u posmatranom trenutku. Mada je ova definicija sile dovoljna za klasičnu mehaniku, gornja definicija (4.2) je opštija i važi ne samo za klasičnu već i za relativističku mehaniku.

4.2. Postulati sile

Posmatrajmo sad dejstvo izvesne sile na neku česticu (sl. 4.1), koja ima masu m_1 , vektor položaja $\mathbf{r}_1$ i brzinu $\mathbf{v}_1$. Iskustvo pokazuje da se svako dejstvo sile može okarakterisati sledećim osnovnim zakonima:

1. U inercijalnim sistemima u slučaju stalne mase sila na bilo koju česticu, odnosno uzrok njenog ubrzanja, potiče od nekog uzajamnog dejstva između ove čestice i ostalih.



Sl. 4.1

2. Svakom uzajamnom dejstvu sa ovom česticom u klasičnoj fizici može se pridružiti određeni vektor interakcije, koji zavisi od relativnog vektora položaja i brzine ovih čestica

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (4.4)$$

i on je jednak sili kojom druga čestica dejstvuje na uočenu.

3. Svaki vektor interakcije u Newton-ovoj mehanici kolinearan je sa relativnim vektorom položaja $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ i karakteriše se ovim dvema osnovnim osobinama:

a) Istovremeno uzajamno dejstvo dveju čestica sa uočenom određeno je zbirom odgovarajućih vektora interakcije $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$ po pravilu sabiranja vektora (princip superpozicije ili zakon nezavisnosti dejstva sile)

b) Svako uzajamno dejstvo recipročno je u tom smislu da kadgod druga čestica dejstvuje na prvu silom određenom vektorom interakcije $\mathbf{F}_{21}$, tada i prva dejstvuje na drugu silom čiji je vektor interakcije

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (4.5)$$

(princip akcije i reakcije).

Ovi zakoni predstavljaju osnovne prirodne zakone dejstva sile i zvaćemo ih *postulati sile*. Oni su, zajedno sa našom definicijom sile i osnovnim postulatom o postojanju inercijalnih sistema, ekvivalentni Newton-ovim principima mehanike. Pri tome istaknimo da samom definicijom sile ništa nije rečeno o njenoj prirodi. Umesto da kažemo da neka čestica mase m ima u nekom trenutku ubrzanje $\mathbf{a}$, kažemo da na tu česticu dejstvuje sila $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, čime je to isto rečeno na kraći način. Tek uvođenjem ovih postulata mi smo sili dali i fizički sadržaj: ubrzanje čestice pripisali smo uzajamnom dejstvu između čestica, koje smo potom i bliže okarakterisali određenim zakonom interakcije i osnovnim osobinama

vektora interakcije. Odavde se vidi da je zaista sila u inercijalnim sistemima mera uzajamnog dejstva, što se obično i uzima kao njena kvalitativna definicija.

Napomenimo još da u klasičnoj fizici postoje i uzajamna dejstva za koja navedene osobine vektora interakcije ne važe i za takve sile neće se moći primeniti svi zakoni Newton-ove mehanike.

Prave i inercijalne sile

U dosadašnjem razmatranju ograničili smo se na inercijalne sisteme, koji miruju ili se kreću uniformno i u njima smo formulisali osnovne zakone dejstva sile. Međutim, sva ubrzanja tela ne potiču uvek od uzajamnog dejstva između tela, već mogu imati uzrok i u kretanju samog sistema referencije iz koga se posmatra kretanje. U tom pogledu, sve sile kao uzroke ubrzanja možemo podeliti u dve osnovne kategorije:

Prave sile, koje potiču od uzajamnog dejstva između tela i za koje važe postulati sile (odnosno Newton-ovi principi) i

Inercijalne sile, koje potiču od ubrzanja sistema referencije iz koga se posmatra kretanje i za koje ne važe postulati sile.

O ovim poslednjim silama, koje igraju vrlo veliku ulogu i u koje spada na pr. centrifugalna sila, detaljnije ćemo govoriti docnije, u odeljku o relativnom kretanju. Pri tome napomenimo da ubrzanje samog sistema referencije takode potiče od nekog uzajamnog dejstva sa telom za koje je vezan ovaj sistem.

U daljem izlaganju pretpostavljamo stalno, ukoliko izričito drukčije ne naglasimo, da je sistem referencije iz koga posmatramo kretanje inercijalan.

4.3. Primeri pravih sila

Navedimo nekoliko tipičnih primera pravih sila koje se pojavljuju u klasičnoj fizici i na koje se svode mnoge poznate pojave:

1. *Gravitacione sile*, koje se opisuju Newton-ovim zakonom gravitacije i prema kome se dve čestice sa masama m_1 i m_2 na međusobnom rastojanju r uzajamno privlače silom koja je srazmerna njihovim masama, a obrnuto srazmerna kvadratu njihovog rastojanja

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_0, \quad (4.6)$$

gde je $\mathbf{r}$ relativni vektor položaja čestice na koju se posmatra dejstvo sile.

2. *Elastične sile*, koje se u izvesnim slučajevima svode na takva uzajamna dejstva koja se karakterišu privlačnim silama srazmernim rastojanju čestice od ravnotežnog položaja

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r}, \quad (4.7)$$

pri čemu $\mathbf{r}$ predstavlja vektor položaja posmatrane čestice u odnosu na ravnotežni položaj. Napomenimo ovde da je ovakav oblik sile samo makrofizička manifestacija istovremenog uzajamnog dejstva uočene čestice sa mnogobrojnim okolnim molekulima.

3. *Elektromagnetne sile*, koje se zasnivaju na tzv. Lorentz-ovoj sili, prema kojoj elektromagnetno polje dejstvuje na neko naelektrisanje e_1 koje se kreće brzinom $\mathbf{v}_1$ silom

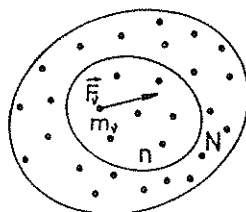
$$\mathbf{F} = e_1 \mathbf{E} + e_1(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e_1 e_2 \mathbf{v}_2 \times [\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad (4.8)$$

Napomenimo ovde da sa stanovišta savremene fizike postoje samo četiri osnovna tipa uzajamnog dejstva u prirodi, na koja se mogu svesti sva ostala: *gravitacione sile, elektromagnetne sile, sile jakog uzajamnog dejstva i sile slabog uzajamnog dejstva*. Gravitacione sile dejstvuju između masa tela po navedenom zakonu, one su najslabije i dolaze do izražaja samo kod vrlo velikih masa, dok elektromagnetne sile dejstvuju između naelektrisanja i one igraju veliku ulogu u atomima, molekulima i kristalima. Sile jakog uzajamnog dejstva deluju između nukleona u jezgrima atoma, a sile slabog uzajamnog dejstva između lakih elementarnih čestica, međutim poslednja dva tipa sila mogu se opisati samo jezikom kvantne mehanike.

Posmatrajmo neki sistem čestica na koji ne dejstvuju nikakve spoljne prave sile, takav sistem naziva se *izolovan* ili *zatvoren*. Neka taj sistem ima N čestica i uočimo silu koja dejstvuje na v -tu česticu ovog sistema. Ona je rezultat uzajamnog dejstva ove čestice sa svim ostalima i prema postulatu sile (4.4) iznosi

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{F}_{1y}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_y, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_y) + \dots + \mathbf{F}_{y-1y}(\mathbf{r}_{y-1} - \mathbf{r}_y, \mathbf{v}_{y-1} - \mathbf{v}_y) + \mathbf{F}_{y+1y}(\mathbf{r}_{y+1} - \mathbf{r}_y, \mathbf{v}_{y+1} - \mathbf{v}_y) + \dots + \mathbf{F}_{Ny}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_y, \mathbf{v}_N - \mathbf{v}_y).$$



te zavisi od položaja i brzina svih čestica sistema

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{F}_y(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{F}_y(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_N) \quad (4.10)$$
$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_{n+1}(t), \dots, \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(t), \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1}(t), \dots, \mathbf{v}_N = \mathbf{v}_N(t)$$
$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v^* (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, t). \quad (4.11)$$

Iz gornjeg izlaganja vidimo da *eksplicitna zavisnost sile od vremena ukazuje da je posmatrani sistem neisolovan*. Ona karakteriše uticaj svih spoljašnjih sila na uočenu česticu sistema.

Formulišimo sad jednačinu kretanja za ma koju česticu nekog sistema u polju datih sila. Neka u trenutku t na v -tu česticu dejstvuje sila oblika (4.11), a s druge strane, prema definiciji sile (4.3) imamo

$$\mathbf{F}_y = m_y \mathbf{a}_y \quad (4.12)$$

$$m_0, a_0 = F_0^*(r_1, \dots, r_R, v_1, \dots, v_n, t) \quad (4.13)$$

Ova jednačina naziva se *osnovna jednačina dinamike* i ona izražava *prirodni zakon kretanja*. Pri tome napomenimo da treba razlikovati jednačine (4.12) i (4.13), jer prva daje samo definiciju sile, a druga prirodni zakon kretanja dobijen kombinacijom definicije i postulata sile. Gornja jednačina se dobija izjednačavanjem proizvoda mase i ubrzanja uočene čestice sa odgovarajućim tipom sile koja deluje na tu česticu. Tako na pr. osnovna jednačina dinamike za česticu u polju sile (4.7) glasi

$$m a = -k r, \quad (4.14)$$

Ako napišemo osnovnu jednačinu dinamike (4.13) za svaku česticu posmatranog sistema, imamo

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1^* (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, t)$$

$$m_n \mathbf{a}_n = \mathbf{F}_n^* (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, t)$$

Uzimajući u obzir definicije brzine i ubrzanja (3.9) i (3.19), prethodne jednačine možemo pisati

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) \\ &\vdots \\ m_n \ddot{\mathbf{r}}_n &= \mathbf{F}_n^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{F}_v^* (\mathbf{r}_\mu, \dot{\mathbf{r}}_\mu, t) \quad (v=1, 2, \dots, n). \quad (4.16)$$

gde $\mathbf{r}_u$ i $\dot{\mathbf{r}}_u$ označavaju skupove svih vektora položaja i brzina čestica sistema.

Ako poznajemo sve sile koje djeluju na sistem, desne strane ovih jednačina su date funkcije navedenih promenljivih, te gornje jednačine predstavljaju *sistem od n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, u kome su nepoznate funkcije svi vektori položaja $\mathbf{r}_\nu$,*

a nezavisno promenljiva vreme t . Stoga se ove jednačine nazivaju *diferencijalne jednačine kretanja*, a njihovim rešavanjem dobijaju se konačne jednačine kretanja oblika (3.3), o čemu će docnije biti više reči. Na pr. osnovna jednačina dinamike (4.14) napisana kao diferencijalna jednačina kretanja imaće oblik

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -k \mathbf{r}. \quad (4.17)$$

Jednačine kretanja i princip relativnosti

Ispitajmo još kako se transformišu diferencijalne jednačine kretanja pri prelazu u neki drugi inercijalni sistem S' , koji se u odnosu na sistem S koji apsolutno miruje kreće konstantnom brzinom u . Pošto u ovom slučaju svako translatorno kretanje sistema S' možemo razložiti na tri takva kretanja duž koordinatnih osa, za svako od njih prema Galilei-ovim transformacijama (2.5) važi

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (4.18)$$

Oдавde vidimo da komponente ubrzanja pri tome ostaju nepromenjene, tj. biće $\ddot{\mathbf{r}}_v' = \ddot{\mathbf{r}}_v$. Sem toga, vektori interakcije $\mathbf{F}_v$ prema našem postulat sile (4.4) zavise samo od *relativnih* vektora položaja i brzina, a ove veličine na osnovu obrazaca (2.5) takode ostaju nepromenjene

$$\mathbf{r}_v' - \mathbf{r}_\mu' = \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu, \quad \mathbf{v}_v' - \mathbf{v}_\mu' = \mathbf{v}_v - \mathbf{v}_\mu, \quad (4.19)$$

pri čemu vektori položaja i brzine spoljnjih čestica i ne figurišu eksplicitno u izrazima za sile $\mathbf{F}_v$. Stoga se ne menja ni oblik funkcija $\mathbf{F}_v^*(\mathbf{r}_\mu, \dot{\mathbf{r}}_\mu, t)$, te diferencijalne jednačine kretanja (4.16) u sistemu S' glase

$$m, \ddot{\mathbf{r}}_v' = \mathbf{F}_v^*(\mathbf{r}_\mu', \dot{\mathbf{r}}_\mu', t) \quad (v=1, 2, \dots, n) \quad (4.20)$$

Dakle, *diferencijalne jednačine klasične mehanike pri prelazu u drugi inercijalni sistem ostaju nepromenjene, tj. invarijantne su u odnosu na Galilei-ove transformacije*. To je matematička formulacija klasičnog principa relativnosti.

5. OPŠTI ZAKONI DINAMIKE

5.1. Rad i efekat sile

Upoznajmo se pre svega sa nekim važnijim pojmovima mehanike. Ako izvesna sila deluje na neku česticu na izvesnom putu, kažemo da ona vrši rad. Iz iskustva je poznato da je potreban utoliko veći rad ukoliko je veća sila i ukoliko je veći put pod uslovom da je sila stalna duž puta i da deluje stalno u pravcu puta. Međutim, u opštem slučaju ti uslovi ne moraju biti ispunjeni i stoga posmatrajmo rad sile na beskonačno malom putu (sl. 5.1). Neka je $\mathbf{F}$ sila koja deluje na posmatranu česticu u položaju M i neka se ona pod dejstvom sile pomeri za $d\mathbf{s}$ pod uglom α prema sili. Tada se *proizvod aktivne sile i elementarnog pomeranja* može smatrati merom ovog rada i naziva se *elementarni rad sile $\mathbf{F}$ pri pomeranju za $d\mathbf{s}$*

$$d'A = F \cos \alpha \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (5.1)$$

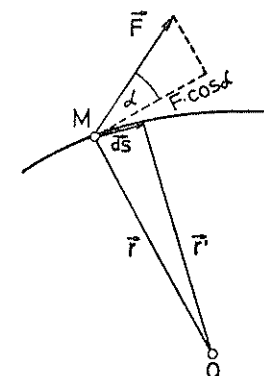
pri čemu smo oznakom ' naznačili da ovaj izraz u opštem slučaju ne mora biti totalni diferencijal.

Elementarna pomeranja mogu se izraziti i pomoću odgovarajućih vektora položaja

$$d\mathbf{s} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = d\mathbf{r},$$

tj. kao diferencijali vektora $\mathbf{r}$, te prethodni izraz možemo napisati u obliku

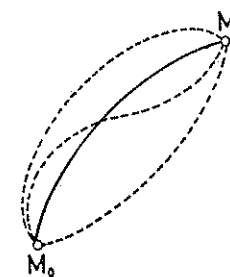
$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$



Sl. 5.1

a ukupni rad ove sile na putu od M_0 do M_1 biće

$$A = \int_{M_0}^{M_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.2)$$



Sl. 5.2

Ovaj rad je prikazan krivolinijskim integralom i u opštem slučaju zavisi kako od prirode sile $\mathbf{F}$ i početnog i krajnjeg položaja čestice tako i od oblika puta (sl. 5.2) između ovih položaja.

Ako imamo sistem od N čestica i ako na ovaj sistem deluju izvesne sile tako da se v -ta čestica pod dejstvom sile $\mathbf{F}_v$ pomeri za $d\mathbf{r}_v$, ukupni elementarni rad jednak je zbiru elementarnih radova na pojedinačnim česticama

$$d'A = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v,$$

a ukupni rad na sistemu je

$$A = \sum_{v=1}^N \int_{M_{v0}}^{M_{v1}} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v, \quad (5.3)$$

pri čemu M_{v_0} i M_{v_1} predstavljaju početne i krajnje položaje v -te čestice. Rad sile izvršen u jedinici vremena naziva se *efekat sile* ili *snaga*, a prema gornjem obrascu određen je izrazom

$$\frac{d'A}{dt} = \frac{\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v}{dt} = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v}_v \quad (5.4)$$

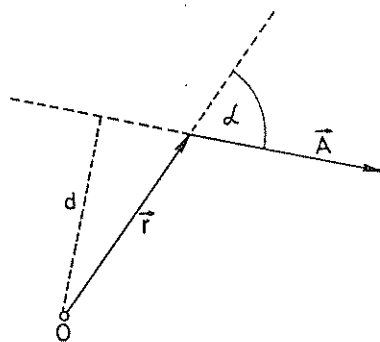
i zavisi od brzina svih čestica sistema u posmatranom trenutku.

5.2. Momenti mehaničkih veličina

Uvedimo sad jedan novi važan pojam u mehanici: moment vektorske veličine. Ako uočimo ma kakvu vektorsku veličinu $\mathbf{A}$ (sl. 5.3) i neku tačku O , tzv. *pol* i ako sa $\mathbf{r}$ označimo vektor položaja početne tačke vektora $\mathbf{A}$ u odnosu na pol, vektorski proizvod $\mathbf{r} \times \mathbf{A}$ naziva se *moment vektora $\mathbf{A}$ u odnosu na pol O* .

Kao najvažniji slučaj navedimo *moment sile*

$$\mathbf{L}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (5.5)$$



Sl. 5.3

Pravac ovog vektora je normalan na ravni vektora $\mathbf{r}$ i $\mathbf{F}$ i predstavlja pravac ose oko koje sila $\mathbf{F}$ teži da obrne neko telo vezano za tačku O , a uperen je na onu stranu odakle se vidi da vektor $\mathbf{r}$ najkraćim putem prelazi u položaj vektora $\mathbf{F}$, čime je određen smer obrtanja tela oko ose rotacije. Intenzitet momenta sile iznosi

$$L^{(0)} = r F \sin \alpha = F \cdot d, \quad (5.6)$$

tj. jednak je proizvodu intenziteta sile i njenog normalnog rastojanja od pola O .

Drugi važan slučaj predstavlja *moment impulsa* ili *kinetički moment* u odnosu na dati pol. On se definiše, po analogiji sa (5.5), obrascem

$$\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} \quad (5.7)$$

i u tesnoj je vezi sa momentom sile, kao što ćemo videti iz daljeg izlaganja.

Napomenimo još da su, za razliku od pravih vektora kao što su na pr. brzina ili sila, *moment sile* i *moment impulsa pseudovektori*, tj. pri izmeni orijentacije koordinatnih osa ne menjaju znak. To potiče otuda što momenti ovih veličina nemaju određenu prirodnu orijentaciju, već se ona određuje po dogovoru i stoga su oni nezavisni od koordinatnog sistema.

5.3. Konzervativne sile

Zadržimo se sad na osnovnim tipovima sile i postavimo pre svega pitanje pod kojim uslovima rad sile ne zavisi od oblika puta. Da bi integral (5.3) bio nezavisan od oblika puta, izraz pod integralom mora biti totalni diferencijal neke funkcije položaja svih čestica

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v = df(x_1, y_1, z_1). \quad (5.8)$$

pri čemu na pr. x_1 predstavlja skup svih apscisa čestica sistema. Tada gornji integral ima vrednost

$$A = \int df = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_{10}, y_{10}, z_{10}), \quad (5.9)$$

odakle vidimo da rad u ovom slučaju zaista zavisi samo od vrednosti funkcije f u početnim i krajnjim položajima čestica sistema.

Ako uslov (5.8) napišemo u razvijenom obliku, razvijajući skalarne proizvode na levoj strani i totalni diferencijal na desnoj, imaćemo

$$\sum_{v=1}^N F_{vx} dx_v + \sum_{v=1}^N F_{vy} dy_v + \sum_{v=1}^N F_{vz} dz_v = \sum_{v=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_v} dx_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial f}{\partial y_v} dy_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial f}{\partial z_v} dz_v$$

Pošto su sve koordinate čestica međusobno nezavisne, gornja jednakost biće uvek zadovoljena samo tada ako su svi koeficijenti uz iste diferencijale na levoj i desnoj strani međusobno jednaki

$$F_{vx} = \frac{\partial f}{\partial x_v}, \quad F_{vy} = \frac{\partial f}{\partial y_v}, \quad F_{vz} = \frac{\partial f}{\partial z_v}, \quad (5.10)$$

Uvodeći pojam parcijalnog gradijenta

$$\text{grad}_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_v}, \frac{\partial f}{\partial y_v}, \frac{\partial f}{\partial z_v} \right),$$

gornje obrasce možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\mathbf{F}_v = \text{grad}_v f \quad (v=1, 2, \dots, N), \quad (5.11)$$

pri čemu napomenimo da se ovaj parcijalni gradijent često označava i simbolom $\partial f / \partial \mathbf{r}_v$

Dakle, rad sile ne zavisi od oblika puta između početnih i krajnjih položaja čestica ako se sve sile mogu izraziti kao parcijalni gradijenti iste skalarne funkcije. Ova skalarna funkcija naziva se *funkcija sile*, ovakve sile *konzervativne sile*, a sistem u kome deluju samo takve sile *konzervativan sistem*.

Kriterijum po kome možemo utvrditi da li je posmatrana sila konzervativna možemo dobiti na taj način što ćemo ispitati da li izraz s leve strane obrasca (5.8) zadovoljava uslove da bude totalni diferencijal. U slučaju jedne čestice taj kriterijum dobija vrlo prost oblik, jer ako je $\mathbf{F} = \text{grad } f$, neposredno sledi

$$\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot grad } f = 0, \quad (5.12)$$

što predstavlja potreban i dovoljan uslov da sila bude konzervativna.

Potencijal sile

Uzmemo li negativnu vrednost funkcije sile i označimo je sa $U = -f$, komponente sile dobijaju oblik

$$F_{vx} = -\frac{\partial U}{\partial x_v}, \quad F_{vy} = -\frac{\partial U}{\partial y_v}, \quad F_{vz} = -\frac{\partial U}{\partial z_v}, \quad (5.13)$$

a same sile kao vektori

$$\mathbf{F}_v = -\text{grad}_v U \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (5.14)$$

Ovako uvedena veličina U naziva se *potencijal sile* ili *potencijalna energija sistema*. Njen fizički smisao možemo dobiti pomoću obrasca (5.8), koji s obzirom na definiciju funkcije U možemo napisati u obliku

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v = -dU.$$

Odavde integracijom nalazimo

$$U = - \sum_{v=1}^N \int_{M_{v0}}^{M_v} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v, \quad (5.15)$$

a imajući u vidu da izraz $-\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_v$ predstavlja rad protiv sile $\mathbf{F}_v$ na pomeranju $d\mathbf{r}_v$ i da je pri poklapanju svih položaja M_v sa M_{v0} potencijal jednak nuli, možemo reći:

Vrednost potencijala sile u nekom položaju sistema predstavlja rad koji treba izvršiti protiv svih sile da bi ovaj sistem prešao iz položaja u kome je potencijal jednak nuli u posmatrani položaj sistema. Odavde vidimo zašto se potencijal sile naziva i potencijalna energija.

Ako umesto početnih položaja čestica M_{v0} uzmemo neke druge položaje M_{v0}' , obrazac (5.15) nam daje

$$U' = - \sum_{v=1}^N \int_{M_{v0}'}^{M_v} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v = - \sum_{v=1}^N \int_{M_{v0}}^{M_v} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v - \sum_{v=1}^N \int_{M_{v0}'}^{M_{v0}} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v,$$

a pošto je prvi član neka konstanta, dobijamo

$$U' = U + \text{const} \quad (5.16)$$

Dakle, potencijal sile određen je samo do aditivne konstante, koju možemo izabrati tako da potencijal bude jednak nuli u željenom položaju sistema.

U opštem slučaju potencijal može zavisiti i eksplicitno od vremena. Sve sile oblika

$$\mathbf{F}_v = -\text{grad}_v U, \quad U = U(x_1, y_1, z_1, t) \quad (5.17)$$

nazivaju se *potencijalne sile*, a u slučaju kad potencijal ne zavisi eksplicitno od vremena potencijalne sile svode se na konzervativne. Ako potencijal zavisi eksplicitno od vremena, i sile će takođe zavisiti eksplicitno od vremena i tada umesto gornjeg obrasca za elementarni rad imamo

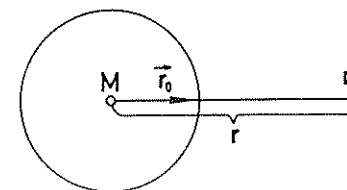
$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v = - \sum_{v=1}^N \text{grad}_v U \cdot d\mathbf{r}_v = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (5.18)$$

odakle integracijom zaključujemo da rad ovakvih sile, za razliku od konzervativnih, zavisi i od oblika puta.

Primer

Kao primer uzmimo Newton-ov zakon gravitacije

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0,$$



Sl. 5.4

kojom telo mase M (sl. 5.4) deluje na česticu mase m na rastojanju r . U ovom slučaju je uslov (5.8) zadovoljen

$$\text{rot } \mathbf{F} = -GMm \text{rot} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) = -GMm \left(\frac{1}{r^3} \text{rot } \mathbf{r} + \text{grad} \frac{1}{r^3} \times \mathbf{r} \right) = GMm \frac{3}{r^4} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{r} = 0,$$

jer je $\text{rot } \mathbf{r} = 0$, te je ova sila konzervativna. Potencijalnu energiju čestice u polju ove sile možemo naći pomoću obrasca (5.15), uzimajući da je $U=0$ u beskonačnosti

$$U = - \int_{M_0}^M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{M_0}^M G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r} = GMm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2},$$

pri čemu smo iskoristili da je $\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r} = dr$, što sledi diferenciranjem identiteta $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$. Tako dobijamo

$$U = -G \frac{Mm}{r} \quad (U_{\infty} = 0), \quad (5.19)$$

to predstavlja traženu potencijalnu energiju posmatrane čestice.

5.4. Giroskopske i disipativne sile

Sem konzervativnih, važnu ulogu igraju još dva tipa sile: giroskopske i disipativne. *Giroskopske sile* su takve sile čiji je rad na ma kom putu uvek jednak nuli, što je moguće ako sila zavisi od brzine i uvek je normalna na vektoru brzine. Tipičan primer takve sile je Lorentz-ova sila (4.8) za $\mathbf{E}=0$, kojom magnetno polje jačine $\mathbf{B}$ deluje na naelektrisanje e koje se kreće brzinom $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.20)$$

Njen elementarni rad na pomeranju $d\mathbf{r}$ biće

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

jer su vektori $\mathbf{v}$ i $d\mathbf{r}$ kolinearni, te ova sila zaista zadovoljava traženi uslov.

Drugi tip predstavljaju *disipativne sile*, pod kojima se podrazumevaju takve sile čiji je rad na ma kakvom putu uvek negativan, što odgovara trošenju mehaničke energije. Kao primer

takve sile navedimo otpornu silu sredine, srazmernu brzini čestice i uperenu suprotno smeru kretanja

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{v} \quad (5.21)$$

Elementarni rad ove sile biće

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -kv^2 dt$$

i on je uvek negativan, odakle vidimo da je posmatrana sila zaista disipativna. U ovom slučaju ova sila se može izvesti i iz jednog potencijala, tzv. *disipativne funkcije*

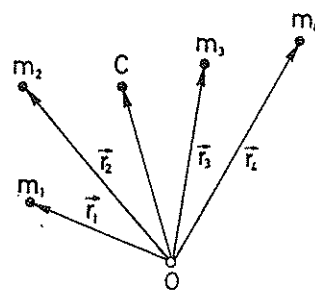
$$R = \frac{1}{2} k (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (5.22)$$

pomoću koga se komponente sile mogu izraziti u obliku

$$F_x = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = -k\dot{x}, \quad F_y = -\frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = -k\dot{y}, \quad F_z = -\frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = -k\dot{z}. \quad (5.23)$$

5.5. Centar masa

Uvedimo još pojam centra masa sistema čestica. Neka su $m_1, m_2, m_3, \dots$ mase čestica posmatranog sistema (sl. 5.5), a $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$ njihovi vektori položaja u posmatranom trenutku. Uočimo sad proizvod mase i vektora položaja v -te čestice, ovaj proizvod je vek-



Sl. 5.5

tor istog pravca i smera kao i $\mathbf{r}_v$. Formirajmo zbir svih ovakvih proizvoda $\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{r}_v$ i

podelimo ga sa ukupnom masom sistema $\sum_{v=1}^N m_v$, čime dobijamo izvestan vektor, koji shvatimo kao vektor položaja izvesne tačke C

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{r}_v}{\sum_{v=1}^N m_v}, \quad (5.24)$$

Tako definisana tačka C naziva se *centar masa* ili *centar inercije sistema*, a prema samoj definiciji vidimo da *položaj centra masa zavisi samo od rasporeda masa u tom trenutku, a*

ne zavisi od izbora koordinatnog sistema. Gornji obrazac nam neposredno daje i koordinate centra masa

$$x_c = \frac{\sum_{v=1}^N m_v x_v}{\sum_{v=1}^N m_v}, \quad y_c = \frac{\sum_{v=1}^N m_v y_v}{\sum_{v=1}^N m_v}, \quad z_c = \frac{\sum_{v=1}^N m_v z_v}{\sum_{v=1}^N m_v}. \quad (5.25)$$

Pokažimo sad osnovnu osobinu centra masa, koja mu i daje smisao. Ako izraz (5.24) dva puta diferenciramo po vremenu, prema osnovnoj jednačini dinamike dobićemo

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v}{\sum_{v=1}^N m_v} = \frac{\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v}{\sum_{v=1}^N m_v},$$

a otuda

$$\left(\sum_{v=1}^N m_v \right) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_c = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v. \quad (5.26)$$

Ovaj rezultat možemo interpretirati na sledeći način. Ako zamislimo da je u centru masa skoncentrisana celokupna masa sistema i da na nju deluje rezultanta svih sila, osnovna jednačina dinamike za tako zamišljenu česticu biće upravo jednačina (5.26), te možemo reći:

Centar masa sistema kreće se kao materijalna tačka u kojoj bi bila skoncentrisana celokupna masa sistema i na koju bi delovala rezultanta svih sila koje deluju na sistem.

5.6. Zakon kinetičke energije

U mehanici mogu se naći izvesne opšte relacije koje međusobno povezuju veličine karakteristične za kretanje sistema kao što su kinetička energija, rad, impuls, moment impulsa, rezultujuća sila, rezultujući moment sile. Takve opšte relacije, koje važe bez ikakvog ograničenja, nazivaju se *opšti zakoni dinamike* i ima ih tri: zakon kinetičke energije, zakon impulsa i zakon momenta impulsa. Pod izvesnim uslovima iz ovih relacija mogu se integracijom dobiti *zakoni o održanju* odgovarajućih mehaničkih veličina i to su prvi integrali kretanja.

Izložimo sad redom navedene opšte zakone dinamike. Uvedimo prvo veličinu

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \mathbf{v}_v \quad (5.27)$$

i ovako definisana veličina naziva se *kinetička energija sistema*. Potražimo elementarnu promenu kinetičke energije sistema pri njegovom elementarnom pomeranju pod uticajem sila koje deluju na sistem. Ona iznosi

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v d\mathbf{v}_v \cdot \mathbf{v}_v + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot d\mathbf{v}_v = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot d\mathbf{v}_v = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} \cdot d\mathbf{v}_v = \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\mathbf{v}_v}{dt} \cdot d\mathbf{r}_v \end{aligned}$$

što možemo napisati i u obliku

$$dT = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{a}_v \cdot d\mathbf{r}_v \quad (5.28)$$

Prema osnovnoj jednačini dinamike (4.13) ovde možemo staviti $m_v a_v = F_v$, tako da dobijamo

$$dT = \sum_{v=1}^N F_v \cdot dr_v,$$

a ovaj izraz prema obrascu (5.3) predstavlja elementarni rad izvršen na sistemu

$$dT = d'A = \sum_{v=1}^N F_v \cdot dr_v. \quad (5.29)$$

Dakle, elementarna promena kinetičke energije sistema jednaka je odgovarajućem elementarnom radu svih sila koje deluju na sistem. Ovaj opšti zakon dinamike naziva se zakon kinetičke energije i on nam daje vezu između kinetičke energije sistema i rada koji se vrši na sistemu.

Integral energije

Iz ovog zakona pod izvesnim uslovima može se dobiti kao prvi integral zakon održanja energije. Naime, desna strana jednakosti (5.29) u opštem slučaju ne predstavlja totalni diferencijal, te se ne može uvek izvesti integracija i dobiti odgovarajući prvi integral. Pretpostavimo sad da su sve sile koje deluju na sistem konzervativne, tj. da su oblika

$$F_v = -\text{grad}_v U(x_j, y_j, z_j), \quad (5.30)$$

tada prema obrascu (5.8) i definiciji potencijala imamo

$$d'A = \sum_{v=1}^N F_v \cdot dr_v = -dU$$

pa zakon kinetičke energije (5.29) prelazi u

$$dT = -dU, \quad (5.31)$$

Odavde integracijom dobijamo

$$T = -U + \text{const},$$

tj.

$$T + U = E = \text{const}, \quad (5.32)$$

pri čemu smo zbir kinetičke i potencijalne energije sistema označili sa E. Ukoliko na sistem deluju još i girokopske sile, one ne vrše nikakav rad, te možemo reći:

Ako su sve sile koje deluju na sistem konzervativne ili girokopske, ukupna energija sistema, tj. zbir kinetičke energije i potencijalne energije konzervativnih sila, stalna je u toku vremena. Ovaj prvi integral predstavlja poznati zakon o održanju mehaničke energije i on istovremeno izražava i jednu bitnu osobinu konzervativnih sila, od čega i potiče njihovo ime.

U slučaju potencijalnih sila čiji potencijal zavisi eksplicitno od vremena, prema obrascu (5.18) vidimo da desna strana jednakosti (5.29) ne predstavlja više totalni diferencijal, te za takve sile ne važi više ni zakon o održanju mehaničke energije. To je razumljivo ako se ima u vidu da tada i sile zavise eksplicitno od vremena, pa posmatrani sistem nije više izolovan i može razmenjivati energiju sa okolinom. Takođe, ako sile nisu uopšte potencijalne, ne može se ni govoriti o pojmu potencijalne energije, te ni ovde ne važi zakon održanja mehaničke energije. Takav slučaj imamo na pr. kod sila trenja, koje nisu potencijalne sile u gornjem smislu reči i u tom slučaju se vrši pretvaranje dela mehaničke energije u toplotnu.

5.7. Zakon impulsa

Uvedimo sad ukupni impuls sistema

$$p = \sum_{v=1}^N p_v = \sum_{v=1}^N m_v v_v \quad (5.33)$$

i potražimo njegovu promenu obračunatu po jedinici vremena, tj. njegov izvod po vremenu. Imamo

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v v_v = \sum_{v=1}^N m_v \dot{v}_v = \sum_{v=1}^N m_v a_v,$$

pa prema osnovnoj jednačini dinamike biće

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{v=1}^N F_v, \quad (5.34)$$

pri čemu smo na desnoj strani dobili rezultantu svih sila koje deluju na sistem.

Ovaj rezultat, koji važi bez ikakvih ograničenja, možemo uprostiti ako u posmatranom sistemu čestica razlikujemo dve vrste sila: *unutrašnje sile*, koje potiču od čestica samog sistema i *spoljašnje sile*, koje potiču od čestica van posmatranog sistema. Unutrašnje sile koje deluju između mase kojih dveju čestica sistema, ukoliko važi zakon akcije i reakcije, uzajamno se poništavaju $F_{v\mu} + F_{\mu v} = 0$, pa je i ukupni zbir ovih sila

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\mu=1}^N F_{v\mu} = 0, \quad (5.35)$$

tj. pod navedenim uslovom zbir svih unutrašnjih sila u masi kom sistemu čestica jednak je nuli. Tada u sumi na desnoj strani jednačine (5.34) preostaju samo spoljašnje sile, čiju rezultantu označimo sa F

$$\frac{dp}{dt} = F = \sum_{v=1}^N F_{v\text{ex}}. \quad (5.36)$$

Dakle, ako važi zakon akcije i reakcije, izvod po vremenu ukupnog impulsa sistema jednak je rezultanti svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem. Ovaj opšti zakon dinamike naziva se zakon impulsa i daje nam vezu između impulsa sistema i rezultante svih spoljašnjih sila. Dobijeni rezultat možemo izraziti i pomoću centra mase (5.24). Naime, ako navedeni obrazac diferenciramo po vremenu, dobićemo brzinu centra mase

$$v_c = \dot{r}_c = \frac{\sum_{v=1}^N m_v v_v}{\sum_{v=1}^N m_v} \quad (5.37)$$

Tada ukupni impuls sistema možemo napisati u obliku

$$p = \sum_{v=1}^N m_v v_v = \left(\sum_{v=1}^N m_v \right) v_c,$$

a zakon impulsa (5.36)

$$\left(\sum_{v=1}^N m_v \right) \dot{v}_c = \sum_{v=1}^N F_{v\text{ex}}, \quad (5.38)$$

što je ekvivalentno jednačini (5.26).

Iz ovog zakona možemo izvesti i odgovarajuće relacije za projekcije posmatranih veličina na proizvoljan pravac. Ako sa $\mathbf{n}_0$ označimo jedinični vektor proizvoljno usmerenog i konstantnog pravca, koji se na pr. može poklapati sa nekom od koordinatnih osa, i ako jednačinu (5.36) pomnožimo skalarno sa $\mathbf{n}_0$, imajući u vidu da je $\mathbf{n}_0 = \text{const}$, dobijamo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_0) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0$$

Skalarni proizvodi sa $\mathbf{n}_0$ predstavljaju projekcije odgovarajućih veličina na uočeni pravac, te prethodni obrazac možemo napisati u obliku

$$\frac{dp_n}{dt} = F_n, \quad (5.39)$$

gde smo uveli oznake

$$p_n = \mathbf{p} \cos(\mathbf{p}, \mathbf{n}_0), \quad F_n = \mathbf{F} \cos(\mathbf{F}, \mathbf{n}_0) \quad (5.40)$$

Izvod po vremenu projekcije ukupnog impulsa sistema na proizvoljan konstantan pravac jednak je projekciji rezultante svih spoljašnjih sila na taj pravac.

Integral impulsa

Ako je rezultanta svih spoljašnjih sila jednaka nuli

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v = 0, \quad (5.41)$$

zakon impulsa (5.36) nam daje

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0,$$

a otuda integracijom dobijamo

$$\mathbf{p} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v = \text{const.} \quad (5.42)$$

Ako je rezultanta svih spoljašnjih sila jednaka nuli, ukupni impuls sistema je stalan u toku vremena. Ovaj prvi integral predstavlja zakon o održanju impulsa. Navedeni uslov je uvek ispunjen kod izolovanih sistema, jer kod njih i nema spoljašnjih sila, pa za njih uvek važi zakon o održanju impulsa.

Imajući u vidu da je prema obrascu (5.37) $\mathbf{p} = \left(\sum_{v=1}^N m_v \right) \mathbf{v}_c$, stav o održanju impulsa sistema možemo formulisati i pomoću centra mase u obliku

$$\mathbf{v}_c = \text{const} \quad \left(\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v = 0 \right) \quad (5.43)$$

Drugim rečima, ukoliko je zbir svih spoljašnjih sila jednak nuli, centar mase se kreće uniformno.

Može se desiti da rezultanta svih spoljašnjih sila nije jednaka nuli, ali je jednaka nuli njena projekcija na neki konstantan pravac određen jediničnim vektorom $\mathbf{n}_0$

$$F_n = \mathbf{F} \cos(\mathbf{F}, \mathbf{n}_0) = 0. \quad (5.44)$$

Tada prema obrascu (5.39) imamo

$$\frac{dp_n}{dt} = 0,$$

a otuda

$$p_n = \mathbf{p} \cos(\mathbf{p}, \mathbf{n}_0) = \text{const} \quad (5.45)$$

Ako je projekcija rezultante svih spoljašnjih sila na neki konstantan pravac jednaka nuli, projekcija ukupnog impulsa sistema na taj pravac je stalna.

5.8. Zakon momenta impulsa

Ako uvedemo moment impulsa $\mathbf{M}$ koje v -te čestice sistema u odnosu na neku stalnu tačku O i ako ovu tačku uzmemo za koordinatni početak, ovaj moment je

$$\mathbf{M}_v^{(0)} = \mathbf{r}_v \times \mathbf{p}_v = \mathbf{r}_v \times m_v \mathbf{v}_v,$$

gde je $\mathbf{r}_v$ vektor položaja uočene čestice. Tada je ukupni moment impulsa sistema

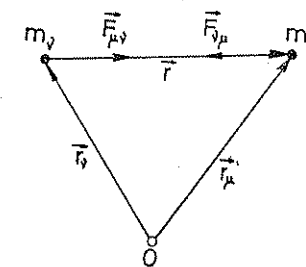
$$\mathbf{M}^{(0)} = \sum_{v=1}^N \mathbf{M}_v^{(0)} = \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times m_v \mathbf{v}_v. \quad (5.46)$$

Potražimo sad njegovu promenu obračunatu po jedinici vremena, tj. njegov izvod po vremenu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}^{(0)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times m_v \mathbf{v}_v = \sum_{v=1}^N \dot{\mathbf{r}}_v \times m_v \mathbf{v}_v + \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times m_v \dot{\mathbf{v}}_v = \\ &= \sum_{v=1}^N \mathbf{v}_v \times m_v \mathbf{v}_v + \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times m_v \mathbf{a}_v \end{aligned}$$

Prvi član zbog kolinearnosti vektora jednak je nuli, pa na osnovu osnovne jednačine dinamike dobijamo

$$\frac{d\mathbf{M}^{(0)}}{dt} = \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_v \quad (5.47)$$



Sl. 5.6

Ovaj rezultat, koji takođe važi bez ikakvih uslova, možemo uprostiti uvođeći unutrašnje spoljašnje sile u sistemu. Ako uočimo momente unutrašnjih sila koje deluju na dve čestice sistema (sl. 5.6), njihov zbir biće

$$\mathbf{L}_{\mu v}^{(0)} = \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_{\mu v} + \mathbf{r}_\mu \times \mathbf{F}_{v \mu}. \quad (5.48)$$

Ukoliko važi zakon akcije i reakcije, prethodna jednačina se može napisati u obliku

$$\mathbf{L}_{\mu\nu}^{(0)} = \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{\mu\nu} - \mathbf{r}_\mu \times \mathbf{F}_{\nu\mu} = (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu) \times \mathbf{F}_{\mu\nu}.$$

Ukoliko su još sile kolinearne sa relativnim vektorom položaja $\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu$, prema osobinama vektorskog proizvoda je $\mathbf{L}_{\mu\nu}^{(0)} = 0$. Tada će biti

$$\sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.49)$$

tj. pod navedenim uslovima zbir momenata svih unutrašnjih sila u ma kom sistemu čestica uvek je jednak nuli. Tada u sumi na desnoj strani jednačine (5.47) preostaju samo momenti spoljašnjih sila, čiju rezultantu označimo sa $\mathbf{L}^{(0)}$

$$\frac{d\mathbf{M}^{(0)}}{dt} = \mathbf{L}^{(0)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{\nu\text{ex}}. \quad (5.50)$$

Dakle, ako važi zakon akcije i reakcije i ako su sve sile kolinearne sa relativnim vektorom položaja, izvod po vremenu ukupnog momenta impulsa sistema jednak je rezultanti momenata svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem. Ovaj opšti zakon dinamike naziva se zakon momenta impulsa i daje nam vezu između momenta impulsa ukupnog sistema i rezultante momenata svih spoljašnjih sila.

Iz ovog zakona možemo, na sličan način kao u prethodnom slučaju, dobiti i odgovarajuće relacije za projekcije posmatranih veličina na proizvoljan konstantan pravac određen jediničnim vektorom $\mathbf{n}_0$. Ako jednačinu (5.47) pomnožimo skalarno sa $\mathbf{n}_0$, imaćemo

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{d}{dt} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_0) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_0,$$

što možemo konciznije napisati u obliku

$$\frac{dM_n}{dt} = L_n, \quad (5.51)$$

gde uvedene oznake

$$M_n = \mathbf{M} \cos(\mathbf{M}, \mathbf{n}_0), \quad L_n = \mathbf{L} \cos(\mathbf{L}, \mathbf{n}_0) \quad (5.52)$$

predstavljaju projekcije odgovarajućih veličina na uočeni pravac.

Izvod po vremenu projekcije ukupnog momenta impulsa sistema na proizvoljan konstantan pravac jednak je projekciji rezultante momenata svih spoljašnjih sila na taj pravac.

Integral momenta impulsa

Ako je rezultanta momenata svih spoljašnjih sila jednaka nuli

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{\nu\text{ex}} = 0, \quad (5.53)$$

prema zakonu momenta impulsa (5.50) biće

$$\frac{d\mathbf{M}^{(0)}}{dt} = 0,$$

a otuda integracijom dobijamo

$$\mathbf{M}^{(0)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \text{const} \quad (5.54)$$

Ako je rezultanta momenata svih spoljašnjih sila jednaka nuli, ukupni moment impulsa sistema je stalan u toku vremena. Ovaj prvi integral predstavlja zakon o održanju momenta impulsa. Navedeni uslov je uvek ispunjen kod izolovanih sistema, te za njih uvek važi zakon o održanju momenta impulsa.

Ukoliko rezultanta momenata spoljašnjih sila nije jednaka nuli, ali je jednaka nuli njena projekcija na neki konstantan pravac

$$L_n = \mathbf{L} \cos(\mathbf{L}, \mathbf{n}_0) = 0, \quad (5.55)$$

obrazac (5.51) nam daje

$$\frac{dM_n}{dt} = 0,$$

a otuda

$$M_n = \mathbf{M} \cos(\mathbf{M}, \mathbf{n}_0) = \text{const} \quad (5.56)$$

Ako je projekcija rezultante momenata svih spoljašnjih sila na neki konstantan pravac jednaka nuli, projekcija ukupnog momenta impulsa sistema na taj pravac je stalna.

6. PRINUDNO KRETANJE

6.1. Veze i vrste veza

Do sada smo proučavali kretanje sistema čestica pod uticajem sila ne vodeći računa o prirodi kretanja. U pogledu, prirode kretanja, sva kretanja možemo podeliti u dve grupe. Kretanja pri kojima položaji i brzine čestica nisu ničim ograničeni nazivaju se *slobodna kretanja*, a kod kojih postoje izvesna ograničenja u pogledu položaja i brzina čestica *prinudna kretanja*. Sistemi čestica koji nisu ograničeni u svom kretanju nazivaju se *slobodni sistemi*, a u protivnom slučaju *neslobodni sistemi*.

Posmatrajmo na pr. prinudno kretanje jedne čestice po nekoj površi, pri čemu se ta površ može pomerati u toku vremena. Neka je jednačina ove površi

$$f(X, Y, Z, t) = 0, \quad (6.1)$$

gde su X, Y i Z tekuće koordinate, a vreme t igra ulogu parametra. Koordinate posmatrane čestice u svakom trenutku moraju zadovoljavati jednačinu ove površi, i ako sa (x, y, z) označimo njene koordinate, mora biti

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (6.2)$$

Ova jednačina predstavlja jednu vezu između koordinata uočene čestice pri njenom kretanju po posmatranoj površi.

U opštem slučaju, pod vezama se podrazumevaju ma kakva ograničenja položaja i brzina čestica sistema. Ona se mogu realizovati pomoću površi, osovine i drugih mehanizama, a analitički se izražavaju izvesnim relacijama između koordinata i brzina čestica sistema i eventualno vremena, koje se nazivaju *jednačine veza*. Prema prirodi ograničenja možemo ih podeliti na dve osnovne grupe: holonomne i neholonomne veze, koje formulišimo na sledeći način.

Neka posmatrani sistem ima N čestica i pretpostavimo da postoji k veza između koordinata čestica i vremena

centra diska (x, y), ugao φ obrtanja diska oko svoje ose i ugao ϑ između ose diska i jedne stalne ose, na pr. Y-ose. Zbog kotrljanja bez klizanja elementarno pomicanje centra diska biće $ds = a d\varphi$, a otuda se dobija da je brzina centra diska

$$v_c = \dot{s} = a \dot{\varphi} \quad (6.8)$$

Pravac brzine tačke dodira diska i ravni normalan je na osu diska i prema slici njene komponente su

$$\dot{x} = v_c \cos \vartheta, \quad \dot{y} = v_c \sin \vartheta$$

Oдавде nalazimo, koristeći obrazac (6.8), dve neintegrabilne jednačine veze u obliku

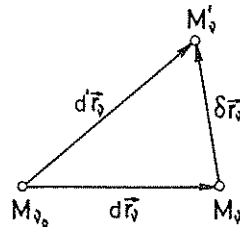
$$\dot{x} - a \cos \vartheta \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{y} - a \sin \vartheta \dot{\varphi} = 0, \quad (6.9)$$

koje izražavaju navedeni uslov kotrljanja bez klizanja u vidu homogenih linearnih neholonomnih veza.

6.3. Moguća i virtuelna pomeranja

Pretpostavimo sad da je kretanje posmatranog sistema ograničeno sa k holonomnih veza (6.4) i posmatrajmo takva *elementarna pomeranja* čestica ovog sistema koja su *u saglasnosti sa ovim vezama*. Takva elementarna pomeranja nazivaju se *moguća pomeranja* i ona se ne moraju poklapati sa stvarnim pomeranjima, međutim svako stvarno pomeranje sigurno je i moguće. Neka su

$$d\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v dt, \quad d'\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v' dt \quad (6.10)$$



Sl. 6.4

dva moguća pomeranja (sl. 6.4) v -te čestice sistema u istom vremenskom intervalu ($t, t+dt$) i formirajmo njihovu razliku

$$\delta \mathbf{r}_v = d' \mathbf{r}_v - d \mathbf{r}_v. \quad (6.11)$$

Ovako definisane razlike dvaju mogućih pomeranja zvaćemo *virtuelna pomeranja*.

Zbog holonomnih veza (6.4) ni virtuelna pomeranja ne mogu biti proizvoljna, pa potražimo uslove koje ona moraju zadovoljavati. Ako konačne jednačine kretanja svih čestica sistema

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(t) \quad (v=1, 2, \dots, N)$$

uvrstimo u jednačine veza (6.4), dobićemo izvesne funkcije vremena $F_j(t)$. Pošto jednačine veza u svakom trenutku moraju biti identički zadovoljene, ovako dobijene funkcije moraju se svesti na *identičnosti*

$$f_j(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), t) \equiv F_j(t) \equiv 0 \quad (6.12)$$

Ova identičnost mora važiti i za trenutak $t+dt$

$$F_j(t+dt) \equiv 0,$$

pa oduzimanjem ovih dveju jednakosti dobijamo

$$F_j(t+dt) - F_j(t) = dF_j(t) \equiv 0, \quad (6.13)$$

tj. *identičnosti* $F_j(t) \equiv 0$, dobijene uvrštavanjem konačnih jednačina kretanja u jednačine veza, mogu se diferencirati.

Ako ove identičnosti napišemo eksplicitno, na osnovu gornje definicije funkcije $F_j(t) \equiv f_j(x_v(t), y_v(t), z_v(t), t)$ imaćemo

$$dF_j \equiv \sum_{v=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} dx_v + \frac{\partial f_j}{\partial y_v} dy_v + \frac{\partial f_j}{\partial z_v} dz_v \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0,$$

što možemo napisati i u obliku

$$\sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot d\mathbf{r}_v + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0, \quad (6.14)$$

Za druga moguća pomeranja, koja se moraju vršiti za isto vreme dt imamo

$$\sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot d' \mathbf{r}_v + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0,$$

pa oduzimanjem nalazimo, s obzirom na obrazac (6.11)

$$\sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (6.15)$$

To su traženi uslovi koje moraju zadovoljavati virtuelna pomeranja u slučaju holonomnih veza i takvih uslova ima toliko koliko i jednačina veza. Oдавде vidimo da između $3N$ komponenta virtuelnih pomeranja $\delta \mathbf{r}_v$ postoji k veza, te ima samo $3N - k$ nezavisnih komponenta.

Ukoliko su veze (6.4) stacionarne, svi parcijalni izvodi po vremenu jednaki su nuli, pa u jednačinama (6.14) otpadaju krajnji članovi

$$\sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot d\mathbf{r}_v = 0. \quad (6.16)$$

Poređenjem ovih jednačina sa uslovima (6.15) vidimo da u ovom slučaju moguća pomeranja $d\mathbf{r}_v$ zadovoljavaju iste uslove kao i virtuelna i u tom smislu možemo reći da su *moguća pomeranja u slučaju stacionarnih veza ekvivalentna sa virtuelnim*.

6.4. Reakcije i vrste reakcija

Ako se na pr. jedna čestica kreće po nekoj površi (6.1) pod dejstvom izvesne sile $\mathbf{F}$, čestice koje ostvaruju mehanizam ove veze mogu dejstvovati na uočenu česticu još izvesnom dopunskom silom $\mathbf{R}$, tako da je ubrzanje koje stvarno ima čestica pri ovom prinudnom kretanju određeno ukupnom silom $\mathbf{F} + \mathbf{R}$ prema osnovnoj jednačini dinamike (4.13)

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (6.17)$$

Ova dopunska sila $\mathbf{R}$ naziva se *sila reakcije*, za razliku od nje sila $\mathbf{F}$ se naziva *aktivna sila*, a ukupna sila $\mathbf{F} + \mathbf{R}$ *efektivna sila*.

U opštem slučaju, pri kretanju posmatranog sistema čestica na svaku česticu ovog sistema može dejstvovati i izvesna sila reakcije, tako da imamo

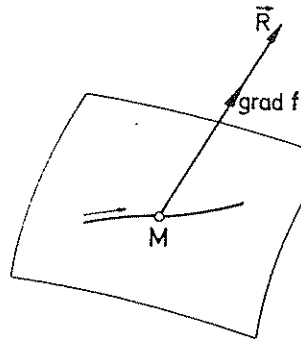
$$m_v \mathbf{a}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{R}_v \quad (v=1, 2, \dots, N), \quad (6.18)$$

pri čemu silu $\mathbf{F}_v$ treba smatrati datom funkcijom oblika $\mathbf{F}_v(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$. Na taj način, uvođenjem pojma reakcije prinudno kretanje svedeno je na slobodno, te možemo reći:

Prinudno kretanje sistema čestica pod uticajem aktivnih sila isto je kao slobodno kretanje ovog sistema pod uticajem efektivnih sila, tj. aktivnih sila i sila reakcije.

Sile reakcije kod holonomnih i zaštržavajućih veza mogu se podeliti u dve grupe. U tom cilju posmatrajmo opet kretanje čestice po površi $f(x, y, z, t) = 0$ (sl. 6.5) i neka je sila reakcije, kojom ova površ deluje na uočenu česticu, normalna na njoj. Imajući u vidu da grad f ima uvek pravac normale na odgovarajućoj ekviskalarnoj površi, ova sila reakcije je kolinearna sa grad f

$$\mathbf{R} = \lambda \cdot \text{grad } f \quad (6.19)$$



Sl. 6.5

U opštem slučaju, ako imamo k holonomnih veza (6.4), svaka veza može dati silu reakcije $\mathbf{R}_v$ na v -tu česticu, koja ima dve komponente — jednu u pravcu $\text{grad}_v f_j$, a drugu u pravcu normalnom na $\text{grad}_v f_j$. Pod idealnim reakcijama podrazumevaju se takve sile reakcije koje su linearne kombinacije parcijalnih gradijenata $\text{grad}_v f_j$

$$\mathbf{R}_v = \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j, \quad (6.20)$$

sa istim koeficijentima $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ za sve čestice, koji se nazivaju *množitelji veza*. To predstavlja generalizaciju obrasca (6.19), a veze koje proizvode takve sile reakcije nazivaju se *idealne veze*. Sile reakcije koje ne zadovoljavaju navedeni uslov zovu se *neidealne reakcije*, a odgovarajuće veze *neidealne veze*.

Potražimo još elementarni rad idealnih reakcija na mogućim i virtuelnim pomeranjima čestica sistema. U prvom slučaju ovaj rad možemo naći na osnovu uslova (6.14), koje moraju zadovoljavati moguća pomeranja

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot d\mathbf{r}_v &= \sum_{v=1}^N \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j \right) \cdot d\mathbf{r}_v = \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot d\mathbf{r}_v \right) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(-\frac{\partial f_j}{\partial t} dt \right), \end{aligned}$$

tj.

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot d\mathbf{r}_v = - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} dt \quad (6.21)$$

Ako napišemo i elementarni rad na drugim mogućim pomeranjima $d'\mathbf{r}_v$ za isto vreme dt

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot d'\mathbf{r}_v = - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} dt,$$

oduzimanjem neposredno dobijamo, imajući u vidu definiciju $\delta \mathbf{r}_v$

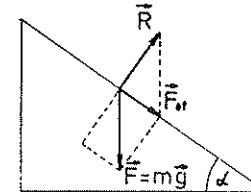
$$\sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0. \quad (6.22)$$

Dakle, ukupni elementarni rad svih idealnih reakcija na ma kakvim virtuelnim pomeranjima čestica sistema uvek je jednak nuli, što je ekvivalentno gornjoj definiciji idealnih reakcija.

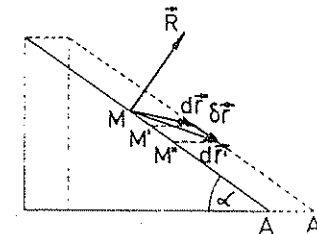
Napomenimo još da u slučaju linearnih neholonomnih veza pojam idealnih reakcija možemo generalisati na taj način što ćemo ih definisati kao takve sile reakcije koje zadovoljavaju uslov (6.22). Međutim, u ovom slučaju to više nije ekvivalentno sa obrascem (6.20), jer ove idealne reakcije očividno moraju zavisiti i od navedenih neholonomnih veza.

6.5. Primeri reakcija

1. Posmatrajmo kretanje čestice niz strmu ravan (sl. 6.6). Pored aktivne sile $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ na česticu deluje još jedna dodata sila, sila reakcije $\mathbf{R}$, koja nastaje kao reakcija na normalnu komponentu sile $\mathbf{F}$ i kojom strma ravan deluje na posmatranu česticu. Ova sila reakcije je *normalna* na strmoj ravni, te je prema definiciji (6.20) idealna reakcija. Ona ne izaziva nikakvo kretanje, a njen zbir sa aktivnom silom daje efektivnu silu $\mathbf{F}_{\text{ef}}$, koja deluje niz strmu ravan.



Sl. 6.6



Sl. 6.7

Ako se ova strma ravan kreće (sl. 6.7), uočimo dva moguća pomeranja niz strmu ravan MM' i MM'' . Neka se za to vreme strma ravan pomeri za AA' , tada odgovarajuća moguća pomeranja u odnosu na sistem koji miruje biće $d\mathbf{r}$ i $d'\mathbf{r}$, prikazana na slici. Njihova razlika predstavlja virtuelno pomeranje $\delta \mathbf{r}$ i ono je paralelno strmoj ravni, te je normalno na sili reakcije. Međutim, moguća pomeranja $d\mathbf{r}$ i $d'\mathbf{r}$ nisu više normalna na sili reakcije, pa je u ovom slučaju rad sile reakcije samo na virtuelnom pomeranju jednak nuli

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} \neq 0. \quad (6.23)$$

2. Kao drugi primer navedimo *silu trenja*, koja predstavlja tipičan primer neidealnih reakcija. Pri kretanju čestice po nekoj rapavoj površi nađeno je da je sila trenja srazmerna

brzini čestice i normalnoj komponenti idealne reakcije, ima pravac brzine a uperena je nasuprot kretanju čestice

$$\mathbf{R}_{tr} = -k |\mathbf{R}_n| \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (6.24)$$

gde je k tzv. *koeficijent trenja*. Oдавde vidimo da ona nije oblika (6.20), a njen rad je očividno različit od nule, kako na mogućem tako i na virtuelnom pomeranju i po pravilu se pretvara u toplotnu energiju.

6.6. Opšti zakoni dinamike

U slučaju prinudnog kretanja možemo proširiti ranije formulisane opšte zakone dinamike, imajući u vidu da prema osnovnoj jednačini dinamike (6.18) za prinudno kretanje ovde imamo efektivne sile $\mathbf{F}_{ef} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$. Stoga svi raniji obrasci ostaju na snazi ako se *pod silama koje figurišu u tim obrascima podrazumevaju efektivne sile*, a iz ovako formulisanih opštih zakona dinamike možemo tada naći i odgovarajuće zakone održanja.

Tako, na osnovu obrasca (5.29) *zakon kinetičke energije* za prinudno kretanje glasi

$$dT = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot d\mathbf{r}_v, \quad (6.25)$$

tj. elementarna promena kinetičke energije sistema jednaka je odgovarajućem elementarnom radu svih aktivnih sila i sila reakcije. Da bi se ova jednačina mogla integraliti, mora ne samo prvi član s desne strane da bude totalni diferencijal već i drugi ili da bude jednak nuli. To će prema obrascu (6.21) sigurno biti ako su reakcije idealne i svi parcijalni izvodi $\partial f_i / \partial t$ jednaki nuli i tada će važiti

$$T + U = E = \text{const} \quad (6.26)$$

Dakle, ako su sve aktivne sile koje dejstvuju na sistem konzervativne ili giroskopske, sile reakcije idealne, a veze stacionarne, ukupna energija sistema ostaje stalna u toku vremena.

Na sličan način, obrazac (5.36) nam daje *zakon impulsa* u obliku

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_{vex} + \sum_{v=1}^N \mathbf{R}_{vex}, \quad (6.27)$$

odakle neposredno vidimo da *ako je rezultanta svih spoljašnjih aktivnih sila i spoljašnjih sila reakcije jednaka nuli, ukupni impuls sistema je stalan u toku vremena*. Najzad, prema obrascu (5.50) nalazimo i *zakon momenta impulsa*

$$\frac{d\mathbf{M}^{(0)}}{dt} = \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_{vex} + \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{R}_{vex}, \quad (6.28)$$

odakle zaključujemo da *ako je rezultanta momenata svih spoljašnjih aktivnih sila i spoljašnjih sila reakcije jednaka nuli, ukupni moment impulsa sistema ostaje stalan u toku vremena*.

Glava III

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA

7. D'ALEMBERT-LAGRANGE-EV PRINCIP

7.1. Opšti principi mehanike

U dosadašnjem izlaganju polazna tačka su nam bili naši postulati o sili, odnosno ekvivalentni Newton-ovi principi, kao i dopunski uslovi o vezama i silama reakcije. Polazeći od njih, formulisali smo *diferencijalne jednačine kretanja*, pomoću kojih se u principu može rešiti svaki mehanički problem, čemu ćemo i posvetiti ovu i sledeću glavu.

Međutim, postoji i drugi put za dobijanje ovih jednačina, koji se sastoji u sledećem. Polazeći od opšte jednačine dinamike za prinudno kretanje $m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{R}_v$ i pretpostavki o prirodi aktivnih sila kao i veza i sila reakcije, može se doći do izvesnih opštih stavova. Oni se obično formulišu u vidu *uslova koji mora zadovoljavati neki određen analitički izraz*. Ako se sad takav opšti stav postulira kao *osnovni polazni stav*, iz njega se mogu dobiti odgovarajuće *diferencijalne jednačine kretanja* za posmatranu, širu ili užu klasu sistema. Tako definisani opšti stavovi nazivaju se *opšti principi mehanike*.

Prema matematičkoj formulaciji, tj. prema prirodi matematičkog izraza pomoću koga se formulišu, ovi principi se mogu podeliti na diferencijalne i integralne. *Diferencijalni principi* se karakterišu time da odgovarajući analitički izraz ima diferencijalni oblik i oni se odnose samo na elementarna pomeranja sistema iz uočenog njegovog položaja u proizvoljnom trenutku. U ovu kategoriju principa spadaju *d'Alembert-Lagrange-ev princip*, *Lagrange-ev princip mogućih pomeranja*, *Gauss-ov princip*, *Hertz-ov princip*, *Appell-ov princip*, *Pfaff-Bilimović-ev princip*.

Drugu grupu principa predstavljaju *integralni principi*, koji se formulišu pomoću izvesnog analitičkog izraza u obliku integrala i oni se odnose na konačna pomeranja sistema iz njegovog početnog položaja u konačnom intervalu vremena. Oni su obično manje opšti od diferencijalnih principa, ali se neki od njih mogu proširiti i van mehanike u tom smislu što se i u tim oblastima može naći neki integralni izraz koji zadovoljava isti uslov. U ovu klasu principa spadaju *Hamilton-ov princip*, *Maupertuis-Lagrange-ev princip*, *Euler-ov princip najmanjeg dejstva*, *Jacobi-ev princip*, *Helmholtz-ov princip*.

Smisao ovih opštih principa leži u sledećem. Oni pre svega izražavaju izvesne opšte prirodne zakone kretanja, koji objedinjuju u sebi razne specijalne slučajeve: slobodno kretanje, kre-

tanje sa potencijalnim silama, kretanje sa holonomnim ili neholonomnim vezama. Sem toga, oni predstavljaju oruđe pomoću koga se mogu dobiti razni oblici diferencijalnih jednačina kretanja, na pr. iz d'Alembert-Lagrange-evog principa mogu se izvesti jednačine kretanja sa linearnim neholonomnim vezama ili opšte jednačine kretanja u tzv. generalisanim koordinatama. Najzad, kao što smo već napomenuli, neki principi imaju mnogo širi značaj nego u mehanici, kao na pr. Hamilton-ov princip, koji se u gore navedenom smislu može generalisati tako da je primenljiv u svim oblastima teorijske fizike, od mehanike kontinuumu do kvantne teorije polja.

U ovom odeljku upoznaćemo najvažniji diferencijalni princip — d'Alembert-Lagrange-ev princip, koji ćemo uzeti za osnovni polazni stav i iz koga ćemo izvesti niz raznih diferencijalnih jednačina kretanja. U sledećoj glavi pozabavićemo se tipičnim predstavnikom integralnih principa — Hamilton-ovim principom, koji leži u osnovi analitičke mehanike.

7.2. Fiktivna sila inercije

Posmatrajmo sad prinudno kretanje neke čestice pod uticajem izvesne aktivne sile $\mathbf{F}$. Osnovna jednačina dinamike za ovu česticu glasi

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (7.1)$$

gde je $\mathbf{R}$ sila reakcije, što možemo napisati i u obliku

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + (-m\mathbf{a}) = 0. \quad (7.2)$$

Ovu jednačinu možemo interpretirati i kao uslov ravnoteže između aktivne sile $\mathbf{F}$, sile reakcije $\mathbf{R}$ i izvesne sile $-m\mathbf{a}$. Za ovu poslednju silu $-m\mathbf{a}$ ne može se pokazati uzrok u nekom telu i stoga se ona naziva *fiktivna sila inercije*, te poslednji rezultat možemo iskazati ovako:

Prinudno kretanje neke čestice pod dejstvom izvesne aktivne sile može se interpretirati i kao mirovanje te čestice pri ravnoteži aktivne sile, sile reakcije i fiktivne sile inercije.

7.3. D'Alembert-Lagrange-ev princip

Da bismo izveli ovaj princip, podimo od osnovne jednačine dinamike (6.18) za prinudno kretanje

$$m_v \mathbf{a}_v = \mathbf{F}_v + \mathbf{R}_v \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (7.3)$$

Ako ove jednačine napišemo u obliku

$$\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{a}_v = -\mathbf{R}_v,$$

pa pomnožimo obe strane skalarno sa $\delta \mathbf{r}_v$ i sumiramo po indeksu v , imaćemo

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{a}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = - \sum_{v=1}^N \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \quad (7.4)$$

Medutim, ako pretpostavimo da su sve reakcije *idealne*, prema njihovoj osnovnoj osobini (6.22) izraz na desnoj strani biće jednak nuli, te dobijamo

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{a}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad (7.5)$$

što možemo formulisati na sledeći način:

Svako stvarno kretanje sistema čestica bez veza ili sa zadržavajućim idealnim vezama, tj. takvim koje proizvode idealne reakcije, vrši se tako da je ukupni rad svih aktivnih sila i fiktivnih sila inercije na ma kakvim virtuelnim pomeranjima čestica sistema uvek jednak nuli.

Ovaj opšti stav, koji smo dobili iz osnovne jednačine dinamike u slučaju idealnih veza, naziva se *d'Alembert-Lagrange-ev princip*. On je formulisan u obliku uslova koji mora da zadovoljava analitički izraz na levoj strani ove jednačine, koji je diferencijalnog oblika i stoga je ovaj princip jedan *opšti diferencijalni princip mehanike*. Iz ovog principa kao postulata kretanja mogu se dobiti razni oblici diferencijalnih jednačina kretanja kao i drugi opšti zakoni mehanike.

7.4. Lagrange-ev princip mogućih pomeranja

U slučaju ravnoteže sistema čestica d'Alembert-Lagrange-ev princip se može uprostiti. Naime, tada je zbog mirovanja sistema

$$\mathbf{v}_v = 0, \quad \mathbf{a}_v = 0 \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (7.6)$$

a-pošto u tom slučaju prema obrascu (6.14) veze ne smeju zavisiti eksplicitno od vremena, na osnovu uslova (6.16) virtuelna pomeranja ekvivalentna su mogućim, tj. $\delta \mathbf{r}_v = d\mathbf{r}_v$. Tada se d'Alembert-Lagrange-ev princip (7.5) svodi na oblik

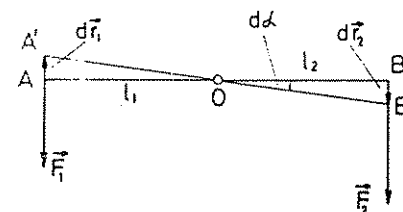
$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r}_v = 0. \quad (7.7)$$

Ako je sistem čestica u ravnoteži, ukupni rad svih aktivnih sila na ma kakvim mogućim pomeranjima sistema jednak je nuli. To je Lagrange-ev princip mogućih pomeranja i on igra veliku ulogu u rešavanju problema statike.

Primer

Kao primer navedimo uslov ravnoteže poluge u obliku šipke (sl. 7.1) pod dejstvom dveju paralelnih sila koje teže da izazovu suprotna obrtanja oko utvrđene tačke. Neka je O utvrđena tačka poluge i neka se poluga iz položaja ravnoteže AB pomeri u vrlo blizak položaj $A'B'$. Tada Lagrange-ev princip mogućih pomeranja (7.7) daje

$$\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = 0 \quad (7.8)$$



Sl. 7.1

Pošto su vektori $\mathbf{F}_1$ i $d\mathbf{r}_1$ suprotnog smera, a vektori $\mathbf{F}_2$ i $d\mathbf{r}_2$ istog, imamo

$$-F_1 dr_1 + F_2 dr_2 = 0,$$

a prema slici je

$$dr_1 = l_1 d\alpha, \quad dr_2 = l_2 d\alpha,$$

pa posle skraćivanja sa $d\alpha$ dobijamo

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \quad (7.9)$$

To je poznati uslov ravnoteže poluge pod navedenim pretpostavkama.

8. JEDNAČINE SLOBODNOG KRETANJA

8.1. Diferencijalne jednačine slobodnog kretanja

Posmatrajmo prvo slobodno kretanje sistema od N čestica, pa primenimo na ovaj slučaj d'Alembert-Lagrange-ev princip (7.5)

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v a_v) \cdot \delta r_v = 0 \quad (8.1)$$

U ovom slučaju sva virtuelna pomeranja δr_v su međusobno nezavisna, pa da bi gornji izraz za ma kakve vrednosti δr_v bio uvek identički jednak nuli, svi koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli

$$F_v - m_v a_v = 0 \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (8.2)$$

Uzimajući u obzir obrasce (3.19) i (4.11), gornje jednačine možemo napisati u obliku

$$m_v \ddot{r}_v = F_v(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (8.3)$$

ili eksplicitno

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= F_1(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) \\ &\vdots \\ m_N \ddot{r}_N &= F_N(r_1, \dots, r_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

To su *diferencijalne jednačine kretanja* posmatranog sistema čestica i one se poklapaju sa jednačinama (4.16), kao što smo mogli i očekivati. One predstavljaju *sistem od N simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, u kojima su nepoznate funkcije svi vektori položaja čestica r_v , a nezavisno promenljiva vreme t .*

Odgovarajuće skalarne jednačine u Descartes-ovim pravouglim koordinatama dobićemo skalarним množenjem jednačina (8.3) sa jediničnim vektorima koordinatnih osa e_1 , e_2 i e_3

$$\left. \begin{aligned} m_v \ddot{x}_v &= F_{vx}(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, t) \\ m_v \ddot{y}_v &= F_{vy}(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, t) \\ m_v \ddot{z}_v &= F_{vz}(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, t) \end{aligned} \right\} (v=1, 2, \dots, N) \quad (8.5)$$

To su diferencijalne jednačine kretanja u skalarnom obliku i one su polazna tačka za rešavanje svih mehaničkih problema.

Slučaj jedne čestice

Za slobodno kretanje jedne čestice diferencijalna jednačina kretanja (8.3) dobija oblik

$$m \ddot{r} = F(r, \dot{r}, t) \quad (8.6)$$

Međutim, u ovom slučaju mogu se osim jednačina (8.5), koristiti i drugi oblici skalarних diferencijalnih jednačina kretanja. Ako jednačinu (8.6) pomnožimo skalarно sa jediničnim

vektorima osa generalisanog koordinatnog sistema e_{q_i} ($i=1, 2, 3$), na osnovu obrasca (3.44) imamo

$$m \frac{1}{h_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \right) = F \cos(F, e_{q_i}),$$

a uvodeći kinetičku energiju posmatrane čestice

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = m T^*, \quad (8.7)$$

gornje jednačine dobijaju oblik

$$\frac{1}{h_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = F \cos(F, e_{q_i}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (8.8)$$

To su *diferencijalne jednačine kretanja čestice u generalisanim koordinatama.*

Ako, pak, jednačinu (8.6) pomnožimo skalarно sa jediničnim vektorima prirodnog trijedra $\vec{e}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ krive koja predstavlja putanju čestice, prema obrascu (3.23) dobićemo

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(F, \vec{e}_0) \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(F, \vec{n}_0) \\ 0 &= F \cos(F, \vec{b}_0) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

To su tzv. *prirodne diferencijalne jednačine kretanja čestice* i one katkad na jednostavniji način omogućuju rešavanje problema.

8.2. Nalaženje konačnih jednačina kretanja

Pokažimo sad kako se rešavanjem diferencijalnih jednačina kretanja sistema čestica mogu naći njeni integrali, koji predstavljaju konačne jednačine kretanja. Podimo od diferencijalnih jednačina kretanja u obliku (8.5) i pretpostavimo da znamo sve sile F_v koje dejstvuju na čestice sistema i početne položaje i brzine svih čestica r_{v0} i v_{v0} , pri čemu se vrednosti ovih veličina nazivaju *početni uslovi*. Osnovni problem dinamike sastoji se tada u sledećem: *ako znamo sve sile koje dejstvuju na sistem i početne uslove sistema, odrediti njegovo dalje kretanje.*

Pošto smo pretpostavili da znamo sve sile, desne strane gornjih jednačina predstavljaju poznate funkcije navedenih promenljivih. Tada ove jednačine predstavljaju, kao što smo već videli, *sistem od $3N$ simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, u kojima su nepoznate funkcije sve koordinate čestica x_v , y_v i z_v , a nezavisno promenljiva je vreme t .* Pošto integral diferencijalne jednačine drugog reda sadrži dve integracione konstante, integrali gornjeg sistema od $3N$ simultanih diferencijalnih jednačina drugog reda sadržiće $6N$ integracionih konstanti

$$\left. \begin{aligned} x_v &= f_v(t, C_1, \dots, C_{6N}), & y_v &= \varphi_v(t, C_1, \dots, C_{6N}) \\ z_v &= \psi_v(t, C_1, \dots, C_{6N}) \end{aligned} \right\} (v=1, 2, \dots, N) \quad (8.10)$$

Diferenciranjem ovih integrala po vremenu dobićemo

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_v &= \dot{f}_v(t, C_1, \dots, C_{6N}), & \dot{y}_v &= \dot{\varphi}_v(t, C_1, \dots, C_{6N}), \\ \dot{z}_v &= \dot{\psi}_v(t, C_1, \dots, C_{6N}) \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

pa u gornje i ove jednačine uvrstimo početne uslove. Ako indeksom nula označimo vrednosti početnih koordinata i komponenata brzina za neki trenutak $t=t_0$, koje su po našoj pretpostavci unapred date, uvrštavanjem ovih početnih uslova u jednačine (3.10) i (8.11) dobijamo

$$\left. \begin{aligned} x_{v0} &= f_v(t_0, C_1, \dots, C_{6N}), & y_{v0} &= \varphi_v(t_0, C_1, \dots, C_{6N}) \\ z_{v0} &= \psi_v(t_0, C_1, \dots, C_{6N}), & \dot{x}_{v0} &= \dot{f}_v(t_0, C_1, \dots, C_{6N}) \\ \dot{y}_{v0} &= \dot{\varphi}_v(t_0, C_1, \dots, C_{6N}), & \dot{z}_{v0} &= \dot{\psi}_v(t_0, C_1, \dots, C_{6N}) \end{aligned} \right\} (v=1, 2, \dots, N) \quad (8.12)$$

U ovim jednačinama nepoznate su samo integracione konstante $C_1, \dots, C_6x$. Pošto ovih jednačina ima upravo $6N$, tj. toliko koliko i integracionih konstanti, algebarskim rešavanjem ovog sistema jednačina možemo odrediti sve ove integracione konstante

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_1(t_0, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}, \dot{x}_{j0}, \dot{y}_{j0}, \dot{z}_{j0}) \\ &\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ C_{6N} &= C_{6N}(t_0, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}, \dot{x}_{j0}, \dot{y}_{j0}, \dot{z}_{j0}) \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Uvrštavanjem ovih vrednosti u jednačine (8.10), dobićemo integrale diferencijalnih jednačina kretanja u obliku

$$x_v = x_v(t), \quad y_v = y_v(t), \quad z_v = z_v(t) \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (8.14)$$

Ove jednačine predstavljaju *konačne jednačine kretanja* posmatranog sistema u Descartes-ovim koordinatama, čime je problem rešen.

8.3. Mehanički princip kauzalnosti

Na osnovu izloženoga vidimo da ako znamo sve sile koje dejstvuju na čestice sistema i početne uslove, tj. početne položaje i brzine svih čestica, koji određuju kinematičko stanje sistema u tom trenutku, možemo naći konačne jednačine kretanja sistema. U matematičkoj analizi se pokazuje da ukoliko se dati sistem običnih diferencijalnih jednačina može eksplicitno rešiti po izvodima najvišeg reda u obliku jednoznačnih funkcija, onda su i rešenja tog sistema pod dosta širokim opštim uslovima *jednoznačna* za svaki skup početnih uslova za koji je ovaj sistem definisan. Pošto je sistem diferencijalnih jednačina kretanja (8.5) već eksplicitno i jednoznačno rešen po izvodima najvišeg reda, njegova rešenja će biti jednoznačna pri ma kakvim početnim uslovima. Dakle, diferencijalne jednačine kretanja potpuno i jednoznačno određuju položaje i brzine svih čestica posmatranog sistema u ma kom drugom, ranijem ili docnijem trenutku pod uslovom da i u celom posmatranom intervalu vremena deluju iste sile. Pri tome u klasičnoj mehanici prečutno pretpostavljamo da u idealiziranom eksperimentu uvek možemo istovremeno precizno da odredimo položaj i brzinu svake čestice, što prestaje da važi u mikrosvetu. Stoga možemo reći:

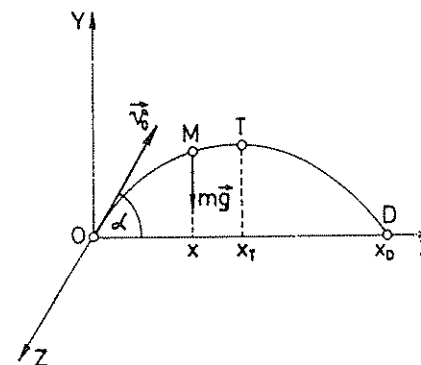
Sile koje djeluju na sistem i kinematičko stanje sistema u ma kom trenutku potpuno jednoznačno određuju kretanje ovog sistema kako u prošlosti tako i u budućnosti.

Ovaj stav poznat je pod imenom *mehanički princip kauzalnosti* i na njemu se zasniva tzv. *mehanički determinizam*. Takvo shvatanje kauzalnosti, koje se zasniva na uzročnoj povezanosti svih pojava u prirodi na osnovu zakona klasične mehanike, omogućilo je na pr. ne samo tačno određivanje položaja svakog tela Sunčevog sistema u bilo kom trenutku već i pronalazak novih planeta i drugih članova Sunčevog sistema.

8.4. Primeri

1. Kao prvi primer slobodnog kretanja čestice uzmimo *kos hitac* u polju Zemljine teže u bezvazdušnom prostoru (sl. 8.1). Neka je čestica bačena pod uglom α prema horizontali sa početnom brzinom v_0 . Ravan kretanja uzmimo za XOY ravan, pravac vertikale za Y-osu, a početni položaj za koordinatni početak. Tada diferencijalne jednačine kretanja posmatrane čestice glase

$$m\ddot{x}=0, \quad m\ddot{y}=-mg, \quad m\ddot{z}=0 \quad (8.15)$$



S1. 8.1

Dvostrukom integracijom ovih jednačina dobijamo

$$x = C_1 t + C_2, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4, \quad z = C_5 t + C_6, \quad (8.16)$$

gde su $C_1, \dots, C_6$ integracione konstante. Iz ovih i njihovih izvodnih jednačina

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_3, \quad \dot{z} = C_5$$

na osnovu početnih uslova za $t=0$ imamo

$$x_0=0=C_2, \quad y_0=0=C_4, \quad z_0=0=C_6 \quad (8.17)$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha = C_1, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha = C_3, \quad \dot{z}_0 = 0 = C_5.$$

Ove jednačine određuju sve integracione konstante, a stavljanjem njihovih vrednosti u jednačine (8.16) dobijamo

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t, \quad z = 0 \quad (8.18)$$

To su konačne jednačine kretanja posmatrane čestice. Ako eliminišemo vreme t , stavljajući $t = x/v_0 \cos \alpha$ u drugu jednačinu, dobićemo jednačinu putanje

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

 τ_j

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2, \quad z = 0 \quad (8.19)$$

Odavde vidimo da je putanja parabola sa osom paralelnom Y-osi. Njeno teme T određeno je uslovom za maksimum funkcije

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x = 0$$

odakle dobijamo

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

tj.

$$x_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \quad (8.20)$$

a iz jednačine (8.19) nalazimo odgovarajuću, najveću visinu

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{v_0^4}{g^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

odnosno

$$y_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (8.21)$$

Domet D možemo naći stavljajući u jednačini (8.19) $y=0$

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0;$$

prvo rešenje $x=0$ odgovara tački O, a drugo predstavlja domet

$$x = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

tj.

$$x_D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = 2x_T. \quad (8.22)$$

Vreme trajanja kosog hitca do dometa D prema prvoj od jednačina (8.18) i obrascu (8.22) ima vrednost

$$\tau = \frac{x_D}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \quad (8.23)$$

2. Posmatrajmo sad *prostorni oscilator*, tj. kretanje čestice pod dejstvom privlačne sile srazmerne rastojanju od neke stalne tačke O (sl. 8.2)

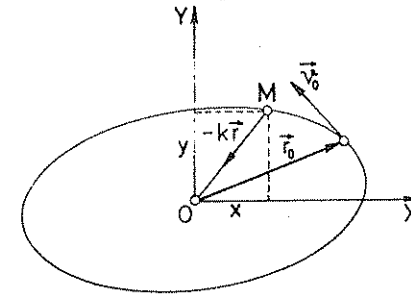
$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r} \quad (8.24)$$

Neka se ova čestica u trenutku $t=0$ nalazila u položaju $\mathbf{r}_0$ i imala brzinu $\mathbf{v}_0$. Pošto je u početnom trenutku ona bila u ravni vektora $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}_0$, a njeno ubrzanje u tom trenutku prema gornjem obrascu bilo je kolinearno sa $\mathbf{r}_0$, čestica će se u beskonačno bliskom trenutku takođe nalaziti u toj ravni. Ponavljajući ovo rezonovanje za svaki sledeći beskonačno mali interval vremena, dolazimo do zaključka da će se kretanje posmatrane čestice vršiti stalno u ravni $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Uzmemo li tu ravan za XOY ravan, a centar privlačenja O za koordinatni početak, diferencijalne jednačine kretanja glase

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -ky,$$

koje možemo napisati i u pogodnijem obliku

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (8.25)$$



Sl. 8.2

gde smo uveli oznaku

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (8.26)$$

Opšti integral prve linearne diferencijalne jednačine je

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

gde su λ_1 i λ_2 koreni karakteristične jednačine

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

tj. $\lambda_1 = \omega i$, $\lambda_2 = -\omega i$, čime dobijamo

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \quad (8.27)$$

Na osnovu Euler-ovog obrasca $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ovaj integral možemo izraziti i pomoću trigonometrijskih funkcija

$$x = (A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_1 - A_2) \sin \omega t,$$

a na sličan način možemo postupiti i sa integralom druge jednačine (8.25). Oba ova integrala napišimo kraće u obliku

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (8.28)$$

$$y = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t,$$

gde su $C_1, \dots, C_4$ nove integracione konstante. Ako ove jednačine diferenciramo po vremenu

$$\dot{x} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t,$$

$$\dot{y} = -\omega C_3 \sin \omega t + \omega C_4 \cos \omega t$$

i u njih uvrstimo početne uslove za $t=0$, imaćemo

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_3,$$

$$\dot{x}_0 = \omega C_2, \quad \dot{y}_0 = \omega C_4$$

Uvrstimo li ove vrednosti integracionih konstanti u jednačine (8.28), dobićemo konačne jednačine kretanja posmatranog prostornog oscilatora

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (8.29)$$

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$$

Ovim jednačinama možemo dati i drugi, pogodniji oblik, stavljajući

$$\begin{aligned} x_0 &= A_1 \cos \varphi_1, & \frac{\dot{x}_0}{\omega} &= -A_1 \sin \varphi_1, \\ y_0 &= A_2 \cos \varphi_2, & \frac{\dot{y}_0}{\omega} &= -A_2 \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (8.30)$$

čime smo uveli nove integracione konstante A_1 , φ_1 , A_2 i φ_2 , koje su funkcije početnih uslova, na pr.

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Tada jednačine (8.29) na osnovu adicionih teorema o trigonometrijskim funkcijama prelaze u

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (8.31)$$

Oдавде vidimo da projekcije posmatrane čestice na X i Y-osu vrše *harmonijske oscilacije* između $-A_1$ i $+A_1$, odnosno $-A_2$ i $+A_2$ sa istom periodom

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.32)$$

Veličine A_1 i A_2 nazivaju se amplitude, ω kružna frekvencija, a φ_1 i φ_2 faze. Pri tome treba istaći da je kružna frekvencija određena samom silom, a amplituda i faze još i početnim uslovima.

Jednačinu putanje možemo naći eliminacijom vremena iz jednačina (8.31). U tom cilju uvedimo razliku faza $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ i drugu od njih napišimo u obliku

$$\begin{aligned} y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \delta) = A_2 [\cos(\omega t + \varphi_1) \cos \delta - \sin(\omega t + \varphi_1) \sin \delta] = \\ &= A_2 \left[\frac{x}{A_1} \cos \delta - \sin(\omega t + \varphi_1) \sin \delta \right], \end{aligned}$$

a otuda

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \frac{1}{\sin \delta} \left[\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \delta \right] = -\sin(\omega t + \varphi_1) \quad (8.33)$$

Kvadriranjem i sabiranjem ovih jednačina nalazimo

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \delta} \left[\frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \delta + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \delta \right] = 1,$$

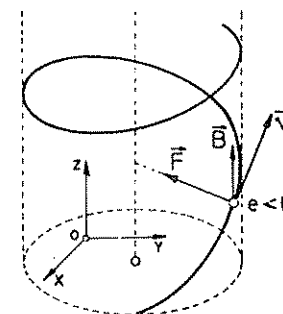
a posle sređivanja leve strane i množenja sa $\sin^2 \delta$ konačno dobijamo

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (8.34)$$

Dakle, pod dejstvom privlačne sile (8.24) putanja prostornog oscilatora je *elipsa u ravni* vektora $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}_0$ sa centrom u centru privlačenja O. Poluose ove ellipse zavise od početnih uslova $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}_0$, a takođe i njihova orijentacija u toj ravni, određena razlikom faza δ .

3. Proučimo još kretanje naelektrisanе čestice u magnetnom polju (sl. 8.3) pod uticajem Lorentzove sile

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8.35)$$



Sl. 8.3

Pretpostavimo da je magnetno polje homogeno i konstantno, a pravac njegovih linija sila uzmimo za Z-osu i neka posmatrana čestica uleće u magnetno polje sa početnom brzinom $\mathbf{v}_0$. Pošto Lorentz-ova sila u ovom sistemu ima vid

$$\mathbf{F} = e \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = eB \dot{y} \mathbf{e}_1 - eB \dot{x} \mathbf{e}_2,$$

diferencijalne jednačine kretanja posmatrane čestice biće

$$m\ddot{x} = eB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -eB\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0,$$

što možemo napisati i u obliku

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad (8.36)$$

gde se uvedena veličina

$$\omega = \frac{eB}{m} \quad (8.37)$$

naziva ciklotronska frekvencija. Integraleći jedanput ove jednačine

$$\dot{x} = \omega y + C_1, \quad \dot{y} = -\omega x + C_2, \quad \dot{z} = C_3$$

i uzimajući u obzir početne uslove, dobijamo

$$\dot{x} = \omega(y - y_0) + \dot{x}_0, \quad \dot{y} = -\omega(x - x_0) + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \quad (8.38)$$

Da bismo razdvojili promenljive, stavimo oдавde izraz za $\dot{y}$ u prvu jednačinu (8.36)

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} = \omega [-\omega(x - x_0) + \dot{y}_0],$$

tj.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_0 + \omega \dot{y}_0 \quad (8.39)$$

Opšti integral ove nehomogene linearne diferencijalne jednačine jednak je zbiru opšteg integrala odgovarajuće homogene jednačine, koji možemo napisati u obliku $A \sin(\omega t + \alpha)$, i partikularnog integrala gornje nehomogene jednačine

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \quad (8.40)$$

Pri tome je lako proveriti da $x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}$ zaista predstavlja jedan partikularni integral, a ovako uvedene integracione konstante A i α određene su početnim uslovima. Stavljajući odavde $\dot{x}$ u prvu jednačinu (8.38)

$$\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) = \omega(y - y_0) + \dot{x}_0,$$

možemo naći i funkciju $y(t)$

$$y = A \cos(\omega t + \alpha) + y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad (8.41)$$

Najzad, iz poslednje jednačine (8.38) neposrednom integracijom dobijamo

$$z = \dot{z}_0 t + z_0 \quad (8.42)$$

Jednačine (8.40) — (8.42) predstavljaju konačne jednačine kretanja posmatrane naelektrisanе čestice. Ako iz prvih dveju jednačina eliminišemo vreme, dobićemo jednačinu projekcije putanje na XOY ravan

$$\left[x - \left(x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \right) \right]^2 + \left[y - \left(y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \right]^2 = A^2 \quad (8.43)$$

Odavde vidimo da je putanja naelektrisanе čestice u homogenom i konstantnom magnetnom polju *zavojnica koja se obavlja oko pravca magnetnih linija sila*. Ona nastaje kretanjem jedne tačke po krugu (8.43), čija se ravan prema jednačini (8.42) pomera paralelno sama sebi brzinom $\dot{z}_0$. Poluprečnik ovog kruga možemo naći na osnovu obrasca (8.40), koji određuje $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ i za $t=0$ daje

$$x_0 = A \sin \alpha + x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \quad \dot{x}_0 = \omega A \cos \alpha,$$

odakle sledi

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} = \frac{m}{eB} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \quad (8.44)$$

On, dakle, zavisi od projekcije početne brzine čestice na XOY ravan, normalnu na vektoru magnetnog polja B , kao i od ciklotronske frekvencije ω , tj. od specifičnog naelektrisanja e/m i jačine magnetnog polja B . Centar ovog kruga sa koordinatama

$$x_c = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \quad y_c = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad (8.45)$$

određen je projekcijama početnog vektora položaja i brzine čestice na XOY ravan, a takođe i ciklotronskom frekvencijom ω .

9. JEDNAČINE PRINUDNOG KRETANJA

9.1. Metod množitelja veza

Posmatrajmo sad sistem od N čestica koji se kreće prinudno i primenimo na ovaj slučaj d'Alembert-Lagrange-ev princip (7.5)

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{a}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (9.1)$$

Pretpostavimo da ima k holonomnih veza oblika (6.4)

$$f_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k), \quad (9.2)$$

tada sva virtuelna pomeranja $\delta \mathbf{r}_v$ nisu više proizvoljna, jer moraju zadovoljavati uslove (6.15)

$$\sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0, \quad (9.3)$$

kojih ima toliko koliko i jednačina veza. Stoga od $3N$ komponenta virtuelnih pomeranja δx_v , δy_v i δz_v ima samo $3N - k$ nezavisnih, a ostale su zavisne od njih. Tada u d'Alembert-Lagrange-evom principu (9.1) ne možemo više izjednačiti sve koeficijente uz $\delta \mathbf{r}_v$ sa nulom, jer to je moguće samo u slučaju kad su sve komponente virtuelnih pomeranja međusobno nezavisne. Da bismo se oslobodili zavisnih komponenta, množimo svaki uslov (9.3) sa jednim neodređenim množiteljem i linearne kombinacije tako dobijenih jednačina sabiramo sa jednačinom (9.1). Ovi neodređeni množitelji nazivaju se *množitelji veza* i njih ima toliko koliko i jednačina veza, odnosno toliko koliko ima zavisnih komponenta. Ove množitelje veza biramo zatim tako da svi koeficijenti uz zavisne komponente budu jednaki nuli, čime se oslobađamo zavisnih komponenta i tako ovaj problem svodimo na prethodni.

Ilustrirajmo ovaj metod na jednom uprošćenom slučaju, kad imamo jednačinu oblika

$$P(x, y, z) \delta x + Q(x, y, z) \delta y + R(x, y, z) \delta z = 0 \quad (9.4)$$

Ako su δx , δy i δz međusobno nezavisni, da bi gornji izraz bio identički jednak nuli za kakve vrednosti δx , δy i δz , svi koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli

$$P=0, \quad Q=0, \quad R=0.$$

Međutim, ako su δx , δy i δz vezani jednim uslovom oblika

$$A(x, y, z) \delta x + B(x, y, z) \delta y + C(x, y, z) \delta z = 0, \quad (9.5)$$

ovaj zaključak više ne važi. Smatramo da su δx i δy nezavisno promenljive, pa rešimo poslednju relaciju po δz

$$\delta z = -\frac{A}{C} \delta x - \frac{B}{C} \delta y.$$

Ako ovaj izraz uvrstimo u jednačinu (9.4), dobijamo

$$P \delta x + Q \delta y + R \left(-\frac{A}{C} \delta x - \frac{B}{C} \delta y \right) = 0$$

odnosno

$$\left(P - \frac{RA}{C} \right) \delta x + \left(Q - \frac{RB}{C} \right) \delta y = 0,$$

a zbog nezavisnosti δx i δy odavde sledi

$$P - \frac{RA}{C} = 0, \quad Q - \frac{RB}{C} = 0 \quad (9.6)$$

Do istog rezultata se može doći i na taj način što se uslov (9.5) pomnoži neodređenim množiteljem λ

$$\lambda A \delta x + \lambda B \delta y + \lambda C \delta z = 0$$

i sabere tako dobijena jednačina sa jednačinom (9.4)

$$(P + \lambda A) \delta x + (Q + \lambda B) \delta y + (R + \lambda C) \delta z = 0 \quad (9.7)$$

Izaberimo sad neodređeni množitelj λ tako da koeficijent uz zavisno promenljivu δz bude jednak nuli

$$\lambda = -\frac{R}{C} \quad (9.8)$$

Tada se jednačina (9.7) svodi na

$$(P + \lambda A) \delta x + (Q + \lambda B) \delta y = 0,$$

a da bi ovaj izraz bio identički jednak nuli za ma kakve vrednosti nezavisno promenljivih δx i δy , koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli

$$P + \lambda A = 0, \quad Q + \lambda B = 0$$

Ove jednačine se na osnovu obrasca (9.8) mogu napisati i u obliku

$$P - \frac{R}{C} A = 0, \quad Q - \frac{R}{C} B = 0,$$

što je zaista ekvivalentno sa (9.6). Na taj način smo dobili da su svi koeficijenti u jednačini (9.7) jednaki nuli, međutim dok je treći koeficijent nula zato što smo tako izabrali množitelj λ , prva dva su jednaka nuli zato što su posle takvog izbora λ preostale samo nezavisno promenljive.

9.2. Jednačine sa množiteljima veza

Primenimo sad navedeni metod na naš slučaj, kad su virtuelna pomeranja $\delta \mathbf{r}_v$ ograničena uslovima (9.3). Ako svaki uslov (9.3) pomnožimo neodređenim množiteljem λ_j i saberemo tako dobijene jednačine, imamo

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{v=1}^N \text{grad}_v f_j \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (9.9)$$

Promenimo ovde red sumiranja i dodajmo ovu jednačinu jednačini (9.1)

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{a}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0,$$

što možemo napisati i u obliku

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v + \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j - m_v \mathbf{a}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (9.10)$$

Ako skalarne proizvode napišemo eksplicitno, označavajući indeksom α odgovarajuće komponente vektora, imaćemo

$$\sum_{v=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 (F_{v\alpha} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{v\alpha}} - m_v a_{v\alpha}) \delta x_{v\alpha} = 0, \quad (9.11)$$

pa rastavimo ovu sumu na zbir sume od prvih $3N - k$ članova sa nezavisnim komponentama $\delta x_{v\alpha}$, i sume od zadnjih k članova sa zavisnim komponentama $\delta x_{v\alpha}$. Izaberimo sad k neodređenih množitelja λ_j tako da svi koeficijenti uz k zavisnih komponenta virtuelnih pomeranja budu jednaki nuli, čime otpadaju zadnjih k članova na levoj strani gornje jednačine. Tada preostaju samo članovi sa nezavisnim komponentama virtuelnih pomeranja, a da bi taj preostali izraz za ma kakve vrednosti ovih nezavisnih komponenta $\delta x_{v\alpha}$ bio identički jednak nuli, svi koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli. Tako dolazimo do zaključka da su pri takvom izboru množitelja λ_j svi koeficijenti u jednačini (9.11) jednaki nuli, te su i svi koeficijenti u jednačini (9.10) takođe jednaki nuli

$$\mathbf{F}_v + \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j - m_v \mathbf{a}_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (9.12)$$

Ove jednačine možemo napisati i u obliku

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{F}_v + \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (9.13)$$

pri čemu pod $\mathbf{F}_v$ treba podrazumevati određeni vektor interakcije u smislu formule (4.4). One se nazivaju jednačine sa množiteljima veza ili Lagrange-ove jednačine prve vrste, a odgovarajuće skalarne jednačine u uobičajenim oznakama glase

$$\left. \begin{aligned} m_v \ddot{x}_v &= F_{vx} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_v} \\ m_v \ddot{y}_v &= F_{vy} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_v} \\ m_v \ddot{z}_v &= F_{vz} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_v} \end{aligned} \right\} \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (9.14)$$

To su diferencijalne jednačine prinudnog kretanja sistema čestica sa idealnim i holonomnim vezama.

Analiza jednačina

Ispitajmo sad detaljnije ove jednačine sa množiteljima veza. Ako poredimo jednačine (9.13) sa osnovnom jednačinom dinamike za prinudno kretanje (6.18), vidimo da je

$$\mathbf{R}_v = \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_v f_j, \quad (9.15)$$

čime smo, polazeći od d'Alembert-Lagrange-evog principa, dobili oblik idealnih reakcija u slučaju idealnih holonomnih i zadržavajućih veza. Ovaj obrazac, prema kome se idealna reakcija sastoji od komponentata duž parcijalnih gradijenata $\text{grad}_v f_j$, poklapa se sa našom definicijom idealnih reakcija (6.20), kao što smo mogli i očekivati.

U ovom slučaju kretanje sistema čestica je određeno skupom jednačina (9.14) i (9.2). Pri tome moraju biti unapred date sve aktivne sile $\mathbf{F}_v$, jednačine veza (9.2) i početni uslovi. Tada

navedeni sistem jednačina predstavlja sistem od $3N+k$ jednačina, u kome su nepoznate sve koordinate čestica x_i, y_i, z_i i svi množitelji veza λ_i , a nezavisno promenljiva je vreme t . Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijaju se sve koordinate čestica kao funkcije vremena i svi množitelji veza. Time je problem rešen, jer smo tako dobili konačne jednačine kretanja sistema i sile reakcije određene obrascem (9.15).

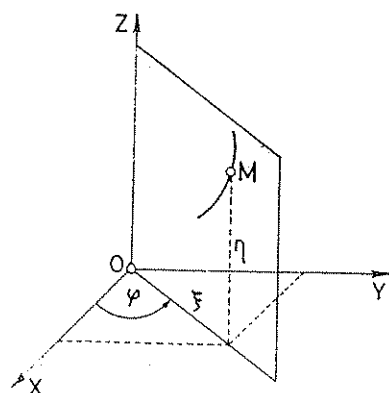
Ovaj metod međutim ima i neke nezgodne osobine, koje znatno ograničavaju njegovu primenu. Naime, jednačine (9.13) možemo projektovati samo na ose nekog određenog koordinatnog sistema na pr. Descartes-ovog ili bilo kog drugog, sve koordinate pri tome nisu međusobno nezavisne i unapred su nepoznate sile reakcije. Zbog druge i treće osobine imamo vrlo veliki broj jednačina, što znatno otežava rešavanje problema.

Napomenimo da se ovim metodom iz d'Alembert-Lagrange-evog principa mogu dobiti i diferencijalne jednačine kretanja u slučaju *linearnih* neholonomnih veza, čime se dobija jedan dopunski član na desnoj strani jednačina (9.13).

9.3. Primer

Posmatrajmo kretanje teške čestice u vertikalnoj ravni koja se ravnomerno obrće oko stalne vertikalne ose (sl. 9.1). Ako ovu osu uzmemo za Z-osu, ugao obrtanja φ između te ravni i XOZ ravni biće srazmeran vremenu

$$\varphi = \omega t \quad (9.16)$$



Sl. 9.1

Jednačina veze u ovom slučaju je jednačina ove ravni

$$y = \tan \varphi \cdot x,$$

tj.

$$f(x, y, z, t) = x \sin \omega t - y \cos \omega t = 0 \quad (9.17)$$

Diferencijalne jednačine kretanja sa množiteljima veza (9.14)

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

ovde imaju oblik

$$m\ddot{x} = \lambda \sin \omega t, \quad m\ddot{y} = -\lambda \cos \omega t, \quad m\ddot{z} = -mg \quad (9.18)$$

i ove jednačine zajedno sa jednačinom veze određuju nepoznate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ i λ .

Da bismo odredili množitelj λ , diferencirajmo dva puta jednačinu veze (9.17) po vremenu

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\dot{x} \sin \omega t + x \omega \cos \omega t - \dot{y} \cos \omega t + y \omega \sin \omega t) = 0,$$

što posle sređivanja daje

$$\ddot{x} \sin \omega t - \ddot{y} \cos \omega t + 2\omega (\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t) - \omega^2 (x \sin \omega t - y \cos \omega t) = 0. \quad (9.19)$$

Na osnovu same jednačine veze zadnji član otpada, pa iz sistema jednačina (9.18) i (9.19) eliminacijom $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ i $\ddot{z}$ dobijamo

$$\frac{\lambda}{m} \sin \omega t \cdot \sin \omega t + \frac{\lambda}{m} \cos \omega t \cdot \cos \omega t + 2\omega (\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t) = 0,$$

a otuda

$$\lambda = -2m\omega (\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t) \quad (9.20)$$

Ovaj izraz, kao i dalje rešavanje problema, možemo uprostiti ako za određivanje položaja tačke M u pokretnoj ravni uzmemo nezavisne koordinate ξ i η , koje su sa x , y i z povezane relacijama

$$x = \xi \cos \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t, \quad z = \eta \quad (9.21)$$

Odavde sledi

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos \omega t - \xi \omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = \dot{\xi} \sin \omega t + \xi \omega \cos \omega t, \quad \dot{z} = \dot{\eta},$$

pa množitelj λ dobija oblik

$$\lambda = -2m\omega [\cos \omega t (\dot{\xi} \cos \omega t - \xi \omega \sin \omega t) + \sin \omega t (\dot{\xi} \sin \omega t + \xi \omega \cos \omega t)],$$

tj.

$$\lambda = -2m\omega \dot{\xi} \quad (9.22)$$

Pošto je, prema obrascima (9.21)

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} \cos \omega t - 2\dot{\xi} \omega \sin \omega t - \xi \omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y} = \ddot{\xi} \sin \omega t + 2\dot{\xi} \omega \cos \omega t - \xi \omega^2 \sin \omega t, \quad \ddot{z} = \ddot{\eta},$$

same diferencijalne jednačine kretanja (9.18) u novim koordinatama imaju oblik

$$m(\ddot{\xi} \cos \omega t - 2\dot{\xi} \omega \sin \omega t - \xi \omega^2 \cos \omega t) = -2m\omega \dot{\xi} \sin \omega t$$

$$m(\ddot{\xi} \sin \omega t + 2\dot{\xi} \omega \cos \omega t - \xi \omega^2 \sin \omega t) = 2m\omega \dot{\xi} \cos \omega t$$

$$m\ddot{\eta} = -mg,$$

tj., posle skraćivanja sa $\cos \omega t$ odnosno $\sin \omega t$

$$\ddot{\xi} - \omega^2 \xi = 0, \quad \ddot{\eta} = -g \quad (9.23)$$

Pošto su koreni karakteristične jednačine prve diferencijalne jednačine $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$, neposredno dobijamo i rešenja ovih jednačina

$$\xi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \quad \eta = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4 \quad (9.24)$$

Integracione konstante $C_1, \dots, C_4$ određene su početnim uslovima i ako je posmatrana čestica u trenutku $t=0$ bila u položaju (ξ_0, η_0) sa početnim komponentama brzine $(\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0)$, imaćemo

$$\begin{aligned}\xi_0 &= C_1 + C_2, & \eta_0 &= C_4 \\ \dot{\xi}_0 &= \omega C_1 - \omega C_2, & \dot{\eta}_0 &= C_3,\end{aligned}$$

pa ako odavde odredimo vrednosti ovih konstanti, konačne jednačine kretanja (9.24) biće

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\xi_0 + \frac{\dot{\xi}_0}{\omega} \right) e^{\omega t} + \frac{1}{2} \left(\xi_0 - \frac{\dot{\xi}_0}{\omega} \right) e^{-\omega t}, \quad \eta = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{\eta}_0 t + \eta_0 \quad (9.25)$$

Ukoliko još želimo da se vratimo na početne koordinate x, y i z , treba samo ove izraze staviti u transformacione obrasce (9.21).

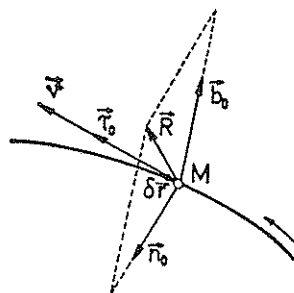
9.4. Prirodne jednačine kretanja

U slučaju prinudnog kretanja jedne čestice sa idealnim vezama možemo koristiti i skalarne diferencijalne jednačine kretanja u *prirodnom trijedru osa*, što često znatno uprošćava rešavanje problema. Neka se posmatrana čestica kreće pod uticajem aktivne sile $\mathbf{F}$ i idealne reakcije $\mathbf{R}$, tada je odgovarajuća osnovna jednačina dinamike

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (9.26)$$

gde je $\mathbf{R}$ oblika (6.20). Ako se čestica kreće *po krivoj liniji* (sl. 9.2), idealna reakcija prema obrascu (6.22) mora biti normalna na virtuelnom pomeranju, koje uvek ima pravac tangente, te ona mora ležati u normalnoj ravni. Stoga, ako jednačinu (9.26) na osnovu obrasca (3.23) napišemo u obliku

$$m \left(\dot{v} \tau_0 + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}_0 \right) = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$



Sl. 9.2

pa je skalarno pomnožimo sa jediničnim vektorima prirodnog trijedra $\tau_0, \mathbf{n}_0$ i $\mathbf{b}_0$, dobićemo

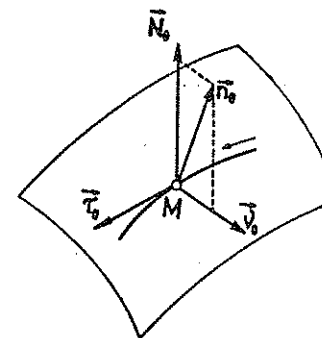
$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(\mathbf{F}, \tau_0) \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{n}_0) + R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}_0) \\ 0 &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{b}_0) + R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{b}_0) \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

Ove jednačine, tzv. *prirodne jednačine kretanja čestice po krivoj liniji*, predstavljaju generalizaciju jednačina (8.9) za slobodno kretanje. Imajući u vidu da je $v = \dot{s}$, prva od njih može se smatrati kao diferencijalna jednačina za određivanje predenog puta s kao funkcije vremena, dok druge dve jednačine određuju komponente idealne reakcije u pravcima glavne normale i binormale.

Ako se čestica kreće po *površ* (sl. 9.3), vektor krivine $\mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}_0$ u tački M možemo razložiti u dve komponente: duž normale $\mathbf{N}_0$ na površ i duž pravca $\mathbf{v}_0$ u tangentnoj ravni. Prva komponenta, koju označimo sa $\mathbf{K}_N = \frac{1}{\rho_N} \mathbf{N}_0$, definiše tzv. *normalnu krivinu* $\frac{1}{\rho_N}$,

a druga, koju obeležimo sa $\mathbf{K}_g = \frac{1}{\rho_g} \mathbf{v}_0$, određuje tzv. *geodezijsku krivinu* $\frac{1}{\rho_g}$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}_0 = \frac{1}{\rho_N} \mathbf{N}_0 + \frac{1}{\rho_g} \mathbf{v}_0 \quad (9.28)$$



Sl. 9.3

Idealna reakcija i ovde mora biti normalna na virtuelnom pomeranju, te leži u pravcu normale $\mathbf{N}_0$ na površ u tački M . Pošto se ubrzanje čestice (3.23) pomoću uvedenih veličina može napisati u obliku

$$\mathbf{a} = \dot{v} \tau_0 + \frac{v^2}{\rho_N} \mathbf{N}_0 + \frac{v^2}{\rho_g} \mathbf{v}_0,$$

skalarnim množenjem jednačine (9.26) sa jediničnim vektorima $\tau_0, \mathbf{v}_0$ i $\mathbf{N}_0$ dobijamo

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(\mathbf{F}, \tau_0) \\ m \frac{v^2}{\rho_g} &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{v}_0) \\ m \frac{v^2}{\rho_N} &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{N}_0) + R \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

To su *prirodne jednačine kretanja čestice po datoj površi*. Prva i druga jednačina određuju kretanje posmatrane čestice, a treća vrednost idealne reakcije. Ako je aktivna sila $\mathbf{F}$ jednaka nuli, za takvo kretanje se kaže da se vrši *po inerciji* i tada se prirodne jednačine svode na

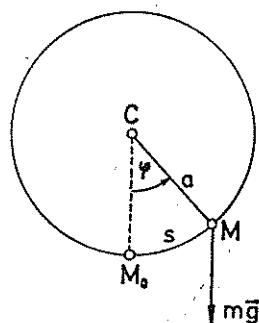
$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad m \frac{v^2}{\rho_g} = 0, \quad m \frac{v^2}{\rho_N} = R \quad (9.30)$$

Odavde sledi da je u tom slučaju a) $v = \text{const}$, tj. čestica se kreće ravnomerno po površi
i b) $\frac{1}{\rho_g} = 0$, tj. putanja čestice je takva da je njena geodezijska krivina jednaka nuli,
a to je tzv. *geodezijska linija* na datoj površi.

9.5. Primer

Uzmimo kao primer *matematičko klatno* (sl. 9.4), tj. kretanje čestice po krugu u vertikalnoj ravni u polju Zemljine teže. Ako poluprečnik kruga obeležimo sa a , a ugao odklona od vertikale sa φ , prirodne jednačine kretanja (9.27) za ovaj slučaj glase

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= mg \cos(g, \tau_0), \\ m \frac{v^2}{a} &= mg \cos(g, n_0) + R_n \\ 0 &= mg \cos(g, b_0) + R_b \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$



Sl. 9.4

gde smo sa R_n i R_b označili projekcije normalne reakcije na pravac glavne normale i binormale. Pošto je ravan kretanja u ovom slučaju oskulatorna ravan, biće $\cos(g, b_0) = 0$, pa iz poslednje jednačine zaključujemo da je i $R_b = 0$, tj. idealna reakcija ima pravac glavne normale. Prema slici vidimo da je

$$\cos(g, \tau_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi, \quad \cos(g, n_0) = \cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi,$$

pa ako još imamo u vidu da je $v = \dot{s}$, prve dve jednačine (9.31) dobijaju oblik

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \varphi, \quad m \frac{v^2}{a} = -mg \cos \varphi + R \quad (9.32)$$

Prva od ovih jednačina određuje brzinu v ili pređeni put s kao funkciju vremena, a druga služi za nalaženje idealne reakcije. Ostavljajući trenutno po strani prvi problem, kojim ćemo se docnije detaljnije pozabaviti, zadržimo se samo na određivanju idealne reakcije. Ona preo ma drugoj jednačini (9.32) ima vrednost

$$R = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{a}, \quad (9.33)$$

odakle vidimo da je idealna reakcija kod matematičkog klatna jednaka zbiru komponente težine klatna $mg \cos \varphi$ u pravcu poluprečnika i veličine mv^2/a , koju možemo interpreti-

rati kao dopunsku silu reakcije usled kretanja. Ovu veličinu takode možemo izraziti pomoću ugla φ , ako prvu jednačinu (9.32) pomnožimo sa $ds = a d\varphi$

$$\frac{dv}{dt} ds = -g \sin \varphi \cdot a dt$$

i transformišemo levu stranu na sledeći način

$$\frac{dv}{dt} ds = \frac{ds}{dt} dv = v dv = d\left(\frac{1}{2} v^2\right),$$

pa integracijom dobijamo

$$\frac{1}{2} v^2 = ag (\cos \varphi + C) \quad (9.34)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u obrazac (9.33) konačno nalazimo i traženu vrednost idealne reakcije u obliku

$$R = mg \cos \varphi + 2mg (\cos \varphi + C) = mg (3 \cos \varphi + 2C), \quad (9.35)$$

gde je integraciona konstanta C određena početnom brzinom klatna v_0 .

Glava IV

ANALITIČKA MEHANIKA

10. LAGRANGE-EVE JEDNAČINE

10.1. Metod generalisanih koordinata

U dosadašnjem izlaganju smo, polazeći od definicije i postulata sile ili d'Alembert-Lagrange-evog principa, dobili sistem diferencijalnih jednačina kretanja, od kojih svaku treba primeniti na po jednu česticu sistema. Tako smo dobili jednačine za slobodno kretanje (8.2), kao i za prinudno kretanje (9.13), koje možemo projektovati na ose Descartes-ovog pravouglog ili nekog drugog pogodnog koordinatnog sistema. To je tzv. *vektorski metod* u mehanici, jer kao polazna tačka služi osnovna jednačina dinamike za svaku česticu u vektorskom obliku. Međutim, pri analizi jednačina sa množiteljima veza (9.13) ukazali smo i na neke nezgodne osobine ovih jednačina, koje znatno otežavaju njihovu primenu.

U cilju otklanjanja navedenih teškoća i dobijanja najopštijeg metoda za rešavanje mehaničkih problema uvodi se *metod generalisanih koordinata*, koji prvenstveno bazira na primeni matematičke analize i stoga se naziva *analitički metod*. Posmatrajmo opet ma kakav sistem od N čestica i neka je njegovo kretanje ograničeno sa k holonomnih veza

$$f_j(x_v, y_v, z_v, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (10.1)$$

što u specijalnom slučaju obuhvata i slobodno kretanje, kad je $k=0$. Zbog postojanja ovih k veza ima samo $3N-k$ nezavisnih Descartes-ovih koordinata i ovaj broj

$$n = 3N - k \quad (10.2)$$

koji pokazuje koliko ima nezavisnih komponenta mogućih pomeranja, naziva se *broj stepeni slobode*. Umesto Descartes-ovih koordinata x_v, y_v i z_v uvedimo sad ma kakav skup od $3N$ veličina $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \end{array} \right\}, \quad (10.3)$$

koje takođe potpuno određuju položaj posmatranog sistema i pretpostavimo da se ove jednačine mogu rešiti po veličinama $q_1, \dots, q_N$, za što je potrebno i dovoljno da odgovarajući jakobijan bude različit od nule

$$\frac{\partial(x_1, \dots, z_N)}{\partial(q_1, \dots, q_{3N})} \neq 0. \quad (10.4)$$

Ako ove funkcije (10.3) uvrstimo u jednačine veza (10.1), one će preći u jednačine oblika

$$f_j^*(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (10.5)$$

Ove relacije povezuju $3N$ veličina q_i u vidu k relacija, kao i u Descartes-ovim koordinatama, te ih ima takođe samo $n=3N-k$ nezavisnih, a ostale su zavisne i označimo ove poslednje sa $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+k}$ ($n+k=3N$). Rešimo sad gornji sistem od k jednačina (10.5) po k ovih zavisnih promenljivih u funkciji ostalih

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1} &= \varphi_{n+1}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ q_{n+k} &= \varphi_{n+k}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\}, \quad (10.6)$$

pri čemu vreme t ovde figuriše kao parametar. Uvrštavajući ove funkcije u jednačine (10.3), eliminišaćemo sve zavisne veličine

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 [q_1, \dots, q_n, \varphi_{n+1}(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \varphi_{n+k}(q_1, \dots, q_n, t)] \\ &\text{--- --- --- --- --- --- ---}, \\ z_N &= z_N [q_1, \dots, q_n, \varphi_{n+1}(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \varphi_{n+k}(q_1, \dots, q_n, t)] \end{aligned}$$

čime ove relacije dobijaju oblik

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1^* (q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ z_N = z_N^* (q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{array} \right\}, \quad (10.7)$$

što možemo napisati i vektorski

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (10.8)$$

Ove relacije omogućavaju prelaz sa Descartes-ovih koordinata na generalisane i obrnuto i na taj način sve jednačine dinamike možemo izraziti i u generalisanim koordinatama.

Odavde vidimo da je položaj svake čestice sistema u svakom trenutku potpuno određen skupom nezavisnih veličina $q_1, q_2, \dots, q_n$ i tako definisane veličine nazivaju se *generalisane koordinate sistema*. U opštem slučaju, ako imamo neki sistem čestica slobodan ili ograničen izvesnim holonomnim vezama, *pod generalisanim koordinatama sistema se podrazumeva ma kakav skup nezavisnih veličina $q_1, q_2, \dots, q_n$, koje pri datim uslovima potpuno i jednoznačno određuju položaj posmatranog sistema*. Pri tome treba naglasiti da se ovde radi o takvom skupu nezavisnih veličina koje određuju položaj sistema kao celine, te se *generalisane koordinate uopšte ne odnose na pojedinačne čestice sistema*. Te veličine moraju određivati položaj sistema pri datim holonomnim vezama, stoga su samim izborom generalisanih koordinata *jednačine veza u pravouglim koordinatama identički zadovoljene*. Ove vreme u relacijama (10.7) potiče iz jednačina veza, te u slučaju nestacionarnih veza relacije između Descartes-ovih i generalisanih koordinata sadrže eksplicitno i vreme. S druge strane, u d'Alembert-Lagrange-ovom principu (7.5) ne figurišu idealne reakcije, a zbog nezavisnosti generalisanih koordinata nisu potrebni nikakvi dopunski uslovi, kao što smo imali pri primeni metoda množitelja veza, te sile reakcije ni naknadno ne ulaze u račun. *Prema*

tome, u metodu generalisanih koordinata ne figurišu eksplicitno ni jednačine veza ni idealne reakcije.

Ukoliko je posmatrani sistem čestica ograničen i sa 1 neholonomnih veza, generalisane koordinate mogu se na navedeni način uvesti *samo u odnosu na holonomne veze*, jer samo one omogućavaju svodenje k pravougljih koordinata na ostale u konačnom obliku. U tom slučaju uzimamo opet $3N-k$ generalisanih koordinata $q_1, q_2, \dots, q_n$, koje predstavljaju minimalni skup veličina za određivanje položaja sistema, ali ove veličine nisu više nezavisne, jer su vezane neholonomnim vezama. Međutim, zbog postojanja 1 neholonomnih veza broj stepeni slobode, tj. broj nezavisnih komponenata mogućih pomeranja, neće više biti jednak broju generalisanih koordinata, već

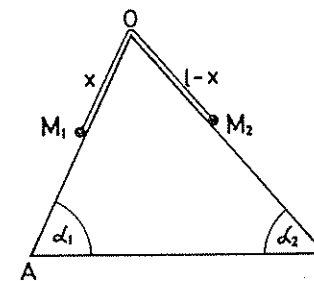
$$n' = n - 1 = 3N - k - 1 \quad (10.9)$$

U našem daljem izlaganju ograničicemo se samo na holonomne sisteme.

Na kraju, napomenimo još da poseban značaj metoda generalisanih koordinata za fiziku leži u tome što se on, osim u mehanici sistema, može primenjivati u proširenom smislu u raznim granama teorijske fizike: u mehanici kontinuuma, elektrodinamici, teoriji relativnosti, kvantnoj mehanici i kvantnoj teoriji polja. Tako ovaj metod, na kome baziraju tzv. Lagrange-ev i Hamilton-ov formalizam, predstavlja jedan od najopštih metoda teorijske fizike, bez koga se ne može ni formulisati savremena kvantna mehanika.

10.2. Primeri

1. Dve čestice vezane konopcem dužine l mogu da se kreću po dvostrukoj strmoj ravni duž pravih OA i OB (sl. 10.1). U ovom slučaju i prva i druga čestica kreću se po linijama, što daje po dve veze, a uslov $OM_1 + OM_2 = l$ još jednu vezu. Stoga imamo ukupno pet jednačina veza, te je broj stepeni slobode prema obrascu (10.1) $n = 3 \cdot 2 - 5 = 1$. Položaj ovog sistema potpuno je određen ako znamo rastojanje prve čestice od vrha $x = OM_1$, jer je tada rastojanje druge $l - x$. Dakle, u ovom primeru imamo samo jedan stepen slobode, a za generalisanu koordinatu možemo uzeti navedeno rastojanje x .

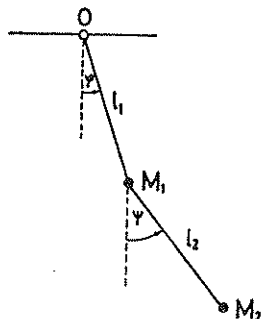


Sl. 10.1

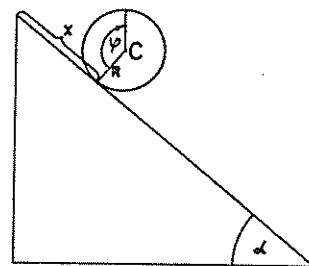
2. Dvostruko matematičko klatno, okačeno o tačku O vrši oscilatorno kretanje u vertikalnoj ravni (sl. 10.2). Ovde se prva čestica kreće po krugu poluprečnika OM_1 , a druga po krugu poluprečnika M_1M_2 oko pokretne tačke M_1 . Položaj ovog sistema potpuno je određen uglovima φ i ψ prema vertikali, te imamo dva stepena slobode, a za generalisane koordinate možemo uzeti ove uglove.

3. Cilindar poluprečnika R kotrlja se niz strmu ravan (sl. 10.3). Njegov položaj potpuno je određen pređenim putem x i opisanim uglom φ , stoga će biti dva stepena slobode, a za generalisane koordinate možemo uzeti x i φ . Međutim, ako se kotrljanje vrši bez klizanja,

elementarni put dx biće jednak odgovarajućem luku: $dx=Rd\varphi$, odakle se integracijom dobija $x=R\varphi$. U tom slučaju samo jedna od ovih veličina je nezavisna, te imamo samo jedan stepen slobode.



Sl. 10.2



Sl. 10.3

10.3. Rad u generalisanim koordinatama

Potražimo pre svega izraz za elementarni rad na ma kakvim virtuelnim pomeranjima u generalisanim koordinatama. Ovaj rad je određen obrascem (5.3)

$$\delta A = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v,$$

a virtuelna pomeranja $\delta \mathbf{r}_v$, definisana kao razlike dvaju mogućih, možemo prema obrascu (10.8) izraziti u obliku

$$\delta \mathbf{r}_v = d' \mathbf{r}_v - d \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} dt$$

ili kraće

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (10.10)$$

gde smo uveli oznaku

$$\delta q_i = d' q_i - dq_i \quad (10.11)$$

To je tzv. *varijacija generalisane koordinate*, pa imamo, menjajući red sumiranja

$$\delta A = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

što možemo napisati konciznije

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (10.12)$$

gde je

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}. \quad (10.13)$$

Obrasc (10.12) izražava elementarni rad u generalisanim koordinatama, a tako definisane veličine Q_i nazivaju se *generalisane sile*. Ukoliko relacije (10.8) između pravougljih i generalisanih koordinata ne sadrže eksplicitno vreme, što je slučaj kod stacionarnih veza, virtuelna

pomeranja u gornjim obrascima se svode na moguća. Svako generalisanoj koordinati odgovara jedna generalisana sila, međutim prema samoj definiciji se vidi da *generalisane sile ne moraju imati dimenziju sile, ali proizvodi $Q_i \delta q_i$ moraju imati dimenziju rada*. Ovi proizvodi predstavljaju elementarne radove pri promeni samo odgovarajuće generalisane koordinate q_i .

Da bismo videli smisao generalisanih sila, posmatrajmo slobodno kretanje sistema i za generalisane koordinate uzmimo pravougle koordinate čestica sistema. Tada je $n=3N$, pa iz izraza za elementarni rad u razvijenom obliku

$$\delta A = \sum_{v=1}^N F_{vx} \delta x_v + \sum_{v=1}^N F_{vy} \delta y_v + \sum_{v=1}^N F_{vz} \delta z_v$$

i obrasca (10.12) zaključujemo da u slučaju slobodnog kretanja sistema i pravougljih koordinata čestica generalisane sile su komponente sile $\mathbf{F}_v$ i u tom smislu one predstavljaju generalizaciju pojma sile.

Ako su sve sile koje deluju na sistem *potencijalne*, tj. oblika $\mathbf{F}_v = -\text{grad}_v U$, prema obrascu (10.13) imamo

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = - \sum_{v=1}^N \text{grad}_v U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = - \sum_{v=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_v} \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_v} \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right)$$

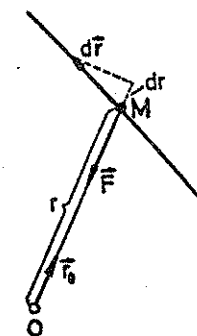
odnosno,

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10.14)$$

Ovaj obrazac izražava generalisane sile kao funkcije potencijalne energije sistema. U opštem slučaju generalisane sile kao i potencijalna energija mogu zavisiti i eksplicitno od vremena.

Nalaženje generalisanih sila obično se vrši na sledeći način. Elementarni rad izrazi se neposredno u generalisanim koordinatama, čime se dobija izraz oblika (10.12). Tada koeficijenti uz diferencijale generalisanih koordinata predstavljaju odgovarajuće generalisane sile. Ukoliko su sile potencijalne, može se potencijalna energija izraziti u funkciji generalisanih koordinata, pa se tada generalisane sile dobijaju prema obrascu (10.14).

Primer



Sl. 10.4

Uzmimo kao primer kretanje čestice u ravni pod dejstvom centralne sile $\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}_0$ (sl. 10.4). Ako za generalisane koordinate uzmemo polarne koordinate (r, φ) , elementarni rad ove sile biće

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(r) \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}$$

Pošto je $r_0 \cdot dr = dr$, gornji izraz možemo napisati u obliku

$$d'A = f(r) dr + 0 \cdot d\varphi,$$

odakle neposredno vidimo da su odgovarajuće generalisane sile

$$Q_r = f(r), \quad Q_\varphi = 0 \quad (10.15)$$

10.4. Kinetička energija u generalisanim koordinatama

Nadimo još izraz za kinetičku energiju sistema u generalisanim koordinatama. Ona je definisana obrascem

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \mathbf{v}_v,$$

a brzinu $\mathbf{v}_v$ možemo prema obrascu (10.8) i pravilu za posredno diferenciranje funkcija napisati

$$\mathbf{v}_v = \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \quad (10.16)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u gornji obrazac za kinetičku energiju dobijamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \dot{q}_i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

što možemo konciznije napisati u obliku

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i + c \quad (10.17)$$

gde su uvedeni koeficijenti

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \\ b_i &= \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \\ c &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Obrazac (10.17) izražava kinetičku energiju u generalisanim koordinatama. Odavde vidimo da je kinetička energija sistema u opštem slučaju kvadratna funkcija generalisanih brzina $\dot{q}_i$, što možemo preglednije napisati

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (10.19)$$

gde su T_2 , T_1 i T_0 kvadratni, linearni i nezavisni član, definisani sa

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i, \quad T_0 = c. \quad (10.20)$$

Međutim, ako u relacijama (10.8) ne figuriše eksplicitno vreme, biće $\partial \mathbf{r}_v / \partial t = 0$, pa otpadaju članovi T_1 i T_0 , te se kinetička energija svodi na $T = T_2$. Takav slučaj imamo kad su sve veze stacionarne, jer tada nema razloga koji bi doveo do uvođenja vremena u navedene relacije (10.8). Prema tome, ako je kretanje sistema slobodno ili sa stacionarnim vezama, njegova kinetička energija je homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina.

10.5. Lagrange-eve jednačine

Predimo sad na dobijanje samih diferencijalnih jednačina kretanja sistema čestica u generalisanim koordinatama. Pretpostavimo da se ovo kretanje vrši bez veza ili sa zadržavajućim idealnim vezama i podimo opet od d'Alembert-Lagrange-evog principa (7.5)

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{a}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0. \quad (10.21)$$

Napišimo ovu jednačinu u obliku

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v - \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0$$

i transformišimo je u generalisane koordinate. Prvi član predstavlja elementarni rad svih aktivnih sila na virtuelnim pomeranjima sistema i može se prema obrascu (10.12) neposredno izraziti pomoću generalisanih sila

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i. \quad (10.22)$$

Drugi član transformišimo tako da se može napisati pomoću parcijalnih izvoda kinetičke energije sistema. U tom cilju napišimo ga na osnovu obrasca (10.10) na sledeći način

$$\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

ili, prema identičnosti $u'v = (uv)' - uv'$

$$\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (10.23)$$

Pošto je, prema obrascu (10.16)

$$\frac{\partial \mathbf{v}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i},$$

a zbog nezavisnosti operacija d/dt i $\partial/\partial q_i$ možemo izmeniti njihov red

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_v}{\partial q_i},$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i. \quad (10.24)$$

Uvodeći kinetičku energiju sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \mathbf{v}_v$$

i formirajući parcijalne izvode

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_v}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_v}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i},$$

vidimo da se drugi član jednačine (10.21) zaista može izraziti pomoću ovih parcijalnih izvoda

$$\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{v}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \cdot \delta \mathbf{q}_i. \quad (10.25)$$

Tada d'Alembert-Lagrange-ev princip na osnovu obrazaca (10.22) i (10.25) dobija vid

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta \mathbf{q}_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i = 0,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} - Q_i \right) \delta \mathbf{q}_i = 0. \quad (10.26)$$

To je d'Alembert-Lagrange-ev princip u generalisanim koordinatama. Ako sad pretpostavimo da su sve veze holonomne, generalisane koordinate kao i njihove varijacije biće međusobno nezavisne, a da bi gornji izraz za ma kakve vrednosti $\delta \mathbf{q}_i$ bio identički jednak nuli, svi koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10.27)$$

Ove jednačine, u kojima pod Q_i treba podrazumevati određeni oblik generalisanih sila, nazivaju se *Lagrange-eve jednačine*, a za razliku od Lagrange-evih jednačina prve vrste (jednačina sa množiteljima veza) one se zovu i *Lagrange-eve jednačine druge vrste*. Ove jednačine predstavljaju tražene diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama, koje važe kako za prinudno tako i za slobodno kretanje sistema čestica, koje se može shvatiti kao specijalan slučaj prvog kad je $k=0$.

Slučaj potencijalnih sila

Pretpostavimo sad da se sve generalisane sile Q_i mogu izvesti iz izvesne funkcije oblika $V(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t)$ po obrascu

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}. \quad (10.28)$$

Ovako definisana funkcija V naziva se *uopšteni potencijal* i on predstavlja generalizaciju pojma potencijala U , kao što se vidi iz obrasca (10.14), i na koji se svodi kad V ne zavisi od generalisanih brzina. Iz gornjeg obrasca sledi, razvijanjem zadnjeg člana

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i \partial \dot{\mathbf{q}}_k} \dot{\mathbf{q}}_k + (**),$$

gde su sa $(**)$ označeni članovi koji ne sadrže generalisana ubrzanja $\ddot{\mathbf{q}}_i$. Pošto se u mehanici razmatra samo slučaj kad sile ne zavise od ubrzanja, svi koeficijenti uz $\ddot{\mathbf{q}}_k$ moraju biti jednaki nuli

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i \partial \dot{\mathbf{q}}_k} = 0$$

odakle se zaključuje da uopšteni potencijali linearno zavise od generalisanih brzina

$$V = \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{\mathbf{q}}_i + U = V_1 + U, \quad (10.29)$$

gde su α_i i U izvesne funkcije od generalisanih koordinata i vremena. Takav slučaj imamo na pr. kod Lorentz-ove sile (4.8), za koju se u elektrodinamici dokazuje da se može izvesti iz izvesnog uopštenog potencijala, koji zavisi od skalarnog i vektorskog potencijala elektromagnetnog polja. Ako su svi koeficijenti α_i jednaki nuli, tj. ako V ne zavisi od generalisanih brzina, uopšteni potencijal se svodi na uobičajeni potencijal $V=U(\mathbf{q}_i, t)$.

U ovom slučaju Lagrange-eve jednačine (10.27) glase

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i},$$

što možemo napisati i u obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial (T-V)}{\partial \mathbf{q}_i} = 0$$

ili konciznije

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10.30)$$

gde smo uveli oznaku

$$L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, t) = T - V \quad (10.31)$$

Ovako uvedena funkcija L naziva se *Lagrange-eva funkcija* i ona zavisi od svih generalisanih koordinata, generalisanih brzina i eventualno vremena. Odgovarajuće jednačine (10.30) predstavljaju Lagrange-eve jednačine za sisteme u kojima dejstvuju samo potencijalne sile u običnom ili generalisanom smislu reči.

U opštem slučaju, kad imamo i potencijalne i nepotencijalne sile, možemo staviti

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} + Q_i^*,$$

gde smo sa Q_i^* označili nepotencijalni deo sila. Tada Lagrange-eve jednačine (10.27) dobijaju oblik

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} + Q_i^*$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = Q_i^*, \quad (10.32)$$

gde su sad u Lagrange-evoj funkciji L sadržane samo potencijalne sile.

10.6. Analiza Lagrange-evih jednačina

Lagrange-eve jednačine (10.27) ili (10.30) su, kao što smo već naveli, diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama. Ispitajmo pre svega matematičku strukturu ovih jednačina, u kojima sve veličine moraju biti izražene u funkciji traženih generalisanih koordinata i njihovih brzina. Kinetička energija T prema obrascu (10.17) u opštem slučaju je kvadratna funkcija generalisanih brzina

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n b_j \dot{q}_j + c,$$

pri čemu koeficijenti u opštem slučaju zavise od generalisanih koordinata i vremena, odakle sledi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k + b_i. \quad (10.33)$$

S druge strane, parcijalni izvodi $\partial T / \partial q_i$ biće

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial c}{\partial q_i}, \quad (10.34)$$

a generalisane sile Q_i moraju biti date funkcije tipa $Q_i(q_k, \dot{q}_k, t)$ koje najčešće ne zavise od generalisanih brzina. Stavljajući ove izraze u jednačine (10.27), dobijamo

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \dot{a}_{ik} \dot{q}_k + \dot{b}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial c}{\partial q_i} = Q_i(q_k, \dot{q}_k, t),$$

odakle vidimo, grupišući srodne članove, da su Lagrange-eve jednačine u eksplicitnom vidu oblika

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \dot{q}_k + \gamma_i = Q_i(q_k, \dot{q}_k, t), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (10.35)$$

gde su koeficijenti izvesne funkcije od generalisanih koordinata i vremena.

Dakle, Lagrange-eve jednačine predstavljaju sistem od simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, linearnih po $\ddot{q}_i$, u kojima su nepoznate funkcije sve generalisane koordinate sistema q_i ($i=1, 2, \dots, n$), a nezavisno promenljiva vreme t , pri čemu je broj ovih jednačina jednak broju stepeni slobode. Docnije ćemo pokazati da je u klasičnoj mehanici uvek $|a_{ik}| \neq 0$, pa se gornji sistem jednačina uvek može rešiti po izvodima najvišeg reda $\ddot{q}_i$, te prelaskom na generalisane koordinate nije narušen princip kauzalnosti.

Pri primeni Lagrange-evih jednačina treba postupiti na sledeći način. Prvo treba odrediti broj stepeni slobode i izabrati najpogodnije generalisane koordinate sistema prema prirodi problema. Zatim se moraju naći kinetička energija i generalisane sile odnosno potencijalna energija u funkciji generalisanih koordinata, generalisanih brzina i eventualno vremena. Posle toga treba formirati Lagrange-eve jednačine za svaku generalisanu koordinatu posebno. Najzad, rešavanjem sistema Lagrange-evih jednačina uz date početne uslove dobijaju se kao rešenja ovih jednačina generalisane koordinate sistema kao funkcije vremena, a to su konačne jednačine kretanja posmatranog sistema.

Prema tome, Lagrange-ev metod ima znatna preimućstva: on važi za ma kakve generalisane koordinate, sve generalisane koordinate su međusobno nezavisne i nije potrebno poznavati sile

reakcije, a kao posledica ovih osobina broj Lagrange-evih jednačina predstavlja najmanji mogući broj diferencijalnih jednačina kretanja.

Navedimo na kraju da se iz Lagrange-evih jednačina (10.30) za sisteme sa potencijalnim silama u izvesnim slučajevima mogu neposredno dobiti prvi integrali. Naime, ako Lagrange-eve funkcija L ne zavisi od jedne ili više generalisanih koordinata

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (10.36)$$

takve koordinate q_i nazivaju se ciklične, a Lagrange-eve jednačine tada daju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

odakle se integracijom dobija

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const} \quad (i=1, 2, \dots, r). \quad (10.37)$$

Dakle, svakoj cikličnoj koordinati, tj. koordinati koja ne ulazi eksplicitno u Lagrange-evu funkciju, odgovara jedan prvi integral oblika (10.37).

10.7. Primeri

1. Kao prvi primer uzmimo jednačine kretanja slobodne čestice u sfernim koordinatama. Pošto je kvadrat brzine tada dat obrascem (3.16), kinetička energija čestice imaće vid

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2).$$

Da bismo našli odgovarajuće generalisane sile, podimo od elementarne promene vektora položaja u ovim koordinatama

$$dr = dr e_r + r d\vartheta e_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi e_\varphi, \quad (10.38)$$

jer su ivice elementa zapremine, duž kojih se menja samo jedna koordinata, dr , $r d\vartheta$ i $r \sin \vartheta d\varphi$. Stoga je elementarni rad

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_r e_r + F_\vartheta e_\vartheta + F_\varphi e_\varphi) \cdot (dr e_r + r d\vartheta e_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi e_\varphi),$$

odakle neposredno vidimo da je

$$Q_r = F_r, \quad Q_\vartheta = r F_\vartheta, \quad Q_\varphi = r \sin \vartheta F_\varphi, \quad (10.39)$$

gde su F_r , F_ϑ i F_φ projekcije sile na koordinatne ose sfernog sistema.

Napišimo sad Lagrange-eve jednačine (10.27) za sferne koordinate r , ϑ i φ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} &= Q_r, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= Q_\vartheta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

Ako zamenimo ove parcijalne izvode prema obrascu za kinetičku energiju

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} &= m r \dot{\vartheta}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= m \dot{\vartheta}^2 + m \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2, & \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= m r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2, & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned}$$

dobijamo tražene diferencijalne jednačine kretanja u polarnim koordinatama

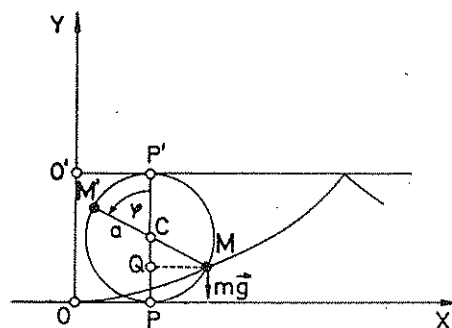
$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} - mr(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) &= F_r \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\vartheta}) - mr^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 &= r F_{\vartheta} \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) &= r \sin \vartheta F_{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

Ukoliko se kretanje čestice vrši u ravni, biće $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} = 0$, pa iz druge jednačine se dobija da je $F_{\vartheta} = 0$, a prva i treća se svode na

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F_r, \quad \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\varphi}) = r F_{\varphi} \quad (10.42)$$

2. Posmatrajmo sad tzv. *cikloidno klatno*. Pod time se podrazumeva kretanje čestice po cikloidi u vertikalnoj ravni u polju Zemljine teže (sl. 10.5). Kako je cikloida, koju smo upoznali u odeljku 3, kriva koju opisuje neka fiksirana tačka M na krugu koji se kotrlja bez klizanja po nekoj pravoj, položaj ove tačke biće potpuno određen opisanim uglom φ , koji možemo uzeti za generalisanu koordinatu. Uslov kotrljanja bez klizanja daje

$$O'P' = M'P' = a\varphi \quad (10.43)$$



Sl. 10.5

pa ako koordinatni sistem izaberemo kao na slici, za bilo koji položaj tačke M imaćemo

$$x = OP + QM, \quad y = PC - QC,$$

tj.

$$x = a(\varphi + \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi) \quad (10.44)$$

Napomenimo da se ove jednačine razlikuju od jednačina (3.29), jer je ovde drugi položaj cikloide prema koordinatnom sistemu.

Kinetička energija cikloidnog klatna imaće oblik

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m [a(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \varphi)]^2 + \frac{1}{2} m [a \dot{\varphi} \sin \varphi]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m a^2 (2 \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \end{aligned}$$

odnosno

$$T = 2 m a^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (10.45)$$

Potencijalna energija u odnosu na najniži položaj biće

$$U = mgy = mg(a - a \cos \varphi),$$

tj.

$$U = 2 m g a \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (10.46)$$

Ako formiramo Lagrange-ovu funkciju $L = T - U$, odgovarajuća Lagrange-eva jednačina (10.30)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (10.47)$$

određivaće kretanje posmatranog cikloidnog klatna, ali ono se može prikazati preglednije uvođenjem pogodnije promenljive.

U tom cilju uvedimo luk cikloide, koji možemo naći iz obrasca (10.45)

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2 m a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

odakle sledi

$$ds = 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

pa integracijom dobijamo, računajući luk od tačke 0

$$s = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \quad (10.48)$$

Ako sad luk cikloide s uzmemo za novu generalisanu koordinatu, kinetička i potencijalna energija dobijaju oblik

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2, \quad U = \frac{1}{8a} m g s^2,$$

a Lagrange-eva funkcija

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{8a} m g s^2 \quad (10.49)$$

Formirajmo sad Lagrange-ovu jednačinu za promenljivu s

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad (10.50)$$

U eksPLICITNOM obliku ova jednačina glasi

$$\frac{d}{dt} (m \dot{s}) - \left(-\frac{1}{4a} m g s \right) = 0$$

ili konciznije

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0, \quad (10.51)$$

gde smo uveli oznaku

$$\omega^2 = \frac{g}{4a} \quad (10.52)$$

Opšti integral ove jednačine biće

$$s = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

a stavljajući

$$C_1 = A \cos \alpha, \quad C_2 = -A \sin \alpha,$$

gornji integral možemo napisati u obliku

$$s = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (10.53)$$

gde su amplituda A i faza α određene početnim uslovima. Ako je na pr. $v_0 = 0$, biće $A = s_0$, $\alpha = 0$, pa ćemo imati

$$s = s_0 \cos \omega t$$

Iz jednačine (10.53) zaključujemo da je ovo kretanje čisto harmonijsko oscilovanje sa periodom

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (10.54)$$

Navedimo nekoliko karakterističnih osobina kretanja cikloidnog klatna:

1. *Izohronost*, koja se sastoji u tome da period oscilacija ovog klatna ne zavisi od početnih uslova kretanja, što se neposredno vidi iz obrasca (10.54).

2. *Tautohronost*, osobina da čestica u polju Zemljine teže puštena iz bilo kog početnog položaja s_0 na cikloidi stigne u njenu najnižu tačku za isto vreme. Naime, u najnižoj položaj $s=0$ čestica će bez početne brzine stići za vreme τ' određeno uslovom $0 = s_0 \cos \omega \tau'$, tj. za vreme

$$\tau' = \frac{\pi}{2\omega} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (10.55)$$

3. *Brahistohronost*, svojstvo cikloide da predstavlja onu liniju u vertikalnoj ravni duž koje će čestica u polju Zemljine teže stići za najkraće vreme u neku fiksiranu tačku te ravni. Dokaz ovog tvrdjenja zasniva se na Euler-Lagrange-ovoj jednačini varijacionog računa, o kojoj ćemo govoriti u odeljku 12.1 što ostavljamo čitaocu za vežbu.

11. ZAKONI ODRŽANJA

11.1. Osobine prostora i vremena

Ispitajmo sad zakone održanja u inercijalnim sistemima referencije i povežimo ih sa osnovnim osobinama prostora i vremena. Kao što smo ranije videli, inercijalni sistemi se karakterišu time da je prostor u odnosu na njih homogen i izotropan, a vreme homogeno. Iz tih osobina smo izveli i mehanički princip inercije i one leže u osnovi zakona mehanike kao i teorije polja. Pokažimo sad da se iz njih dobijaju i zakoni održanja, tako da iz homogenosti vremena proizilazi održanje energije, iz homogenosti prostora - održanje impulsa, a iz izotropije prostora - održanje momenta impulsa. Pri tome ćemo pretpostaviti da je posmatrani sistem izolovan, da je njegovo kretanje slobodno ili sa ideal-

nim i holonomnim vezama i da na njegove čestice deluju isključivo potencijalne sile interakcije. To je na mikrofizičkom nivou jedino i realno, jer kad se na pr. sila otpora sredine opiše nepotencijalnom silom oblika $\vec{F} = -k\vec{v}$, ona predstavlja samo makrofizički usrednjeni opis rezultata delovanja potencijalnih sila interakcije sa pojedinačnim molekulima sredine. U tom slučaju Lagrange-eve jednačine imaju vid (10.30)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (11.1)$$

pa prikažimo redom kako iz njih proizilaze navedeni zakoni održanja.

11.2. Održanje energije

Počnimo sa osobinom homogenosti vremena, koja važi samo u inercijalnim sistemima i koja se sastoji u tome da zakoni kretanja izolovanih sistema ne smeju zavisiti od izbora početka računanja vremena. Stoga, ako izvršimo transformaciju

$$t \rightarrow t' = t + \delta t, \quad (11.2)$$

zakoni kretanja moraju ostati nepromenjeni, a pošto su oni određeni Lagrange-evin je-
dnacijama (11.1), sama Lagrange-eva funkcija pri tome mora ostati nepromenjena, tj. mora zadovoljavati uslov

$$\delta^* L \equiv L(q_i, \dot{q}_i, t + \delta t) - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = 0,$$

pri čemu smo zvezdicom naznačili da se ovde radi o drugom tipu varijacije, a otuda

$$\delta^* L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (11.3)$$

To znači da Lagrange-eva funkcija ne sme zavisiti eksplicitno od vremena: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, pa imamo

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (11.4)$$

Zamenjujući ovde izvode $\partial L / \partial q_i$ iz Lagrange-evih jednačina (11.1), dobijamo

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0 \quad (11.5)$$

Oдавде zaključujemo da je veličina u zagradi, koju označimo sa $\mathcal{E}$, konstantna u toku vremena

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const} \quad (11.6)$$

Prema tome, iz homogenosti vremena u inercijalnim sistemima referencije, tj. iz zahteva da pri translaciji vremena Lagrange-eva funkcija ostane nepromenjena, proizilazi da veličina $\mathcal{E} = \sum \partial L / \partial \dot{q}_i \dot{q}_i - L$ pri dejstvu potencijalnih sila ostaje stalna u toku vremena, te predstavlja jedan integral kretanja.

Da bismo videli smisao ove veličine, pretpostavimo da je kinetička energija sistema homo-

gena kvadratna funkcija generalisanih brzina, što odgovara slučaju kad je kretanje sistema slobodno ili sa stacionarnim vezama. Kao što je poznato iz matematike, ako imamo neku homogenu funkciju $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stepena homogenosti k , koja se definiše uslovom da za ma kakvo λ bude

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

za takvu funkciju važi Euler-ova teorema

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f. \quad (11.7)$$

Ako ovu teoremu primenimo na kinetičku energiju, imaćemo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \quad (11.8)$$

Pretpostavimo li još da su sve sile konzervativne, potencijal biće funkcija samo generalisanih koordinata, pa gornja veličina (11.6) dobija oblik

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = T + U,$$

a to je ukupna energija sistema

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = E \quad (11.9)$$

Dakle, ako je kretanje sistema slobodno ili sa idealnim i stacionarnim vezama i ako su sve sile konzervativne, veličina $\mathcal{E}$ predstavlja ukupnu energiju sistema, a kao posledica homogenosti vremena sledi zakon održanja mehaničke energije. Stoga se veličina $\mathcal{E}$, definisana formulom (11.6), u opštem slučaju naziva generalisanom energijom sistema i ona se može naći za svaku datu Lagrange-ovu funkciju L .

11.3. Održanje impulsa

Proučimo sad do čega dovodi homogenost prostora kod izolovanih sistema. Na osnovu ove osobine mehanička svojstva zatvorenog sistema moraju ostati nepromenjena pri proizvoljnom paralelnom prenosu sistema kao celine. Saglasno tome, ako izvršimo transformaciju

$$\mathbf{r}_v \rightarrow \mathbf{r}'_v = \mathbf{r}_v + \delta \mathbf{r}, \quad (11.10)$$

iz istih razloga kao i u prethodnom slučaju Lagrange-eva funkcija mora ostati nepromenjena, te njena odgovarajuća promena mora biti jednaka nuli

$$\delta^* L = \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \delta \mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_v} \delta \dot{\mathbf{r}}_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_v} \delta z_v = 0,$$

gde su δx_v , δy_v i δz_v komponente vektora $\delta \mathbf{r}_v = \delta \mathbf{r}$. Ako uvedemo sledeću oznaku za parcijalni gradijent

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial f}{\partial a_x}, \frac{\partial f}{\partial a_y}, \frac{\partial f}{\partial a_z} \right), \quad (11.11)$$

koji se često označava i simbolom $\text{grad}_{\mathbf{a}} f$, prethodni uslov može se formulisati u obliku

$$\delta^* L = \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \delta \mathbf{r}_v = \delta \mathbf{r} \cdot \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} = 0 \quad (11.12)$$

Zbog proizvoljnosti $\delta \mathbf{r}$ ova jednakost biće uvek zadovoljena samo tada ako je

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} = 0,$$

a smisao ovog rezultata sastoji se u sledećem. Pošto je za potencijalne sile $\partial L / \partial \mathbf{r}_v = -\partial U / \partial \mathbf{r}_v$, taj uslov može se napisati i u obliku

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v = - \sum_{v=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_v} = 0 \quad (11.13)$$

i izražava da je rezultanta svih potencijalnih sila koje deluju na čestice sistema jednaka nuli, što je za izolovane sisteme ekvivalentno važenju zakona akcije i reakcije.

Napišimo sad Lagrange-ove jednačine kretanja (11.1) za koordinate x_v , y_v i z_v .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} - \frac{\partial L}{\partial x_v} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_v} - \frac{\partial L}{\partial y_v} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_v} - \frac{\partial L}{\partial z_v} = 0$$

pomoću parcijalnih gradijenata (11.11)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} = 0. \quad (11.14)$$

Tada se uslov (11.13), odnosno $\sum \partial L / \partial \mathbf{r}_v = 0$ na osnovu ovih jednačina transformiše u

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} = \sum_{v=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} = 0,$$

odakle proizlazi da je

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} = \text{const} \quad (11.15)$$

Pošto je Lagrange-eva funkcija

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + \dot{z}_v^2) - U(x_v, y_v, z_v),$$

biće $\partial L / \partial \dot{x}_v = m_v \dot{x}_v$ itd., te je

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} = m_v \mathbf{v}_v, \quad (11.16)$$

pa zakon održanja (11.15) dobija vid

$$\mathbf{P} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v = \text{const} \quad (11.17)$$

Prema tome, iz homogenosti prostora u inercijalnim sistemima referencije, tj. iz zahteva da se pri translaciji sistema Lagrange-eva funkcija ne promeni, proizlazi da ukupni impuls izolovanog sistema $\mathbf{P} = \sum m_v \mathbf{v}_v$ ostaje stalan u toku vremena, te predstavlja jedan integral kretanja.

11.4. Održanje momenta impulsa

Ispitajmo najzad i posledice izotropije prostora kod izolovanih sistema. Smisao ove osobine je u tome da se mehanička svojstva zatvorenog sistema ne smeju menjati pri rotaciji

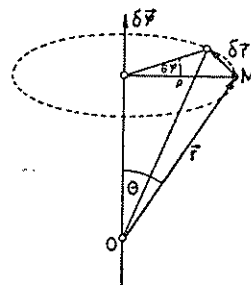
sistema kao celine za ma koji ugao. U tom cilju razmotrimo elementarnu rotaciju sistema za ugao $\delta\varphi$ i odgovarajuću transformaciju

$$\mathbf{r}_v \rightarrow \mathbf{r}_v' = \mathbf{r}_v + \delta\mathbf{r}_v, \quad \mathbf{v}_v \rightarrow \mathbf{v}_v' = \mathbf{v}_v + \delta\mathbf{v}_v, \quad (11.18)$$

pa postavimo uslov da se pri tome Lagrange-eva funkcija ne promeni.

Uvedimo tzv. vektor elementarne rotacije $\delta\varphi$ (sl. 11.1), čiji je intenzitet jednak uglu obrta $\delta\varphi$, pravac se poklapa sa pravcem trenutne ose rotacije, a uperen je na onu stranu odakle se vidi da se rotacija vrši u pozitivnom smeru. Pomoću njega možemo izraziti elementarnu promenu vektora položaja bilo koje tačke M, čiji je intenzitet

$$|\delta\mathbf{r}| = \rho \delta\varphi = r \sin\theta \delta\varphi = |\delta\varphi \times \mathbf{r}|.$$



Sl. 11.1.

Imajući u vidu da je pravac vektora $\delta\mathbf{r}$ normalan na ravni koji čine $\delta\varphi$ i $\mathbf{r}$, a smer u posmatranom slučaju od nas, ovaj vektor možemo napisati u obliku

$$\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r} \quad (11.19)$$

Na sličan način zaključujemo da će se kraj vektora brzine tačke M promeniti po istom zakonu za

$$\delta\mathbf{v} = \delta\varphi \times \mathbf{v} \quad (11.20)$$

Ako se sistem kao celina obrne za $\delta\varphi$, odgovarajuća promena Lagrange-ove funkcije mora takodje biti jednaka nuli, što se pomoću pojma parcijalnog gradijenta analogno relaciji (11.12) može napisati u obliku

$$\delta^*L = \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \delta\mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot \delta\mathbf{v}_v = 0 \quad (11.21)$$

Ovde možemo $\delta\mathbf{r}_v$ i $\delta\mathbf{v}_v$ zameniti odgovarajućim izrazima (11.19) i (11.20)

$$\delta^*L = \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot (\delta\varphi \times \mathbf{r}_v) + \sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \cdot (\delta\varphi \times \mathbf{v}_v) = 0,$$

pa primenimo kod ovih mešovityh proizvoda osobinu ciklične permutacije

$$\delta^*L = \delta\varphi \cdot \left\{ \sum_{v=1}^N \left(\mathbf{r}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \right) + \sum_{v=1}^N \left(\mathbf{v}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \right) \right\} = 0 \quad (11.22)$$

Pošto ovaj uslov treba da bude zadovoljen za bilo koje $\delta\varphi$, zaključujemo da mora biti

$$\sum_{v=1}^N \left(\mathbf{r}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \right) + \sum_{v=1}^N \left(\mathbf{v}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \right) = 0$$

Drugi član na osnovu (11.16) otpada, a s obzirom da je $\partial L / \partial \mathbf{r}_v = -\partial U / \partial \mathbf{r}_v$, ovaj uslov se svodi na

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_v = - \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_v} = 0, \quad (11.23)$$

tj. rezultanta momenata svih potencijalnih sila jednaka je nuli.

Da bismo videli smisao ovog rezultata, zamenimo $\partial L / \partial \mathbf{r}_v$ odgovarajućim izrazom iz Lagrange-ovih jednačina (11.14), čime dobijamo

$$\sum_{v=1}^N \left(\mathbf{r}_v \times \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \right) + \sum_{v=1}^N \left(\mathbf{r}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \right) = 0,$$

što se može napisati i kao

$$\frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N \left(\mathbf{r}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} \right) = 0. \quad (11.24)$$

Odatle neposredno proizlazi da je

$$\mathbf{M} \equiv \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_v} = \text{const}, \quad (11.25)$$

što se s obzirom na (11.16) može prikazati i u obliku

$$\mathbf{M} \equiv \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times m_v \mathbf{v}_v = \text{const}. \quad (11.26)$$

Prema tome, iz izotropije prostora u inercijalnim sistemima referencije, tj. iz zahteva da se pri rotaciji sistema kao celine za ma koji ugao Lagrange-eva funkcija ne promeni, proizilazi da ukupni moment impulsa izolovanog sistema $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_v \times m_v \mathbf{v}_v$ ostaje stalan u toku vremena, te predstavlja jedan integral kretanja.

Napomenimo na kraju da se ovakav prilaz zakonima održanja može uopštiti u vidu tzv. Noether-ine teoreme, o čemu će biti reči u idućem odeljku.

12. HAMILTON-OV PRINCIP

12.1. Elementi varijacionog računa

Pre nego što predemo na integralne principe mehanike, zadržimo se na elementima varijacionog računa. U tom cilju ograničimo se na najprostiji slučaj i posmatrajmo integral oblika

$$J = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (12.1)$$

gde je y izvesna funkcija od x

$$y = y(x) \quad (12.2)$$

Vrednost ovog integrala možemo naći na taj način što ćemo ovu funkciju uvrstiti u gornji integral, čime se integrand svodi na izvesnu funkciju samo od x

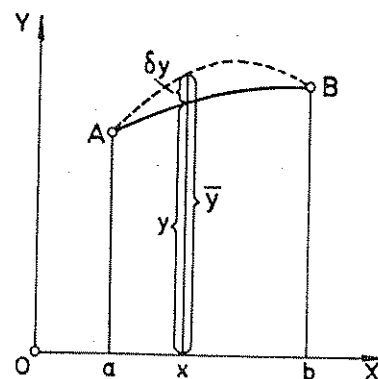
$$J = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \equiv \int_a^b \Phi(x) dx, \quad (12.3)$$

a rezultat ove integracije je neki određeni broj. Kao što je poznato iz matematike, ako imamo neku veličinu y koja zavisi od nezavisno promenljive x po nekom određenom zakonu i to tako da svakoj vrednosti x odgovara izvesna vrednost y , kažemo da je y funkcija od x , što se obično označava sa $y = f(x)$. Ako, međutim, imamo neku veličinu y koja zavisi od funkcije $f(x)$ kao nezavisno promenljive po nekom određenom zakonu i to tako da svakom obliku funkcije $f(x)$ odgovara izvesna brojna vrednost y , kažemo da je y funkcionala od $f(x)$, što se obično označava sa $y = F[f(x)]$. Pošto brojna vrednost integrala (12.3), pri fiksnom obliku funkcije $f(x, y, y')$ kao i pri datim granicama (a, b) , zavisi od oblika funkcije $y(x)$, vidimo da je J definisan gornjim integralom funkcionala od $y(x)$

$$J = F[y(x)] \quad (12.4)$$

Postavimo sad sledeći problem: od svih funkcija $y = f(x)$ koje prolaze kroz fiksne tačke A i B sa apscisama a i b (sl. 12.1) naći onu za koju integral J ima minimalnu vrednost. Označimo traženu funkciju sa $y(x)$, a bilo koju drugu od ovih funkcija sa $\bar{y}(x)$. Svakoj od ovih funkcija $\bar{y}(x)$ odgovara određena vrednost integrala (12.3), koju označimo sa $\bar{J}$

$$\bar{J} = \int_a^b f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) dx \equiv \int_a^b \bar{\Phi}(x) dx \quad (12.5)$$



Sl. 12.1

Uvedimo sad razliku funkcija $\bar{y}(x)$ i $y(x)$ za istu vrednost nezavisno promenljive

$$\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x), \quad (12.6)$$

pri čemu ćemo pretpostaviti da je $|\delta y(x)| \ll |y_{\max}|$ i tako definisana veličina naziva se *varijacija funkcije* $y(x)$. Pošto prema postavljenom uslovu sve funkcije $y = \bar{y}(x)$ moraju prolaziti kroz tačke A i B , varijacije δy za $x=a$ i $x=b$ moraju biti jednake nuli

$$\delta y(a) = 0, \quad \delta y(b) = 0 \quad (12.7)$$

Pošto se operacija variranja odnosi na promenu oblika funkcije za određenu vrednost nezavisno promenljive, a operacija diferenciranja na promenu funkcije po jedinici priraštaja nezavisno promenljive, ove su operacije nezavisne, pa prema definiciji pojma varijacije imamo

$$\delta y'(x) = \bar{y}'(x) - y'(x) = \frac{d}{dx} [\bar{y}(x) - y(x)],$$

tj. možemo izmeniti njihov redosled

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \delta y. \quad (12.8)$$

Po analogiji sa obrascem (12.5), možemo definisati i varijaciju bilo koje veličine koja zavisi od funkcija $y(x)$ odnosno $\bar{y}(x)$. Tako se varijacija integrala J definiše kao

$$\delta J = \bar{J} - J,$$

tj.

$$\delta J = \int_a^b \{f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - f(x, y(x), y'(x))\} dx \quad (12.9)$$

Sa ovako definisanim pojmovima postavljeni problem možemo formulisati i na sledeći način: od svih funkcija $y = \varphi(x)$ koje zadovoljavaju uslov $\delta y(a) = 0$ i $\delta y(b) = 0$ naći onu za koju integral J ima minimalnu vrednost, tj. za koju je $\delta J = 0$. Da bismo rešili ovaj problem, izračunajmo δJ definisano obrascem (12.9) i u tom cilju podimo od varijacije $\delta y'$

$$\delta y' = \bar{y}'(x) - y'(x),$$

odakle sledi

$$\bar{y}'(x) = y'(x) + \delta y' \quad (12.10)$$

Razvijmo sad funkciju $f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$ u Taylor-ov red u tački (x, y, y') , zanemarujući više članove zbog pretpostavke $|\delta y(x)| \ll |y_{\max}(x)|$

$$f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = f(x, y + \delta y, y' + \delta y') = f(x, y, y') + \\ + \delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 + \delta y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_0 + \dots,$$

gde se indeks nula odnosi na vrednosti (x, y, y') . Stoga se varijacija δJ prema obrascu (12.8) može napisati u obliku, izostavljajući indeks nula

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx. \quad (12.11)$$

Ovaj rezultat nam pokazuje kako se praktično vrši varijacija integrala ovakvog tipa: prvo se izmene mesta variranja i integriranja, što je dozvoljeno zbog nezavisnosti ovih operacija

$$\delta J = \delta \int f(x, y, y') dx = \int \delta f(x, y, y') dx,$$

a potom se varijacija δf napiše formalno po pravilu za totalni diferencijal, uzimajući samo umesto diferencijala varijacije nezavisno promenljivih i stavljajući $\delta x = 0$, jer prema našoj definiciji pojma varijacije (12.6) x se ne varira

$$\delta f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'. \quad (12.12)$$

Pošto varijacija $\delta y'$ nije nezavisna od δy , transformišimo drugi član parcijalnom integracijom, koristeći opet osobinu (12.8)

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} d(\delta y) \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_a^b - \int_a^b \delta y d \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right), \end{aligned}$$

a na osnovu uslova (12.7) integrisani deo otpada, tako da ostaje

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (12.13)$$

Tako izraz (12.11) za δJ dobija konačan oblik

$$\delta J = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} \delta y dx \quad (12.14)$$

Da bi ovaj izraz prema postavljenom zahtevu bio jednak nuli i to za ma kakve vrednosti δy , izraz u velikoj zagradi mora biti jednak nuli

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (12.15)$$

To je tzv. *Euler-Lagrange-eva jednačina*, koja predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda sa nepoznatom funkcijom $y(x)$. Rešenje ove jednačine $y=y(x)$ predstavlja onu funkciju iz familije $y=q(x)$ za koju integral ima minimalnu vrednost, čime je problem rešen. Važi i obrnuto, ali malo opštije: ako je ova jednačina zadovoljena, prema obrascu (12.14) biće $\delta J=0$, a to znači da tada J ima minimum, maksimum ili prevojnu tačku.

12.2. Pravi i zaobilazni put

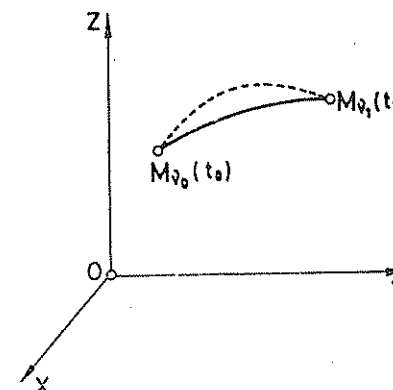
Da bismo formulisali integralne principe mehanike, moramo se prethodno upoznati sa nekim pomoćnim pojmovima. Posmatrajmo opet sistem od N čestica *bez veza ili sa idealnim vezama i potencijalnim silama* i neka ovaj sistem ima n stepeni slobode. Položaj ovog sistema možemo odrediti pomoću generalisanih koordinata i neka su one

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n.$$

Uočimo sad ma koju v -tu česticu sistema (sl. 12.2) i neka se ona u trenutku $t=t_0$ nalazi u položaju M_{v0} , a u trenutku $t=t_1$ u položaju M_{v1} . Stvarna putanja čestice označena je na slici punom linijom. Ako tako postupimo sa svakom česticom sistema, pri čemu svakoj čestici odgovaraju izvesne tačke M_{v0} i M_{v1} , skup svih ovih stvarnih putanja čestica sistema u intervalu vremena (t_0, t_1) naziva se *pravi put sistema*.

Zamislamo sad uporedo sa stvarnim kretanjem uočene v -te čestice i jedno drugo, *zaobilazno kretanje te čestice koje zadovoljava ove uslove*: 1) *vrši se za isto vreme od t_0 do t_1* 2) *vrši se između istih tačaka M_{v0} i M_{v1}* 3) *u saglasnosti je sa vezama* i 4) *vrlo malo odstupa od stvarnog kretanja*. Takva jedna putanja v -te čestice označena je na slici isprekidanom linijom, a takvih putanja ima beskonačno mnogo. Ako tako postupimo sa svakom česticom sistema, svaki takav skup tako zamišljenih putanja čestica sistema naziva se *zaobilazni (okolni) put sistema*.

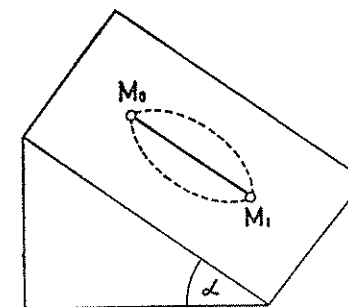
Uzmimo kao primer kretanje čestice niz strmu ravan (sl. 12.3) pod uticajem Zemljine teže bez početne brzine. Pravi put tada predstavlja deo prave $M_0 M_1$ u vertikalnoj ravni, a sve ostale bliske putanje po strmoj ravni koje spajaju iste položaje M_0 i M_1 i po kojima se posmatrana čestica kreće u istom vremenskom intervalu predstavljaju zaobilazne puteve.



Sl. 12.2

Prikažimo i geometrijsku interpretaciju ovih pojmova. U tom cilju uvedimo n -dimenzioni Euklidov prostor, koji predstavlja neposrednu generalizaciju Euklidovog trodimenzionog prostora i tačkom u tom prostoru smatramo svaki uređeni skup

$$P = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (12.16)$$



Sl. 12.3

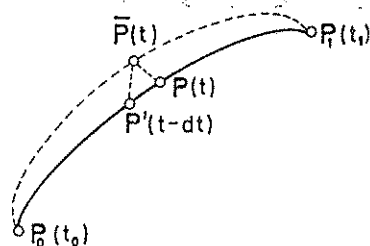
a metričku formu, tj. kvadrat rastojanja dveju beskonačno bliskih tačaka definišimo obrascem

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dq_i^2 \quad (12.17)$$

Tako definisan n -dimenzioni prostor naziva se *konfiguracioni prostor* i na taj način se položaj sistema čestica predstavlja jednom jedinom tačkom u konfiguracionom prostoru, čiji je broj dimenzija jednak broju stepeni slobode.

Neka je položaj našeg sistema u trenutku t_0 predstavljen tačkom P_0 (sl. 12.4) u konfiguracionom prostoru, a položaj sistema u trenutku t_1 tačkom P_1 i neka je pravi put sistema

prikazan punom linijom između tačaka P_0 i P_1 . Tada sve ostale bliske putanje u ovom prostoru koje spajaju ove tačke P_0 i P_1 predstavljaju zaobilazne puteve sistema.



Sl. 12.4

12.3. Varijacije generalisanih koordinata

Neka su konačne jednačine kretanja sistema po pravom putu date sistemom jednačina

$$q_i = q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (12.18)$$

a po nekom fiksiranom zaobilaznom putu

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (12.19)$$

gde crta iznad q_i označava da se radi o drugom obliku funkcije. Uočimo sad dva položaja sistema, jedan na pravom a drugi na zaobilaznom putu i to u istom trenutku t , predstavljena tačkama P i $\bar{P}$ u konfiguracionom prostoru (v. sl. 12.4). Razlike odgovarajućih generalisanih koordinata

$$\delta q_i = \bar{q}_i(t) - q_i(t) \quad (12.20)$$

uz uslov $|\delta q_i| \ll |q_i(t)|$ predstavljaju promene generalisanih koordinata kad se iz položaja P pomerimo u položaj $\bar{P}$. Zamislamo sad moguća pomeranja sistema iz nekog vrlo bliskog položaja P' na pravom putu sistema, koji odgovara trenutku $t-dt$, u položaj P odnosno $\bar{P}$ i neka su odgovarajuće promene generalisanih koordinata dq_i odnosno $d'\bar{q}_i$. Tada njihove razlike $d'\bar{q}_i - dq_i$ predstavljaju promene generalisanih koordinata kad se iz položaja P pomerimo u položaj $\bar{P}$, a to su veličine δq_i

$$\delta q_i = d'\bar{q}_i - dq_i \quad (12.21)$$

Oдавде vidimo da su veličine (12.20) specijalan slučaj varijacija generalisanih koordinata definisanih obrascem (10.11) u tom smislu što se ovde jedno od mogućih pomeranja poklapa sa stvarnim, te smo stoga i upotrebili istu oznaku. Ovako definisane veličine (12.20) takođe se nazivaju *varijacije generalisanih koordinata* i one se mogu smatrati kao *mera odstupanja zaobilaznog puta od pravog, koju karakteriše promena oblika funkcija $q_i(t)$ kad se sa pravog puta pređe na zaobilazni*.

Uopštavajući ovaj pojam, možemo definisati varijaciju ma kakve mehaničke veličine A na sledeći način. Neka je A vrednost ove veličine na pravom putu, a $\bar{A}$ vrednost te veličine na zaobilaznom putu bilo u istom trenutku t bilo u nekom integralnom obliku. Tada se njihova razlika

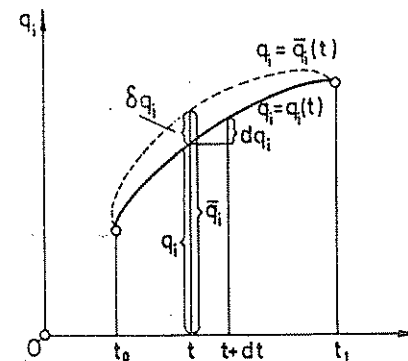
$$\delta A = \bar{A} - A \quad (12.22)$$

naziva *varijacija veličine A* i ona takođe predstavlja izvesnu meru odstupanja zaobilaznog puta od pravog.

Pošto se položaji sistema pri pravom i zaobilaznom putu u trenucima t_0 i t_1 poklapaju, sve varijacije generalisanih koordinata u trenucima t_0 i t_1 biće jednake nuli

$$\delta q_i(t_0) = 0, \quad \delta q_i(t_1) = 0 \quad (12.23)$$

Ma u kom drugom trenutku one su u opštem slučaju različite od nule. Uočimo sad ma koju i -tu generalisanu koordinatu q_i i prikažimo grafički funkcije $q_i(t)$ i $\bar{q}_i(t)$. Prema definiciji (12.20) prikazan je smisao varijacije δq_i za ma koji trenutak t , a uporedo sa tim i smisao diferencijala dq_i . Oдавде vidimo da *varijacija generalisane koordinate δq_i predstavlja njen priraštaj kad u određenom trenutku t pređemo sa pravog puta na zaobilazni, što odgovara promeni oblika funkcije $q_i(t)$, dok njen diferencijal dq_i predstavlja njen priraštaj kad se duž pravog puta pomerimo u vremenu sa t na $t+dt$* .



Sl. 12.5

Iz izloženoga se vidi da se operacija variranja odnosi na promenu oblika funkcije u određenom trenutku, a operacija diferenciranja na promenu vrednosti funkcije u toku vremena. Stoga su ove dve operacije međusobno nezavisne, pa možemo izmeniti njihov redosled

$$\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i, \quad (12.24)$$

tj. *varijacija vremenskog izvoda jednaka je vremenskom izvodu varijacije generalisane koordinate*. Na sličan način dolazimo do zaključka da se može izmeniti i red operacija variranja i integracije po vremenu.

Napomenimo da se može uvesti i opštiji pojam varijacije, gde se vrednosti q_i i $\bar{q}_i$ ne odnose više na isti trenutak vremena, tj. gde se i vreme varira

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t \quad (12.25)$$

To je tzv. totalna varijacija generalisane koordinate, međutim za tako definisanu varijaciju ne važi više gore navedena osobina (12.24).

12.4. Hamilton-ov princip

Da bismo formulisali Hamilton-ov integralni princip mehanike, podimo od Lagrange-evih diferencijalnih jednačina kretanja u generalisanim koordinatama (10.30)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12.26)$$

koje važe samo za sisteme sa potencijalnim silama. One imaju isti oblik kao Euler-Lagrange-eve jednačine varijacionog računa (12.15), te po analogiji sa integralom (12.1) formirajmo vremenski integral Lagrange-eve funkcije

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (12.27)$$

gde su q_i izvesne funkcije vremena

$$q_i = q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

koje ne moraju obavezno da odgovaraju pravom putu. Ovako definisan integral naziva se *Hamilton-ovo dejstvo*, a njegova vrednost može se naći na taj način što se funkcije $q_i = q_i(t)$ uvrste u gornji integral i izvrši integracija po vremenu

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t) dt, \quad (12.28)$$

čime se dobija izvestan broj. Brojna vrednost ovog integrala zavisi, pri fiksiranom obliku Lagrange-eve funkcije $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ i datim granicama (t_0, t_1) , od oblika funkcija $q_i(t)$, te *Hamilton-ovo dejstvo predstavlja funkcionalu od svih funkcija $q_i(t)$*

$$W = F[q_i(t)] \quad (12.29)$$

Nadimo sad izraz za varijaciju ovako definisanog dejstva δW u opštem slučaju. Ako su jednačine pravog puta (12.18), a bilo kog drugog puta (12.19), vrednost dejstva koje odgovara pravom putu data je izrazom (12.28), a dejstva za ma koji drugi

$$\bar{W} = \int_{t_0}^{t_1} L(\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t) dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \bar{\Phi}(t) dt \quad (12.30)$$

Tada je, prema opštoj definiciji (12.22), varijacija dejstva jednaka

$$\delta W = \bar{W} - W = \int_{t_0}^{t_1} \{L(\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\} dt, \quad (12.31)$$

koju možemo izračunati na sledeći način. Imajući u vidu da je prema navedenoj definiciji varijacije

$$\delta \bar{q}_i = \bar{q}_i(t) - q_i(t), \quad (12.32)$$

razvijmo funkciju $L(\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t)$ u Taylor-ov red i zanemarimo više članove zbog pretpostavke $|\delta q_i| \ll |q_i(t)|$

$$L(\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t) = L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^n \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^n \delta \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dots$$

Tada zamenom u obrascu (12.31) nalazimo da je

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad (12.33)$$

Do ovog rezultata možemo doći, saglasno primedbi uz obrazac (12.11), i na taj način što se izmene mesta variranja i integracije

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

pa se potom varijacija δL napiše formalno po pravilu za totalni diferencijal, zamenjujući diferencijale varijacijama i stavljajući $\delta t = 0$, jer se vreme prema definiciji (12.20) ne varira

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (12.34)$$

Da bismo se oslobodili varijacija generalisanih brzina $\delta \dot{q}_i$, koje nisu nezavisne od varijacija δq_i , transformišimo svaki integral u drugoj sumi parcijalnom integracijom, koristeći osobinu (12.24)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d(\delta q_i) = \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_i d \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned}$$

Tako konačno dobijamo da je varijacija Hamilton-ovog dejstva u opštem slučaju

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} \quad (12.35)$$

Ako varijacije generalisanih koordinata zadovoljavaju još uslove (12.23), koji karakterišu zaobilazni put sistema, integrirani deo otpada, pa imamo

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (12.36)$$

Pošto jednačine pravog puta zadovoljavaju Lagrange-eve diferencijalne jednačine kretanja (10.30), svi izrazi u zagradama su jednaki nuli, te dolazimo do zaključka da je duž pravog puta

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (12.37)$$

Prema tome, stvarno kretanje sistema čestica bez veza ili sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama vrši se tako da Hamilton-ovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost u odnosu na vrednosti dejstva duž svih zaobilaznih puteva.

Ovaj opšti stav, koji karakteriše stvarno kretanje sistema, naziva se *Hamilton-ov princip* i predstavlja jedan od najvažnijih zakona mehanike. On je formulisan u vidu uslova koji mora da zadovoljava dejstvo, koji ima integralni oblik i stoga ovaj princip predstavlja jedan

opšti integralni princip mehanike. Pri tome se može pokazati, analizom druge varijacije dejstva $\delta^2 W$, da se ovaj uslov stacionarnosti za dovoljno mali vremenski interval (t_0, t_1) uvek svodi na minimum dejstva.

Postavimo sad obrnut problem: od svih funkcija $q_i = f(t)$ koje zadovoljavaju uslove $\delta q_i(t_0) = 0$ i $\delta q_i(t_1) = 0$ naći one za koje je Hamilton-ovo dejstvo stacionarno, tj. za koje je $\delta W = 0$. Tada varijacija dejstva zbog navedenih uslova opet ima oblik (10.36), a da bi ovaj izraz za ma kakve vrednosti δq_i bio jednak nuli, zbog nezavisnosti varijacija δq_i svi koeficienti uz njih u gornjem izrazu moraju biti jednaki nuli

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Dakle, Hamilton-ov princip i Lagrange-eve jednačine za sisteme sa potencijalnim silama su međusobno ekvivalentni, tj. Lagrange-eve jednačine određuju upravo one funkcije $q_i(t)$ za koje Hamilton-ovo dejstvo pri dovoljno malom vremenskom intervalu (t_0, t_1) ima minimalnu vrednost.

Razmotrimo još dve Lagrange-eve funkcije $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ i $L'(q_i, \dot{q}_i, t)$ koje se razlikuju totalnim izvodom po vremenu bilo kakve funkcije koordinata i vremena

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t) \quad (12.38)$$

Pošto su Lagrange-eve jednačine ekvivalentne Hamilton-ovom principu, izračunajmo dejstvo koje odgovara Lagrange-evoj funkciji L'

$$W' = \int_{t_0}^{t_1} L' dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt} dt,$$

odnosno

$$W' = W + f(q_i(t_1), t_1) - f(q_i(t_0), t_0) \quad (12.39)$$

Pri variranju otpadaju, na osnovu uslova (12.23), dva poslednja člana, tako da se uslov $\delta W' = 0$, koji izražava Hamilton-ov princip, poklapa sa uslovom $\delta W = 0$

$$\delta W' = \delta W = 0, \quad (12.40)$$

te se i odgovarajuće Lagrange-eve jednačine poklapaju. Odavde vidimo da su sve Lagrange-eve funkcije koje se razlikuju totalnim izvodom po vremenu bilo kakve funkcije položaja i vremena međusobno ekvivalentne, tj. daju iste Lagrange-eve jednačine.

12.5. Maupertuis-Lagrange-ev princip

Ako je sistem konzervativan i to tako da se kretanje i na zaobilaznom putu vrši sa istom energijom, imaćemo

$$T + U = E = \text{const}, \quad \delta E = 0 \quad (12.41)$$

Tada se Lagrange-eva funkcija može napisati u obliku

$$L = T - U = T - (E - T) = 2T - E,$$

pa Hamilton-ovo dejstvo biće

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt - E \int_{t_0}^{t_1} dt$$

ili kraće

$$W = W_1 - E(t_1 - t_0), \quad (12.42)$$

gde smo uveli oznaku

$$W_1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt \quad (12.43)$$

To je tzv. Lagrange-ovo dejstvo, a Hamilton-ov princip se transformiše u

$$\delta W = \delta W_1 - (t_1 - t_0) \delta E = 0,$$

što se s obzirom na uslov $\delta E = 0$ svodi na

$$\delta W_1 = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0 \quad (12.44)$$

Prema tome, ako je sistem konzervativan i kretanje na zaobilaznom putu se vrši sa istom energijom, Lagrange-ovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost. Ovo je Maupertuis-Lagrange-ev princip, za koji se može pokazati da važi i u opštijem obliku

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0, \quad (12.45)$$

gde je Δ totalna varijacija, definisana obrascem (12.25), pri čemu se varira i vreme.

U slučaju jedne čestice ovaj princip može se formulisati i u drugom obliku. Naime, tada se $2T dt$ može napisati kao

$$2T dt = m v^2 dt = m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s},$$

gde je $\mathbf{p}$ impuls čestice, a $d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$ element pređenog puta, pa Maupertuis-Lagrange-ev princip (12.44) dobija vid

$$\delta \int_{M_0}^{M_1} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (12.46)$$

gde su M_0 i M_1 početne i krajnje tačke putanje. Ovako formulisani princip pokazuje karakterističnu formalnu sličnost sa tzv. Fermat-ovim principom geometrijske optike, o kome ćemo govoriti u elektrodinamici, što ukazuje na analogiju između mehanike i geometrijske optike.

12.6. Teorema Emmi Noether

Pomoću Hamilton-ovog dejstva može se ustanoviti jedna opšta veza između transformacija koje ostavljaju dejstvo invarijantnim i zakona održanja. U tom cilju posmatrajmo ma kakvu neprekidnu transformaciju generalisanih koordinata

$$q_i \rightarrow q_i' = q_i'(q_k, t, \epsilon) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (12.47)$$

koja zavisi od nekog beskonačno malog parametra ϵ i pretpostavimo da se ovaj sistem jednačina može rešiti po starim koordinatama q_i . Postavimo još uslov da za $\epsilon=0$ ova transformacija prelazi u identičnost

$$q_i'(q_i, t, 0) = q_i \quad (12.48)$$

Formirajmo sad razliku generalisane koordinate q_i za $\varepsilon \neq 0$ i $\varepsilon = 0$ i označimo je sa $\delta^* q_i$

$$\delta^* q_i = q_i'(q_k, t, \varepsilon) - q_i'(q_k, t, 0) \quad (12.49)$$

Ovako definisana varijacija ne odnosi se na zaobilazni put, već na promenu generalisane koordinate izazvanu promenom parametra ε , te ne zadovoljava uslove (12.23). Ako funkciju $q_i'(q_k, t, \varepsilon)$ razvijemo u Taylor-ov red u tački $\varepsilon = 0$ i zanemarimo više članove, imaćemo

$$q_i'(q_k, t, \varepsilon) = q_i'(q_k, t, 0) + \varepsilon \left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \dots,$$

čime dobijamo

$$\delta^* q_i = \varepsilon \left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad (12.50)$$

Odgovarajuća varijacija Hamilton-ovog dejstva, koja je u opštem slučaju određena obrascem (12.35), kad su zadovoljene Lagrange-eve jednačine imaće oblik

$$\delta^* W = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^* q_i \right|_{t_0}^{t_1},$$

što se u našem slučaju na osnovu prethodnog obrasca svodi na

$$\delta^* W = \varepsilon \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right|_{t_0}^{t_1} \quad (12.51)$$

Postavimo sad uslov da dejstvo ostaje invarijantno, tj. da je $\delta^* W = 0$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \Big|_{t_0},$$

odakle zaključujemo da zbog proizvoljnosti t_0 i t_1 posmatranoj transformaciji odgovara jedan integral kretanja

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \text{const} \quad (12.52)$$

Prema tome, svakoj neprekidnoj transformaciji koordinata sa jednim beskonačno malim parametrom pri kojoj Hamilton-ovo dejstvo ostaje invarijantno odgovara jedan prvi integral Lagrange-evih jednačina. Ovaj stav naziva se teorema Emmy Noether i igra veliku ulogu u klasičnoj i kvantnoj teoriji polja.

Ilustracije radi, posmatrajmo translaciju izolovanog sistema čestica duž X ose za beskonačno malu veličinu ε

$$x_v' = x_v + \varepsilon, \quad y_v' = y_v, \quad z_v' = z_v \quad (12.53)$$

postavimo uslov da dejstvo pri tome ostane invarijantno. Kao što smo ranije videli, ova transformacija karakteriše homogenost prostora u inercijalnim sistemima referencije, koja se sastoji u tome da osobine izolovanih sistema čestica pri njegovom paralelnom prenosu moraju ostati nepromenjene. Prema gore navedenoj Noether-inoj teoremi ovoj transformaciji mora neposredno odgovarati jedan integral kretanja oblika (12.52)

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} \left(\frac{\partial x_v'}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \text{const}$$

U ovom slučaju je $\partial x_v' / \partial \varepsilon = 1$ za svako v , pa i za $\varepsilon = 0$, a parcijalni izvodi $\partial L / \partial \dot{x}_v$ predstavljaju x-komponente impulsa $m_v \dot{x}_v$, tako da prethodna jednačina dobija oblik

$$\sum_{v=1}^N m_v \dot{x}_v = \text{const} \quad (12.54)$$

Odavde vidimo da transformaciji (12.53) pri kojoj dejstvo ostaje invarijantno odgovara kao prvi integral zakon održanja projekcije ukupnog impulsa sistema na X-osu. Na sličan način, polazeći od drugih transformacija koordinata, mogu se dobiti i ostali zakoni održanja.

12.7. Smisao varijacionih principa

Hamilton-ov integralni princip, kao tipičan predstavnik varijacionih principa, pokazuje izvesna preimućstva varijacione koncepcije. Pre svega, on u kompaktnoj formi sadrži u sebi svu mehaniku sistema sa potencijalnim silama i u njemu figurišu samo takve fizičke veličine koje nisu vezane sa posebnim sistemom koordinata. Stoga je ovaj princip invarijantan u odnosu na bilo kakve transformacije generalisanih koordinata.

Druga karakteristika ovog principa sastoji se u tome što se on može proširiti i na sisteme koji nisu čisto mehaničke prirode, kao na pr. elastične sredine, elektromagnetna polja, polja elementarnih čestica. Pri tome se ovaj princip formuliše na sledeći način: ako su poznate jednačine posmatranog sistema, kao na pr. Maxwell-ove jednačine elektromagnetnog polja, postavlja se pitanje da li se te jednačine mogu shvatiti kao Euler-Lagrange-eve jednačine, koje izražavaju stacionarnost nekog integrala. Ako je to moguće, to je odgovarajući Hamilton-ov princip i tako shvaćen princip može se primenjivati u raznim granama teorijske fizike: u mehanici kontinuuma, termodinamici, elektrodinamici, teoriji relativnosti, kvantnoj mehanici i kvantnoj teoriji polja. Na taj način Hamilton-ov princip se može smatrati jednim opštim principom teorijske fizike, koji objedinjuje razne njene grane u jednu jedinstvenu celinu.

13. HAMILTON-OVE JEDNAČINE

13.1. Generalisani impulsi

Posmatrajmo opet sistem od N čestica sa n stepeni slobode bez veza ili sa idealnim holonomnim vezama i ma kakvim silama. Videli smo da su u tom slučaju najpogodnije diferencijalne jednačine kretanja Lagrange-eve jednačine (10.32)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.1)$$

koje predstavljaju sistem od n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda u odnosu na nepoznate funkcije $q_i(t)$. Postavimo sad pitanje može li se sniziti red ovih diferencijalnih jednačina, tako da ovaj sistem diferencijalnih jednačina drugog reda zamenimo izvesnim sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda. Očevидno je da se to može postići samo na taj način da se broj diferencijalnih jednačina udvostruči, čime se i broj nepoznatih funkcija takođe mora udvostručiti, što se može uraditi na beskonačno mnogo načina.

Posmatranjem Lagrange-evih jednačina (13.1) vidimo da se taj cilj najpodesnije može postići ako za nove nepoznate funkcije uzmemo veličine $\partial L / \partial \dot{q}_i$, koje ćemo označiti sa p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.2)$$

Ovakvo definisane veličine nazivaju se *generalisani impulsi*, pri čemu *svakoj generalisanoj koordinati odgovara jedan konjugovan (pridružen) generalisani impuls*. Međutim, *generalisani impulsi ne moraju imati dimenziju impulsa*, kao što ni generalisane koordinate ne moraju imati dimenziju dužine. Prema načinu uvođenja *generalisani impulsi su potpuno ravnopravni sa generalisanim koordinatama*, a zajedno sa njima nazivaju se *kanonske promenljive*.

Da bismo videli smisao generalisanih impulsa, posmatrajmo slobodno kretanje sistema i za generalisane koordinate uzmimo pravougle koordinate čestica sistema. Tada imamo

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (\dot{x}_v^2 + \dot{y}_v^2 + \dot{z}_v^2) - U(x_v, t), \quad (13.3)$$

pa su odgovarajući generalisani impulsi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_v} = m_v \dot{x}_v, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_v} = m_v \dot{y}_v, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_v} = m_v \dot{z}_v, \quad (13.4)$$

a to su komponente impulsa čestica sistema. Dakle, u slučaju slobodnog kretanja sistema i pravouglavih koordinata generalisani impulsi predstavljaju komponente impulsa čestica sistema i u tom smislu generalisani impulsi predstavljaju generalizaciju pojma impulsa.

Sistem jednačina $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$)

Ispitajmo sad detaljnije sistem jednačina (13.2), koji definiše generalisane impulse. Ako posmatramo opšti slučaj kad uopšteni potencijal može zavisiti i od generalisanih brzina $\dot{q}_i$, kinetička energija sistema prema obrascu (10.17) je kvadratna funkcija, a uopšteni potencijal je oblika (10.29), tj. linearna funkcija generalisanih brzina, koja se u slučaju običnog potencijala svodi na $U(q_i, t)$. Stoga je Lagrange-eva funkcija u opštem slučaju oblika

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i + C - \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i - \beta$$

ili kraće

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n b_i' \dot{q}_i + C', \quad (13.5)$$

gde je $b_i' = b_i - \alpha_i$, $C' = C - \beta$. Generalisani impulsi, tj. parcijalni izvodi $\partial L / \partial \dot{q}_i$ biće tada linearne funkcije generalisanih brzina

$$p_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k + b_i' \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.6)$$

To je eksplicitan oblik sistema jednačina (13.2), koje nam daju veze između generalisanih impulsa i generalisanih brzina.

Da bismo ispitali mogućnost rešavanja ovog sistema jednačina po veličinama $\dot{q}_i$, ispitajmo determinantu ovog sistema $|a_{ik}|$. Ako pretpostavimo da je ova determinanta jednaka nuli

$$|a_{ik}| = 0,$$

to bi bio uslov da sistem homogenih jednačina po $\dot{q}_k$ sa istim koeficijentima

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (13.7)$$

ima rešenja različita od nule $\dot{q}_k \neq 0$. Ovaj sistem jednačina može se napisati i u obliku

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n),$$

gde je T_2 kvadratni član kinetičke energije. Pošto je prema Euler-ovoj teoremi o homogenim funkcijama (11.7)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2 T_2$$

zaključujemo da i T_2 mora biti jednako nuli, što je moguće samo tada kad su svi $\dot{q}_i$ jednaki nuli. Protivrečnost ovih zaključaka očividno pokazuje da naša pretpostavka $|a_{ik}| = 0$ nema smisla, te mora biti

$$|a_{ik}| \neq 0 \quad (13.8)$$

Tada se rešavanjem sistema jednačina (13.2) po promenljivama $\dot{q}_i$ dobijaju rešenja oblika

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} p_k + d_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.9)$$

gde su c_{ik} i d_i neki novi koeficijenti.

Prema tome, sistem jednačina koji definiše generalisane impulse u klasičnoj mehanici uvek se može rešiti po generalisanim brzinama, te se generalisane brzine uvek mogu zameniti generalisanim impulsima.

13.2. Primer

Uzmimo kao primer kretanje jedne čestice u ravni prikazano u polarnim koordinatama. Tada je Lagrange-eva funkcija na osnovu obrasca (3.15)

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r, \varphi, t), \quad (13.10)$$

pa su odgovarajući generalisani impulsi

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}, \quad (13.11)$$

pri čemu smo indeksom r odnosno φ označili odgovarajuće generalisane koordinate. Prvi generalisani impuls ima dimenziju impulsa, međutim drugi nema tu dimenziju. Istovremeno vidimo da se ovaj sistem jednačina zaista može rešiti po generalisanim brzinama

$$\dot{r} = \frac{1}{m} p_r, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{m r^2} p_\varphi \quad (13.12)$$

Ispitajmo još smisao generalisanog impulsa p_φ . U tom cilju posmatrajmo element površi (sl. 13.1) koju opiše vektor položaja $\mathbf{r}$ posmatrane čestice u intervalu vremena $(t, t+dt)$

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \quad (13.13)$$

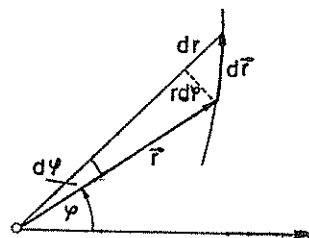
Opisana površina po jedinici vremena, tzv. sektorska brzina tada je

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2m} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}),$$

tj.

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{M} \quad (13.14)$$

gde je M moment impulsa ove čestice. Oдавде vidimo da je *sektorska brzina uvek srazmerna momentu impulsa čestice*.



Sl. 13.1

U našem slučaju, prema slici vidimo da je, uz zanemarivanje beskonačno malih veličina višeg reda

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

pa je intenzitet sektorske brzine

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \quad (13.15)$$

Intenzitet momenta impulsa prema obrascu (13.14) tada iznosi

$$M = 2m \frac{dS}{dt} = m r^2 \dot{\varphi},$$

a to je prema drugom obrascu (13.11) generalisani impuls p_φ

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = M \quad (13.16)$$

Dakle, pri kretanju čestice u ravni generalisani impuls p_φ predstavlja intenzitet momenta impulsa ove čestice. Iz tog razloga se moment impulsa katkad zove i *angularni moment*.

13.3. Hamilton-ove jednačine

Predimo sad na dobijanje traženih diferencijalnih jednačina kretanja prvog reda. Ako uvedemo generalisane impulse (13.2) kao nove nepoznate funkcije. Lagrange-ove jednačine (13.1) dobijaju oblik

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*,$$

tj.

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.17)$$

U ovom vidu Lagrange-evih jednačina figurišu samo prvi izvodi nepoznatih funkcija q_i i p_i . S druge strane, formirajmo varijaciju Lagrange-ove funkcije $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, koja prema obrascu (12.34) iznosi

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i, \quad (13.18)$$

pa prema definiciji generalisanih impulsa (13.2) i Lagrange-evim jednačinama (13.17) dobijamo

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i + \sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{q}_i. \quad (13.19)$$

Pošto je

$$p_i \delta \dot{q}_i = \delta(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i \delta p_i,$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i + \delta \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i,$$

a otuda

$$\delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i + \sum_{i=1}^n (-\dot{p}_i + Q_i^*) \delta q_i \quad (13.20)$$

Oдавде vidimo da je izraz u zagradi takav da je njegova varijacija linearna funkcija od δp_i i δq_i , te ovaj izraz, koji označimo sa H , možemo smatrati funkcijom od svih generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (13.21)$$

Ovako definisana funkcija $H(q_i, p_i, t)$ naziva se *Hamilton-ova funkcija*.

Uvodeći oznaku (13.21), možemo relaciju (13.20) napisati u obliku

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i \quad (13.22)$$

Međutim, možemo i neposredno formirati varijaciju Hamilton-ove funkcije, smatrajući je funkcijom od promenljivih q_i, p_i i t

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i$$

Poređenjem ovih obrazaca zaključujemo da zbog nezavisnosti varijacija δp_i i δq_i odgovarajući koeficijenti uz njih moraju biti međusobno jednaki

$$\frac{dp_i}{dt} - Q_i^* = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.23)$$

Ako su sve sile potencijalne, ove se jednačine svode na

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.24)$$

Jednačine (13.23) odnosno (13.24) nazivaju se *Hamilton-ove jednačine* ili *kanonske jednačine kretanja* i one predstavljaju tražene diferencijalne jednačine kretanja prvog reda sa nepoznatim funkcijama $q_i(t)$ i $p_i(t)$.

Hamilton-ova funkcija biće tada jednaka

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (L_2 + L_1 + L_0) \dot{q}_i - (L_2 + L_1 + L_0),$$

odnosno

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L_2 - L_1 - L_0 \quad (13.33)$$

Na prva dva člana možemo primeniti Euler-ovu teoremu o homogenim funkcijama (11.7)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2 L_2 \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L_1,$$

tako da se prethodni izraz transformiše u

$$H = L_2 - L_0 \quad (13.34)$$

Zamenimo li još ovde L_2 i L_0 prema obrascima (13.32), konačno dobijamo da je Hamilton-ova funkcija u opštem slučaju

$$H = T_2 - T_0 + U \quad (13.35)$$

Ako je kretanje slobodno ili sa stacionarnim vezama, kinetička energija je homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, tako da tada važi $T = T_2$, $T_0 = 0$, te je

$$H = T + U = E \quad (13.36)$$

Prema tome, ako su sile koje deluju na čestice sistema bar delom potencijalne, a kretanje sistema slobodno ili sa stacionarnim vezama, Hamilton-ova funkcija predstavlja ukupnu energiju sistema. Pri tome podvucimo da u ovako definisanu energiju E ne ulazi celokupni uopšteni potencijal, već samo njegov član nezavisan od generalisanih brzina, koji odgovara običnom potencijalu i koji čak sme zavisiti i eksplicitno od vremena.

Ispitajmo još pod kojim uslovima je Hamilton-ova funkcija integral kretanja. U tom cilju diferencirajmo je totalno po vremenu

$$\frac{d}{dt} H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (13.37)$$

pa zamenimo ovde $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ prema Hamilton-ovim jednačinama (13.24)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^* \right) + \frac{\partial H}{\partial t},$$

odnosno

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i \quad (13.38)$$

Odavde vidimo da ako je $\partial H / \partial t = 0$ i $\sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i = 0$, neposredno dobijamo da je

$$H(q_i, p_i, t) = \text{const} \quad (13.39)$$

Dakle, ako Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena i ako nema nepotencijalnih sila ili je bar $\sum Q_i^* \dot{q}_i = 0$, ona predstavlja jedan integral kretanja, koji se obično poklapa sa zakonom održanja energije. Naime, ovakav slučaj imamo ako je kretanje sis-

tema slobodno ili sa stacionarnim vezama i ako su sve sile konzervativne, ali i u slučaju kad imamo uopšteni potencijal čiji nezavisni član ne zavisi eksplicitno od vremena.

13.6. Analiza Hamilton-ovih jednačina

Predimo sad na analizu samih Hamilton-ovih jednačina (13.23), u kojima pretpostavljamo da je poznata Hamilton-ova funkcija $H(q_i, p_i, t)$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Ove jednačine predstavljaju sistem od $2n$ simultanih običnih diferencijalnih jednačina prvog reda rešenih po $\dot{p}_i$ i $\dot{q}_i$, u kojima su nepoznate funkcije sve generalisane koordinate q_i i svi generalisani impulsi p_i , a nezavisno promenljiva vreme t , pri čemu je broj ovih jednačina jednak dvostrukom broju stepeni slobode.

Pri primeni Hamilton-ovih jednačina postupa se na sličan način kao sa Lagrange-evim jednačinama. Posle izbora generalisanih koordinata moraju se naći odgovarajući generalisani impulsi, a zatim na način kako smo malo pre izložili Hamilton-ova funkcija izražena pomoću generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i eventualno vremena. Potom treba formirati Hamilton-ove jednačine za svaku kanonsku promenljivu i rešiti ovaj sistem jednačina uz date početne uslove q_{i0} i p_{i0} , čime se dobijaju generalisane koordinate i generalisani impulsi kao funkcije vremena. Rešenja ovih jednačina su jednoznačna, jer su Hamilton-ove jednačine eksplicitno rešene po izvodima najvišeg reda, što je u saglasnosti sa principom kauzalnosti. Ukoliko su veze stacionarne i sistem konzervativan, Hamilton-ova funkcija može se naći i na taj način što se ukupna energija sistema izrazi u funkciji generalisanih koordinata i generalisanih impulsa.

Ako su sve sile potencijalne, u izvesnim slučajevima Hamilton-ove jednačine omogućavaju neposredno nalazjenje prvih integrala, kao na pr. u obliku (13.39). Ukoliko Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od jedne ili više generalisanih koordinata, tj. ako je

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r), \quad (13.40)$$

odgovarajuće Hamilton-ove jednačine za generalisane impulse daju

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

a otuda

$$p_i = \text{const} \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (13.41)$$

Pošto je prema definiciji Hamilton-ove funkcije (13.21) $\partial H / \partial q_i = \partial L / \partial q_i$, iz uslova (13.40) sledi da je u tom slučaju i $\partial L / \partial q_i = 0$, pa takve generalisane koordinate, koje ne ulaze eksplicitno u Hamilton-ovu funkciju, ne figurišu eksplicitno ni u Lagrange-ovoj funkciji. Stoga su one prema definiciji (10.36) ciklične koordinate, a odavde vidimo da svakoj cikličnoj koordinati odgovara jedan prvi integral oblika $p_i = \text{const}$. Hamilton-ova funkcija tada postaje funkcija samo od $n-r$ generalisanih koordinata i toliko isto promenljivih generalisanih impulsa, čime je problem efektivno sveden na problem sa $n-r$ stepeni slobode.

Posmatrajmo još slučaj kad dve odgovarajuće kanonske promenljive figurišu u Hamilton-ovoj funkciji samo preko neke funkcije, na pr. $f(q_i, p_i)$. To su tzv. združene kanonske promenljive, a Hamilton-ove jednačine za p_i i q_i glase

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (13.42)$$

Deobom ovih jednačina dobijamo

$$\frac{\dot{p}_1}{\dot{q}_1} = \frac{dp_1}{dq_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial p_1}},$$

čime smo eliminisali vreme, a otuda

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1} dp_1 = 0,$$

odakle integracijom sledi kao prvi integral

$$f(q_1, p_1) = \text{const} \quad (13.43)$$

Međutim, poseban značaj Hamilton-ovih jednačina leži u sledećem. Dok nepoznate funkcije u Lagrange-evim jednačinama — generalisane koordinate određuju samo položaj sistema, nepoznate funkcije u Hamilton-ovim jednačinama — generalisane koordinate i generalisani impulsi određuju ne samo položaj već i stanje kretanja sistema. Dakle, Hamilton-ove jednačine neposredno određuju mehaničko stanje sistema i stoga one igraju veliku ulogu u svim onim granama teorijske fizike koje baziraju na pojmu stanja sistema. Takav slučaj imamo u statističkoj fizici i kvantnoj mehanici, gde su ove jednačine od posebnog interesa.

Odgovarajuća geometrijska interpretacija može se dobiti uvođenjem 2n-dimenzionog Euklidovog prostora, u kome pod tačkom podrazumevamo svaki ureden skup

$$x = (q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) \quad (13.44)$$

i u kome je metrička forma definisana obrascem

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dq_i^2 + \sum_{i=1}^n dp_i^2 \quad (13.45)$$

Tako definisan 2n-dimenzioni Euklidov prostor naziva se fazni prostor i pomoću njega se mehaničko stanje sistema čestica predstavlja jednom jedinom tačkom, tzv. reprezentativnom tačkom u faznom prostoru, čiji je broj dimenzija jednak dvostrukom broju stepeni slobode.

13.7. Primeri

1. Posmatrajmo kretanje neke čestice pod uticajem sile $F=f(r)r_0$, tzv. centralne sile (sl. 13.2), čiji potencijal $U(r)$ zavisi samo od rastojanja od izvora sile. Ako za generalisane koordinate uzmemo polarne koordinate (r, ϑ, φ) , Lagrange-eva funkcija ove čestice s obzirom na obrazac (3.16) biće

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (13.46)$$

Formirajmo prvo generalisane impulse, tj. sistem jednačina (13.2)

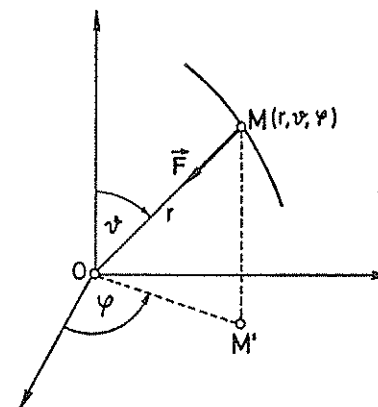
$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta}; \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi},$$

čijim rešavanjem po generalisanim brzinama dobijamo

$$\dot{r} = \frac{1}{m} p_r, \quad \dot{\vartheta} = \frac{1}{mr^2} p_{\vartheta}; \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2 \sin^2 \vartheta} p_{\varphi} \quad (13.47)$$

Ako ove izraze uvrstimo u Hamilton-ovu funkciju (13.21), nalazimo

$$H = p_r \dot{r} + p_{\vartheta} \dot{\vartheta} + p_{\varphi} \dot{\varphi} - L = p_r \frac{p_r}{m} + p_{\vartheta} \frac{p_{\vartheta}}{mr^2} + p_{\varphi} \frac{p_{\varphi}}{mr^2 \sin^2 \vartheta} - \\ - \frac{1}{2} m \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_{\vartheta}^2}{m^2 r^4} + r^2 \sin^2 \vartheta \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 r^4 \sin^4 \vartheta} \right) + U(r)$$



Sl. 13.2

odnosno, posle grupisanja srodnih članova

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_{\vartheta}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + U(r) \quad (13.48)$$

Formirajmo sad odgovarajuće Hamilton-ove jednačine (13.24). Prvi sistem jednačina za ovaj slučaj glasi, imajući u vidu da U zavisi samo od r

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{mr^3} \left(p_{\vartheta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \vartheta} \right) - \frac{dU}{dr} \\ \dot{p}_{\vartheta} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{1}{mr^2} \cdot \frac{p_{\varphi}^2 \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \\ \dot{p}_{\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

Poslednja jednačina neposredno daje kao prvi integral $p_{\varphi} = \text{const}$, što odgovara činjenici da je φ ovde ciklična koordinata, a ukoliko je ova konstanta jednaka nuli, biće i $p_{\vartheta} = \text{const}$. Drugi sistem Hamilton-ovih jednačina biće

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta}} = \frac{p_{\vartheta}}{mr^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2 \sin^2 \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (13.50)$$

Ove jednačine se poklapaju sa jednačinama (13.47), tj. ekvivalentne su definiciji generalisanih impulsa, što važi i u opštem slučaju, dok su jednačine (13.49) ekvivalentne diferencijalnim jednačinama kretanja.

2. Kao drugi primer navedimo kretanje naelektrisanе čestice u elektromagnetnom polju, što istovremeno pokazuje kako se Lagrange-ov i Hamilton-ov formalizam primenjuju i van mehanike. Pokažimo pre svega da je odgovarajuća Lagrange-eva funkcija

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (13.51)$$

gde su φ i $\mathbf{A}$ tzv. skalarni i vektorski potencijal elektromagnetnog polja, koji zavise od položaja i vremena i povezani su sa jačinama električnog i magnetnog polja relacijama

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (13.52)$$

Uzmimo za generalisane koordinate pravougle koordinate čestice i napišimo eksplicitno Lagrange-ovu funkciju

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z), \quad (13.53)$$

odakle se neposredno vidi da se ovde radi o uopštenom potencijalu. Odavde sledi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} + e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

pa formirajmo Lagrange-ovu jednačinu za koordinatu x

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (13.54)$$

Imajući u vidu da $A_x(x, y, z, t)$ zavisi od t kako direktno tako i preko x, y, z , biće

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

te prethodna jednačina dobija oblik

$$m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0.$$

odnosno posle sređivanja

$$m\ddot{x} = e\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + e\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\right\} \quad (13.55)$$

Ovu jednačinu, s obzirom na relacije (13.52), možemo napisati i pomoću komponenata jačina električnog i magnetnog polja

$$m\ddot{x} = eE_x + e(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y),$$

što predstavlja prvu od triju skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja, kojima odgovara vektorska

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.56)$$

Odavde vidimo da navedena Lagrange-eva funkcija (13.51) zaista odgovara kretanju naelektrisanе čestice u elektromagnetnom polju pod dejstvom Lorentz-ove sile sa uopštenim potencijalom

$$V = e\varphi - e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (13.57)$$

Generalisani impulsi posmatrane čestice u elektromagnetnom polju prema definiciji (13.2) biće

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z,$$

što se može prikazati i vektorski

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (13.58)$$

Odgovarajuća Hamilton-ova funkcija tada će prema obrascu (13.21) imati oblik

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \left(\frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\right) = \\ &= mv^2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi, \end{aligned}$$

a eliminacijom brzine $\mathbf{v}$ pomoću obrasca (13.58) dobijamo

$$H = \frac{1}{2m} \{\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\}^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t) \quad (13.59)$$

To je tražena Hamilton-ova funkcija naelektrisanе čestice u elektromagnetnom polju, izražena pomoću vektora položaja čestice, od koga zavise φ i $\mathbf{A}$, generalisanog impulsa i vremena. Odgovarajuće Hamilton-ove jednačine (13.24) imaju oblik

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{e}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - e\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{e}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - e\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{e}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - e\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (13.60)$$

kao i

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}(p_x - eA_x) \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}(p_y - eA_y) \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m}(p_z - eA_z) \end{aligned} \right\}, \quad (13.61)$$

pri čemu se može pokazati da su jednačine (13.60) ekvivalentne diferencijalnoj jednačini kretanja čestice (13.56).

13.8. Jednačine kretanja i Poisson-ove zagrade

U tesnoj vezi sa Hamilton-ovim jednačinama stoje tzv. Poisson-ove zagrade, koje možemo uvesti na sledeći način. Pretpostavimo da su sve sile *potencijalne*, pa uočimo da kakvu mehaničku veličinu F koja je funkcija kanonskih promenljivih i vremena, tj. oblika $F(q_i, p_i, t)$

$$F = F(q_i, p_i, t)$$

i potražimo njen totalni izvod po vremenu

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (13.62)$$

Ako u ovom izrazu zamenimo $\dot{p}_i$ i $\dot{q}_i$ prema Hamilton-ovim jednačinama (13.24), dobijamo

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Posmatrajući prvi član, vidimo da ako uvedemo oznaku

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right), \quad (13.63)$$

prethodnu jednačinu možemo napisati u konciznom obliku

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (13.64)$$

Izraz (13.63) naziva se *Poisson-ova zagrada funkcija* $u(q_i, p_i, t)$ i $v(q_i, p_i, t)$ i označava se i simbolima $()$ ili $\{ \}$, a dobijena jednačina (13.64) određuje totalni izvod po vremenu ma kakve funkcije oblika $F(q_i, p_i, t)$. Pošto su pri ovom izvođenju korišćene Hamilton-ove jednačine, poslednja jednačina je njima ekvivalentna, te se može smatrati i kao *opšta jednačina kretanja za sisteme sa potencijalnim silama*.

Primenimo sad jednačinu (13.64) za dobijanje pogodnijeg oblika Hamilton-ovih jednačina. Stavimo li $F = p_i$, pošto p_i ne zavisi eksplicitno od vremena, imamo

$$\frac{dp_i}{dt} = [p_i, H] \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.65)$$

Stavimo li pak $F = q_i$, pošto ni q_i ne zavisi eksplicitno od vremena, dobijamo

$$\frac{dq_i}{dt} = [q_i, H] \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.66)$$

Ove jednačine predstavljaju *Hamilton-ove jednačine u obliku Poisson-ovih zagrada*. One imaju to preimućstvo što su u njima formalno razdvojene generalisane koordinate i generalisani impulsi, naime prvi sistem jednačina sadrži samo po jednu generalisanu koordinatu, a drugi samo po jedan generalisan impuls.

Analogija sa kvantnom mehanikom

Jednačine klasične mehanike u ovom obliku pokazuju veliku formalnu sličnost sa osnovnim jednačinama kvantne mehanike. Naime, u kvantnoj mehanici se pokazuje da u Heisenberg-ovom formalizmu, gde osnovni pojam predstavlja dinamička promenljiva, osnovna jednačina glasi

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}) + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}, \quad (13.67)$$

gde je $\hbar = h/2\pi$ redukovana Planck-ova konstanta. Ova jednačina određuje kako se menja sa vremenom dinamička promenljiva prikazana operatorom $\hat{F}$ u ovom formalizmu i predstavlja kvantnu jednačinu kretanja, pri čemu $\hat{H}$ predstavlja operator koji odgovara Hamilton-ovoj funkciji. Upoređujući jednačine (13.64) i (13.67), vidimo da postoji *formalna korespondencija između klasične i kvantne mehanike*

$$F \rightarrow \hat{F}, \quad [F, H] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} (\hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}), \quad (13.68)$$

tj. dinamičkim promenljivama klasične mehanike odgovaraju izvesni operatori, a klasičnim Poisson-ovim zagradama komutatori odgovarajućih operatora.

13.9. Osobine Poisson-ovih zagrada

Poisson-ove zagrade, definisane obrascem (13.63), imaju nekoliko važnih matematičkih osobina, koje se mogu proveriti neposrednim izračunavanjem levih strana:

$$[g, f] = -[f, g], \quad [f, c] = 0 \quad (13.69)$$

$$\left. \begin{aligned} [f_1 + f_2, g] &= [f_1, g] + [f_2, g] \\ [f_1 f_2, g] &= f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g] \end{aligned} \right\} \quad (13.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] \quad (13.71)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (13.72)$$

Poslednja osobina poznata je pod imenom *Jacobi-eva identičnost*. Dokažimo na pr. četvrtu od ovih osobina

$$[f_1 f_2, g] = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial (f_1 f_2)}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial (f_1 f_2)}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\},$$

pa na osnovu pravila o diferenciranju proizvoda sledi

$$\begin{aligned} [f_1 f_2, g] &= f_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) + f_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \\ &= f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]. \end{aligned}$$

Izračunajmo sad osnovne Poisson-ove zagrade kanonskih promenljivih. Za promenljive q_k i p_l prema definiciji (13.63) imamo

$$[q_k, p_l] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_l}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_l}{\partial q_i} \right).$$

Pošto je $\partial q_k / \partial q_i = \delta_{ki}$, gde je δ_{ki} Kronecker-ov simbol, jednak jedinici za $k=i$ a nuli za $k \neq i$, $\partial p_l / \partial p_i = \delta_{li}$ i pošto generalisane koordinate ne zavise od generalisanih impulsa, gornji izraz se svodi na

$$[q_k, p_l] = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \delta_{li},$$

a ova suma jednaka je Kronecker-ovom simbolu δ_{kl}

$$[q_k, p_l] = \delta_{kl} \quad (13.73)$$

Na sličan način, ako formiramo Poisson-ove zagrade q_k i q_l , odnosno p_k i p_l , dobićemo

$$[q_k, q_l] = [p_k, p_l] = 0 \quad (13.74)$$

Od interesa su i Poisson-ove zagrade raznih mehaničkih veličina, kao na pr. komponenta momenta impulsa $M = r \times p$ jedne čestice

$$M_x = y p_z - z p_y, \quad M_y = z p_x - x p_z, \quad M_z = x p_y - y p_x \quad (13.75)$$

Ako za generalisane koordinate uzmemo pravougle koordinate posmatrane čestice, Poisson-ova zagrada od M_x i M_y biće

$$[M_x, M_y] = \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial M_y}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x} \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial M_y}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial M_y}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

Na osnovu obrasca (13.75) prva četiri člana otpadaju i ostaje

$$[M_x, M_y] = (-p_y)(-x) - y p_x = M_z,$$

pa cikličnom permutacijom dobijamo i ostale dve relacije

$$[M_x, M_y] = M_z, \quad [M_y, M_z] = M_x, \quad [M_z, M_x] = M_y \quad (13.76)$$

Odavde zaključujemo, poređenjem sa osnovnim Poisson-ovim zagradama (13.73) i (13.74), da se *ma koje dve komponente momenta impulsa ne mogu uzeti za konjugovane kanonske promenljive*, te se za neki dati skup generalisanih koordinata q_i može uzeti samo jedna komponenta momenta impulsa za konjugovani generalisani impuls.

13.10. Integrali kretanja

Ispitajmo sad slučaj kad neka funkcija oblika $F(q_i, p_i, t)$ ostaje stalna u toku vremena

$$F(q_i, p_i, t) = \text{const}, \quad (13.77)$$

tj. kad je

$$\frac{dF}{dt} = 0. \quad (13.78)$$

Takva funkcija kanonskih promenljivih $F(q_i, p_i, t)$ koja se ne menja u toku vremena naziva se *prvi integral kretanja* ili *konstanta kretanja*. Tada prema obrascu (13.64) vidimo da je u tom slučaju

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (13.79)$$

Dakle, svaka konstanta kretanja mora zadovoljavati uslov (13.79), koji predstavlja potreban i dovoljan uslov da neka mehanička veličina bude integral kretanja. Ukoliko pored toga funkcija F ne zavisi eksplicitno od vremena, prethodni uslov se svodi na jednostavniji

$$[F, H] = 0, \quad (13.80)$$

tj. ako konstanta kretanja ne zavisi eksplicitno od vremena, njena Poisson-ova zagrada sa Hamilton-ovom funkcijom jednaka je nuli. Na pr. ako Hamilton-ova funkcija H ne zavisi eksplicitno od vremena, pošto je $[H, H] = 0$, ona će biti konstanta kretanja, što je u saglasnosti sa ranijim zaključkom dobijenim iz obrasca (13.38).

Poisson-ova teorema

Dokažimo još jedan stav, koji nam kazuje kako se iz dva poznata integrala kretanja može dobiti treći. Neka su $f(q_i, p_i, t)$ i $g(q_i, p_i, t)$ dva integrala kretanja, koji moraju zadovoljavati uslov (13.79)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] = 0. \quad (13.81)$$

Da bismo ispitali da li je i njihova Poisson-ova zagrada $[f, g]$ integral kretanja, formirajmo njen parcijalni izvod po vremenu, koristeći osobinu (13.71)

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right],$$

pa zamenimo ovde $\frac{\partial f}{\partial t}$ i $\frac{\partial g}{\partial t}$ iz uslova (13.81)

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = [-[f, H], g] + [f, -[g, H]] = -[g, [H, f]] - [f, [g, H]].$$

Desnu stranu možemo transformisati na osnovu Jacobi-eve identičnosti (13.72), primenjene na funkcije f , g i H

$$[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0 \quad (13.82)$$

Odavde sledi

$$-[f, [g, H]] - [g, [H, f]] = [H, [f, g]] = -[f, [g, H]],$$

pa prethodna jednačina dobija oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] + [f, g], H = 0. \quad (13.83)$$

Prema tome, ako su $f(q_i, p_i, t)$ i $g(q_i, p_i, t)$ dva integrala kretanja, njihova Poisson-ova zagrada $[f, g]$ biće *takođe integral kretanja*. Ovaj stav naziva se *Poisson-ova teorema*. Pri tome mogu nastupiti tri slučaja: a) integral kretanja $[f, g]$ je *identički jednak nuli*, b) integral kretanja $[f, g]$ je *posledica integrala f i g* , c) integral kretanja $[f, g]$ je *novi integral, nezavisan od f i g* . Pri tome treba imati u vidu da se novih integrala kretanja može dobiti najviše do ukupnog broja $2n$ integrala kretanja.

Ako imamo k integrala kretanja

$$f_1(q_i, p_i, t) = C_1, \quad f_2(q_i, p_i, t) = C_2, \dots, f_k(q_i, p_i, t) = C_k \quad (13.84)$$

takvih da su sve Poisson-ove zagrade od funkcija $f_i (i=1, 2, \dots, k)$ ili identički jednake nuli ili konstante koje su posledica ovih integrala, ovakav sistem integrala naziva se *zatvoren*. Tako na pr. ako su dve komponente momenta impulsa integrali kretanja, njihova Poisson-ova zagrada, koja je prema obrascima (13.76) jednaka trećoj komponenti momenta impulsa, predstavljaće *takođe integral kretanja*, koji je posledica prva dva integrala. U specijalnom slučaju, ako je zatvoren sistem integrala takav da su sve njihove Poisson-ove zagrade *identički jednake nuli*

$$[f_i, f_j] = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, k), \quad (13.85)$$

kažemo da je ovaj sistem integrala kretanja *u involuciji*. Može se pokazati da ako znamo n takvih nezavisnih integrala kretanja, ostale možemo uvek dobiti kvadraturom.

13.11. Generalisane Hamilton-ove jednačine

Opisan Hamilton-ov formalizam može se generalisati i na slučaj kad Lagrange-eva funkcija zavisi od izvoda proizvoljnog reda

$$L = L(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_1^{(s)}, t). \quad (13.86)$$

Takvi sistemi, kojih nema u klasičnoj mehanici, od interesa su u izvesnim oblastima teorijske fizike, kao na pr. u elektrodinamici. U tom slučaju za sisteme sa potencijalnim silama iz Hamilton-ovog principa (12.37) uobičajenim postupkom proizlaze generalisane Lagrange-eve jednačine

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_1} - \dots + (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(s)}} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.87)$$

Uvodeći pojam tzv. funkcionalnog izvoda za funkcionele oblika

$$F = \int_a^b \mathcal{G}(y_1, y_1', \dots, y_1^{(s)}, x) dx,$$

gde je $y_1 = y_1(x)$, a $y_1' = dy_1/dx$, obrascem

$$\frac{\delta F}{\delta y_1^{(m)}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y_1^{(m)}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y_1^{(m+1)}} + \dots + (-1)^{s-m} \frac{d^{s-m}}{dx^{s-m}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y_1^{(s)}}, \quad (13.88)$$

gornje jednačine (13.87) možemo napisati i konciznije

$$\frac{\delta W}{\delta q_1} = 0, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (13.89)$$

Pokušajmo sad da ove Lagrange-eve jednačine, koje predstavljaju sistem diferencijalnih jednačina 2s-tog reda, zamenimo ekvivalentnim sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda. U tom cilju smatrajmo, pored generalisanih koordinata q_1 , i njihove izvode do reda $s-1$

$$q_1^{(m-1)} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} q_1 \quad (m=1, 2, \dots, s)$$

novim funkcijama, pri čemu pod nultim izvodom podrazumevamo samu funkciju i definišimo odgovarajuće generalisane impulse obrascem

$$p_{1/m} = \frac{\delta W}{\delta q_1^{(m)}} \quad (m=1, 2, \dots, s), \quad (13.90)$$

koje prema definiciji funkcionalnog izvoda (13.88) možemo napisati eksplicitno u vidu

$$p_{1/m} = \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m+1)}} + \dots + (-1)^{s-m} \frac{d^{s-m}}{dt^{s-m}} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(s)}} = \sum_{j=0}^{s-m} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m)}}. \quad (13.91)$$

U uobičajenom slučaju, kad je $s=1$, indeks m može uzeti samo vrednost $m=1$, te se ovaj izraz svodi na običan generalisani impuls $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1$. Ako uočimo poslednje jednačine (13.90) za $m=s$, koje su oblika

$$\left. \begin{aligned} p_{1/s} &= \frac{\partial L}{\partial q_1^{(s)}} = f_{1s}(q_k, \dot{q}_k, \dots, q_k^{(s)}, t) \\ (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (13.92)$$

i pretpostavimo da je

$$\left| \frac{\partial p_{1/s}}{\partial q_k^{(s)}} \right| \neq 0,$$

gornji sistem od n jednačina može se rešiti po najvišim izvodima

$$q_1^{(s)} = \varphi_{1s}(p_{1/s}, q_k, \dots, q_k^{(s-1)}, t), \quad (13.93)$$

čime se omogućava prelaz sa Lagrange-evog formalizma na odgovarajući Hamilton-ov.

Formirajmo sad, po analogiji sa običnom Hamilton-ovom funkcijom (13.21), izraz

$$H(q_1^{(m-1)}, p_{1/m}, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s p_{1/m} q_1^{(m)} - L. \quad (13.94)$$

Njen totalni diferencijal biće

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s p_{1/m} dq_1^{(m)} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s q_1^{(m)} dp_{1/m} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m)}} dq_1^{(m)} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

odnosno, posle grupisanja

$$\left. \begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s \left(p_{1/m} - \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m)}} \right) dq_1^{(m)} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s q_1^{(m)} dp_{1/m} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (13.95)$$

Poslednji član u zagradi za $m=s$ na osnovu obrasca (13.92) jednak je nuli, a ostali se svode na

$$\begin{aligned} p_{1/m} - \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m)}} &= \sum_{j=0}^{s-m-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m)}} - \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m)}} = \\ &= \sum_{j=1}^{s-m} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m)}}. \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$p_{1/m+1} = \sum_{j=0}^{s-(m+1)} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m+1)}} = \sum_{j=1}^{s-m} (-1)^{j-1} \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m)}}.$$

a otuda

$$\frac{dp_{1/m+1}}{dt} = - \sum_{j=1}^{s-m} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m)}}. \quad (13.96)$$

Oдавde proizlazi da je za $m < s$

$$p_{1/m} - \frac{\partial L}{\partial q_1^{(m)}} = \sum_{j=1}^{s-m} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(j+m)}} = -\dot{p}_{1/m+1},$$

pa izraz (13.95) dobija oblik

$$\left. \begin{aligned} dH = & - \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{s-1} \dot{p}_{i/m+1} dq_{i/m} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s q_{i/m} dp_{i/m} - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (13.97)$$

Da bismo u ovaj izraz uveli Lagrange-ove jednačine (13.87), napišimo ih u obliku

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_1} + \dots + (-1)^{s-1} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(s)}} \right\} = \dot{p}_{(1)},$$

pa prvi i treći član možemo skupiti zajedno

$$dH = - \sum_{i=1}^n \sum_{m=0}^{s-1} \dot{p}_{i/m+1} dq_{i(m)} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s q_{i(m)} dp_{i/m} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

ili, preformulisanjem prva dva člana

$$dH = - \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s \dot{p}_{i/m} dq_{i^{(m-1)}} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s \dot{q}_{i^{(m-1)}} dp_{i/m} - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (13.98)$$

Odavde vidimo da se Hamilton-ova funkcija može smatrati funkcijom oblika

$$H = H(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_1^{(s-1)}, p_{1/1}, p_{1/2}, \dots, p_{1/s}, t), \quad (13.99)$$

što se postiže uvrštavanjem funkcija (13.93) u izraz (13.94). Na osnovu ovog zaključka neposredno imamo

$$dH = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_i^{(m-1)}} dq_i^{(m-1)} + \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^s \frac{\partial H}{\partial p_{i/m}} dp_{i/m} + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

pa upoređivanjem odgovarajućih koeficijenata uz iste promenljive dobijamo

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_{i/m} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{i^{(m-1)}}}, & \dot{q}_{i^{(m-1)}} &= \frac{\partial H}{\partial p_{i/m}} \\ (i=1, 2, \dots, n; \quad m=1, 2, \dots, s) \end{aligned} \right\} \quad (13.100)$$

To su odgovarajuće *generalisane Hamilton-ove jednačine* za sisteme sa Lagrange-evom funkcijom oblika (13.86), koje se svode na uobičajene za $s=1$. One predstavljaju sistem od $2n$ s diferencijalnih jednačina prvog reda sa isto toliko nepoznatih funkcija

$$q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dots, q_1^{(s-1)}$$

$$P_{1/1}, P_{1/2}, P_{1/3}, \dots, P_{1/s},$$

koje ovde igraju ulogu kanonskih promenljivih. Za ovako formulisan Hamilton-ov formalizam mogu se definisati i odgovarajuće generalisane Poisson-ove zagrade i pomoću njih se mogu izraziti Hamilton-ove jednačine kao i kriterijum za konstante kretanja.

13.12. Degenerisani sistemi

Dosad smo razmatrali prirodne mehaničke sisteme, koji se karakterišu time da je njihova kinetička energija kao i Lagrange-eva funkcija kvadratna funkcija generalisanih brzina. Za takve sisteme smo pokazali da je sistem jednačina (13.2), koji definiše generalisane impulse uvek moguće rešiti po generalisanim brzinama, što omogućava prelaz sa Lagran-

ge-evog na Hamilton-ov formalizam. Međutim, pošto se ovi metodi mogu primenjivati i van klasične mehanike, od interesa je proučiti i opšti slučaj, kad Lagrange-eva funkcija može biti bilo kakva funkcija generalisanih brzina i tada se može desiti da se ovaj sistem jednačina i ne može rešiti po generalisanim brzinama. Takav slučaj imamo kod nekih kontinuiranih sistema u fizici, kao što su elektromagnetno polje u Maxwell-Lorentz-ovoj teoriji i gravitaciono polje u opštoj teoriji relativnosti. Sisteme ove vrste prvi je proučavao Dirac (1950) i oni se po njemu nazivaju *degenerisani sistemi*.

Da bismo matematički formulisali ovakve sisteme, navedimo jedan stav iz matematičke analize. Ako imamo na pr. dve jednačine oblika

$$u=f_1(x, y) \quad v=f_2(x, y) \quad (13.101)$$

i ako je njihov jakobijan (funkcionalna determinanta)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (13.102)$$

različit od nule, gornji sistem jednačina može se rešiti po promenljivama x i y

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v)$$

Međutim, ako je ovaj jakobijan jednak nuli, gornji sistem jednačina se više ne može rešiti po x i y , a između funkcija u i v postoji izvesna zavisnost oblika

$$F(u, v) = 0, \quad (13.103)$$

koja ne sadrži eksplicitno x i y . Ova teorema važi i ako imamo više jednačina (13.101), samo u tom slučaju ima toliko relacija oblika (13.103) koliki je stepen degeneracije odgovarajućeg jakobijana i ako je rang najvišeg minora različitog od nule jednak R' , stepen degeneracije biće $R=n-R'$.

Primenimo li sad ovaj stav na naš slučaj, dolazimo do sledećih rezultata. Sistem jednačina (13.2) u opštem slučaju ima oblik

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = f_1(q_1, \dot{q}_1, t) \\ \dots\dots\dots \\ p_n &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = f_n(q_1, \dot{q}_1, t) \end{aligned} \right\} \quad (13.104)$$

gde sad na desnoj strani mogu biti ma kakve funkcije ravedenih promenljivih, što zavisi od oblika Lagrange-eve funkcije. Ako je jakobijan ovog sistema jednačina jednaka nuli

$$\Delta \equiv \left| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_i} \right| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_i} \right| = 0, \quad (13.105)$$

prema navedenoj teoremi između funkcija s leve strane jednačina (13.104) postoji toliko relacija koliki je stepen degeneracije jakobijana

$$\Phi_r(p_i, q_i, t) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, R), \quad (13.106)$$

pri čemu ove relacije sadrže i generalisane koordinate i vreme, koji figurišu u jednačinama (13.104), kao parametre. Sem toga, same diferencijalne jednačine kretanja, za koje se u

ovom slučaju može pokazati da se neke od njih redukuju na diferencijalne jednačine prvog i nultog reda, kao i zahtev da sve ove relacije (13.106) budu očuvane u toku vremena izražen jednačinama $d\Phi_r/dt=0$, mogu dovesti do izvesnih dopunskih relacija gornjeg tipa

$$\chi_s(p_i, q_i, t) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, S),$$

koje sve zajedno napišimo u obliku

$$\Theta_\beta(p_i, q_i, t) = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, R+S) \quad (13.107)$$

Da bismo izveli Hamilton-ove jednačine za ovakve sisteme u kojima dejstvuju samo potencijalne sile, podimo od varijacije Hamilton-ove funkcije (13.20), koju napišimo u obliku

$$\delta H_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i,$$

gde smo ovde sa H_0 označili odgovarajuću Hamilton-ovu funkciju, u kojoj su eliminisane generalisane brzine uz pomoć relacije (13.106). Međutim, sve varijacije δp_i i δq_i nisu sad više nezavisne, one su vezane uslovima

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \quad (13.108)$$

koje dobijamo variranjem jednačina veza (13.107). Ako ove jednačine pomnožimo neodređenim množiteljima λ_β i saberemo ih sa gornjom jednačinom za δH_0 , dobićemo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i + \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0$$

odnosno posle sređivanja

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) \delta q_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) \delta p_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.109)$$

Izaberimo sad $(R+S)$ neodređenih množitelja λ_β tako da svi koeficijenti uz zavisne varijacije, kojih ima isto toliko, budu jednaki nuli. Tada preostaju samo nezavisne varijacije, pa da bi tako dobijen izraz uvek bio jednak nuli, svi koeficijenti uz njih moraju takođe biti jednaki nuli, čime dobijamo

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13.110)$$

To su tražene Hamilton-ove jednačine za degenerisane sisteme, koje zajedno sa jednačinama veza (13.107) određuju njihovo kretanje. Možemo lako naći i odgovarajuću opštu jednačinu

kretanja, analogu jednačini (13.64), polazeći od obrasca (13.62) i zamenjujući $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ prema gornjim Hamilton-ovim jednačinama

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_i} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

Posle grupisanja srodnih članova imamo

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial p_i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \Theta_\beta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned}$$

što se prema definiciji Poisson-ovih zagrada (13.63) može napisati u obliku

$$\frac{dF}{dt} = [F, H_0] + \sum_{\beta=1}^{R+S} \lambda_\beta [F, \Theta_\beta] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (13.111)$$

Ne ulazeći dalje u Hamilton-ov formalizam degenerisanih sistema, navedimo samo nekoliko rezultata. Zbog toga što je rang jakobijana (13.105) manji od n , pokazuje se da se svi množitelji λ_β ne mogu odrediti, izvestan njihov broj ostaje proizvoljan. Usled toga u opštoj jednačini kretanja (13.111) preostaje *izvestan broj proizvoljnih funkcija*, što znači da početni uslovi ovde ne određuju jednoznačno dalje kretanje sistema. Sem toga, ova poslednja činjenica omogućava da se izvrši *efektivna redukcija broja stepeni slobode*, koja se može izvesti na taj način što se opšta jednačina kretanja transformiše u oblik gde preostaju samo navedene proizvoljne funkcije u vidu množitelja. Ekvivalentan rezultat može se dobiti i uvođenjem Dirac-ovih zagrada, koje predstavljaju generalisane Poisson-ove zagrade tako definisane da u njima otpadaju parcijalni izvodi po zavisnim promenljivama.

14. KANONSKE TRANSFORMACIJE

14.1. Formulacija kanonskih transformacija

Posmatrajmo sad izvesnu transformaciju starih kanonskih promenljivih q_i i p_i u nove funkcije Q_i i P_i

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k, t), \quad P_i = P_i(q_k, p_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.1)$$

i pretpostavimo da se ovaj sistem jednačina može rešiti po starim promenljivama

$$q_i = q_i(Q_k, P_k, t), \quad p_i = p_i(Q_k, P_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (14.2)$$

za što je potrebno i dovoljno da odgovarajući jakobijan bude različit od nule

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \neq 0 \quad (14.3)$$

bar za neke vrednosti promenljivih. Ako postoji takva funkcija

$$K = K(Q_k, P_k, t)$$

da Hamilton-ove jednačine (13.24) ovom transformacijom zadržavaju invarijantan oblik

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (14.4)$$

ova transformacija naziva se *kanonska transformacija*.

Potražimo sad uslov da neka data transformacija oblika (14.1) bude kanonska. Ranije smo videli da su Hamilton-ove jednačine ekvivalentne Hamilton-ovom principu, koji prema obrascima (12.37) i (13.25) možemo napisati u obliku

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0, \quad (14.5)$$

a u novim kanonskim promenljivama Hamilton-ov princip glasi

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n (P_i \dot{Q}_i - K) \right) dt = 0 \quad (14.6)$$

S druge strane, za ma kakvu funkciju F starih i novih promenljivih zbog poklapanja položaja sistema pri pravom i zaobilaznom putu za $t=t_0$ i $t=t_1$ biće

$$\delta F(t_0) = 0 \quad \delta F(t_1) = 0,$$

pa ćemo imati

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt = \delta \{F(t_1) - F(t_0)\} = \delta F(t_1) - \delta F(t_0),$$

tj. varijacija ovog integrala jednaka je

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt = 0 \quad (14.7)$$

Oдавде vidimo da će jednačine (14.5) i (14.6) biti zadovoljene i ako se odgovarajući podintegralni izrazi razlikuju totalnim izvodom po vremenu uočene funkcije

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^n p_i d q_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i d Q_i - K dt + dF \quad (14.8)$$

To je traženi uslov da neka transformacija oblika (14.1) bude kanonska, a ovako definisana funkcija F naziva se *generatrisa kanonske transformacije*. Ako ovaj uslov napišemo i za druge moguće promene kanonskih promenljivih za isto vreme dt

$$\sum_{i=1}^n p_i d' q_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i d' Q_i - K dt + d' F,$$

oduzimanjem ovih jednačina, a imajući u vidu definiciju pojma varijacije (12.22), dobijamo drugi, ekvivalentni oblik gornjeg uslova

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i = \delta F \quad (14.9)$$

14.2. Tipovi generatrise

Pošto jednačine (14.1) predstavljaju $2n$ veza između starih i novih kanonskih promenljivih, od svih promenljivih q_i, p_i, Q_i i P_i ima samo $2n$ nezavisnih. Stoga se generatrisa F može uzeti u jednom od sledećih tipova

$$F_1(q_i, Q_i, t); \quad F_2(q_i, P_i, t); \quad F_3(p_i, Q_i, t); \quad F_4(p_i, P_i, t) \quad (14.10)$$

Ako uzmemo prvi oblik generatrise, uslov (14.8) u eksplicitnom obliku glasi

$$\sum_{i=1}^n p_i d q_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i d Q_i - K dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} d q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} d Q_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (14.11)$$

Pošto su promenljive q_i, Q_i i t u ovom slučaju uzete kao nezavisne, odgovarajući koeficijenti na obema stranama moraju biti međusobno jednaki

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad 0 = P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad -H = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

odnosno

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (14.12)$$

Ovi obrasci određuju kanonsku transformaciju sa generatrisom tipa $F_1(q_i, Q_i, t)$.

Da bismo prešli na drugi oblik generatrise, napišimo uslov (14.11) u vidu

$$\sum_{i=1}^n p_i d q_i - H dt = d \sum_{i=1}^n P_i Q_i - \sum_{i=1}^n Q_i d P_i - K dt + d F_1,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^n p_i d q_i - H dt = - \sum_{i=1}^n Q_i d P_i - K dt + d \left(F_1 + \sum_{i=1}^n P_i Q_i \right) \quad (14.13)$$

Oдавde vidimo da je izraz u zagradi takav da je njegov diferencijal linearna funkcija diferencijala dq_i, dP_i i dt , te ga možemo smatrati funkcijom od promenljivih q_i, P_i i t

$$F_2(q_i, P_i, t) = F_1 + \sum_{i=1}^n P_i Q_i \quad (14.14)$$

Taj izraz predstavlja generatrisu tipa F_2 , a obrazac (14.13) tada u eksplicitnom obliku glasi

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i d q_i - H dt = & - \sum_{i=1}^n Q_i d P_i - K dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} d q_i + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} d P_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

Pošto su sad promenljive q_i , P_i i t nezavisne, upoređivanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo

$$P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad 0 = -Q_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad -H = -K + \frac{\partial F_2}{\partial t},$$

odnosno

$$P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad K=H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (14.16)$$

Ovim obrascima je određena kanonska transformacija sa drugim tipom generatriše.

Određivanje kanonske transformacije

Pokažimo sad kako se može naći kanonska transformacija kad znamo generatrisu. Uzmimo za generatrisu ma kakvu funkciju oblika $F_1(q_i, Q_i, t)$, u tom slučaju kanonska transformacija je određena obrascima (14.12). Ako uvrstimo funkciju F_1 u desne strane ovih jednačina, parcijalni izvodi $\partial F_1 / \partial q_i$ i $\partial F_1 / \partial Q_i$ biće izvesne funkcije od promenljivih q_i , Q_i i t , tako da će prva dva sistema jednačina (14.12) dobiti vid

$$p_i = \varphi_i(q_k, Q_k, t), \quad P_i = \psi_i(q_k, Q_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.17)$$

Rešavanjem prvog sistema od n jednačina po veličinama Q_i , uz pretpostavku da je generatrisa F_2 tako izabrana da je

$$\left| \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} \right| \neq 0 \quad (14.18)$$

možemo odrediti ove veličine u vidu

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.19)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u drugi sistem jednačina (14.17) neposredno dobijamo i veličine P_i

$$P_i = P_i(q_k, p_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.20)$$

Dobijene jednačine predstavljaju traženu kanonsku transformaciju oblika (14.1), pod uslovom da se ove jednačine mogu rešiti po veličinama q_i i p_i . Stavljanjem ovih inverznih funkcija u poslednji obrazac (14.12) dobićemo i novu Hamilton-ovu funkciju $K(Q_i, P_i, t)$.

Na sličan način može se i iz generatriše tipa $F_2(q_i, P_i, t)$ pomoću obrazaca (14.16) dobiti odgovarajuća kanonska transformacija i nova Hamilton-ova funkcija.

14.3. Primeri

1. Data je transformacija kanonskih promenljivih oblika

$$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i \quad (14.21)$$

Da bismo ispitali da li je ona kanonska, treba primeniti uslov (14.9) i videti da li se leva strana može prikazati u vidu varijacije neke veličine

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i + \sum_{i=1}^n q_i \delta p_i = \delta \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

Oдавде zaključujemo da je transformacija zaista kanonska i da je odgovarajuća generatrisa

$$F = \sum_{i=1}^n p_i q_i = \sum_{i=1}^n Q_i q_i \quad (14.22)$$

2. Data je generatrisa kanonske transformacije drugog tipa

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k P_i, \quad (14.23)$$

pri čemu koeficijenti a_{ik} zadovoljavaju uslov ortogonalnosti

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \quad (14.24)$$

Odgovarajuću kanonsku transformaciju možemo naći pomoću obrasca (14.16)

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} P_i$$

i ove jednačine treba rešiti po P_i , množeći ih sa a_{jk} i sumirajući po indeksu k

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} p_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{jk} a_{ik} P_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} P_i = P_j,$$

odnosno

$$P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k \quad (14.25)$$

Drugi sistem obrazaca (14.16) neposredno određuje i nove generalisane koordinate

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k, \quad (14.26)$$

odakle vidimo da se u ovom slučaju generalisane koordinate i impulsi transformišu po istom zakonu. Ako je $a_{ik} = \delta_{ik}$, generatrisa se svodi na

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^n q_i P_i \quad (14.27)$$

a navedeni transformacioni obrasci na

$$P_i = p_i, \quad Q_i = q_i \quad (14.28)$$

i to je identična transformacija.

3. Posmatrajmo još infinitezimalnu kanonsku transformaciju

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad P_i = p_i + \delta p_i, \quad (14.29)$$

gde je $|\delta q_i| \ll |q_i|$, $|\delta p_i| \ll |p_i|$. Pošto se ova transformacija beskonačno malo razlikuje od identične, njena generatrisa će se takođe beskonačno malo razlikovati od generatriše (14.27)

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \varepsilon G(q_i, P_i) \quad (14.30)$$

gde je ε beskonačno mali parametar. Tada prema obrascima (14.16) imamo

$$p_1 - \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = p_1 + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_1}, \quad Q_1 - \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = q_1 + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_1},$$

a otuda, stavljajući aproksimativno $\frac{\partial G}{\partial P_1} \approx \frac{\partial G}{\partial p_1}$

$$P_1 - p_1 = \delta p_1 = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_1}, \quad Q_1 - q_1 = \delta q_1 = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_1} \quad (14.31)$$

Ovi obrasci određuju posmatranu infinitezimalnu kanonsku transformaciju. U specijalnom slučaju kad je

$$G = H(q_1, p_1), \quad \varepsilon = dt, \quad (14.32)$$

navedeni obrasci daju, na osnovu Hamilton-ovih jednačina (13.24)

$$\delta p_1 = -dt \frac{\partial H}{\partial q_1} = -\dot{p}_1 dt, \quad \delta q_1 = dt \frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_1 dt,$$

ti.

$$\delta p_1 = dp_1, \quad \delta q_1 = dq_1 \quad (14.33)$$

Odavde vidimo da se pri ovoj transformaciji generalisane koordinate i impulsi menjaju na takav način da umesto vrednosti $q_1(t)$ i $p_1(t)$ uzimaju vrednosti $q_1(t+dt)$ i $p_1(t+dt)$. Prema tome, promena mehaničkog stanja sistema za vreme dt može se dobiti pomoću infinitezimalne kanonske transformacije kod koje je $G = H(q_1, p_1)$, a kretanje sistema može se smatrati kao kontinuirani niz ovakvih uzastopnih transformacija.

14.4. Invarijante kanonskih transformacija

Pozabavimo se sad veličinama koje ostaju nepromenjene pri ma kakvim kanonskim transformacijama, to su tzv. *invarijante kanonskih transformacija*. Jedna takva veličina je Poisson-ova zagrada, definisana obrascem (13.63)

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{dv}{dp_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{dv}{dq_i} \right), \quad (14.34)$$

za koju smo već videli da igra značajnu ulogu u Hamilton-ovom formalizmu. U tom cilju navedimo prethodno neke pomoćne relacije, koje se mogu dobiti na sledeći način. Ako se izvrši kanonska transformacija pomoću generatriše oblika $F_1(q_1, Q_1, t)$, prema obrascima (14.12) imamo

$$p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1}, \quad P_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_1},$$

a otuda

$$\frac{\partial p_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1 \partial Q_1} = -\frac{\partial P_1}{\partial q_1}. \quad (14.35)$$

Na sličan način, polazeći od obrazaca (14.16) za generatrisu $F_2(q_1, P_1, t)$

$$p_1 = -\frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \quad Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1},$$

nalazimo

$$\frac{\partial p_1}{\partial P_1} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_1 \partial P_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1},$$

odakle proizlazi

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial Q_1}. \quad (14.36)$$

Primenimo ove rezultate na osnovnu Poisson-ovu zagradu $[Q_k, P_1]$ u odnosu na stare kanonske promenljive

$$\begin{aligned} [Q_k, P_1] &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_1}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_1}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} + \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} \right) = \frac{\partial Q_k}{\partial Q_1} = \delta_{k1}, \end{aligned}$$

a to je prema obrascu (13.73) i vrednost ove Poisson-ove zagrade u novim kanonskim promenljivama, te tako dobijamo

$$[Q_k, P_1]_{Q,P} = [Q_k, P_1]_{q,p} = \delta_{k1} \quad (14.37)$$

Na potpuno sličan način može se pokazati da važe i sledeće relacije

$$\left. \begin{aligned} [Q_k, Q_1]_{Q,P} &= [Q_k, Q_1]_{q,p} = 0, \\ [P_k, P_1]_{Q,P} &= [P_k, P_1]_{q,p} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.38)$$

odakle vidimo da osnovne Poisson-ove zagrade ostaju invarijantne pri kanonskim transformacijama.

Za Poisson-ovu zagradu ma kojih dveju funkcija $u(q_1, p_1, t)$ i $v(q_1, p_1, t)$ imaćemo, ako izvede po starim kanonskim promenljivama izrazimo pomoću novih

$$\begin{aligned} [u, v]_{q,p} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \right. \right. \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \left. \right) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} \right) - \\ &- \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

Ovaj izraz može se grupisati tako da se izdvoje izvodi funkcija u i v po novim kanonskim promenljivama

$$\begin{aligned} [u, v]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial Q_l} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial P_l} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial Q_l} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} - \right. \\ &- \left. \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial P_l} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} \right) \left. \right\}, \end{aligned}$$

čime se on svodi na osnovne Poisson-ove zagrade

$$\left. \begin{aligned} [u, v]_{Q,P} = & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial Q_l} [Q_k, Q_l]_{Q,P} + \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial P_l} [Q_k, P_l]_{Q,P} + \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial Q_l} [P_k, Q_l]_{Q,P} + \\ & \left. + \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial P_l} [P_k, P_l]_{Q,P} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14.39)$$

Na osnovu obrazaca (14.37) i (14.38) tako konačno dobijamo

$$\begin{aligned} [u, v]_{Q,P} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial P_l} \delta_{kl} - \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial Q_l} \delta_{lk} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k} \frac{\partial v}{\partial P_k} - \frac{\partial u}{\partial P_k} \frac{\partial v}{\partial Q_k} \right), \end{aligned}$$

odnosno

$$[u, v]_{Q,P} = [u, v]_{Q,P} \quad (14.40)$$

Prema tome, Poisson-ova zagrada ma kojih dveju funkcija kanonskih promenljivih pri bilo kakvim kanonskim transformacijama ostaje invarijantna.

U tesnoj vezi sa Poisson-ovom zagrado je jedna veličina koja se formalno dobija iz nje uzajamnom izmenom kanonskih promenljivih q_i, p_i i funkcija u, v , pri čemu se sad kanonske promenljive smatraju izvesnim funkcijama oblika $q_i = q_i(u, v)$ i $p_i = p_i(u, v)$. Tako definisanu veličinu, koja predstavlja neku vrstu „inverzne“ Poisson-ove zagrade, označićemo simbolom

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \quad (14.41)$$

i ona se naziva *Lagrange-eva zagrada veličina* u i v . Navedimo ovde još, bez dokaza, da se uslov da transformacija bude kanonska (14.8) može izraziti i pomoću osnovnih Lagrange-evih zagrada u obliku

$$\left. \begin{aligned} \{q_k, q_l\}_{Q,P} &= \{p_k, p_l\}_{Q,P} = 0 \\ \{q_k, p_l\}_{Q,P} &= \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (14.42)$$

i da ove zagrade ostaju takode invarijantne pri ma kakvim kanonskim transformacijama

$$\{u, v\}_{Q,P} = \{u, v\}_{Q,P}. \quad (14.43)$$

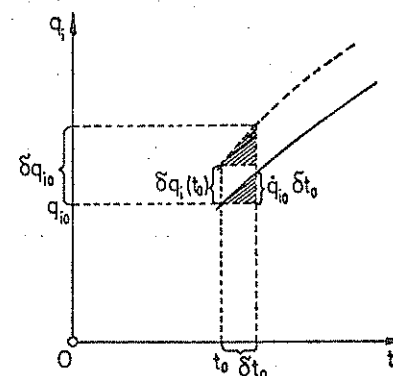
14.5. Integralne invarijante

Da bismo došli do izvesnih veličina u obliku integrala koje predstavljaju invarijante, potražimo opštu varijaciju Hamilton-ovog dejstva (12.27) u slučaju kad variramo ne samo početni i krajnji položaj sistema, već i početni i krajnji trenutak vremena t_0 i t_1 , ali ne i vreme t između ovih granica (sl. 14.1). Tada se operacija variranja odnosi ne samo na Lagrange-ovu funkciju $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, već i na interval vremena dt

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt + \int_{t_0}^{t_1} L \delta t. \quad (14.44)$$

Prvi član, koji odgovara varijaciji dejstva pri konstantnim granicama, određen je obrascem (12.35)

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1}$$



Sl. 14.1

U drugom članu možemo izmeniti redosled operacija variranja i diferenciranja i potom ga transformisati parcijalnom integracijom

$$\int_{t_0}^{t_1} L \delta dt = \int_{t_0}^{t_1} L d \delta t = L \delta t \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta t \dot{L} dt.$$

Poslednji član otpada, jer ovde ne variramo vreme između granica, tj. $\delta t = 0$ za $t_0 < t < t_1$, te imamo

$$\int_{t_0}^{t_1} L \delta dt = L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0,$$

gde L_0 i L_1 označavaju vrednosti Lagrange-eve funkcije za $t=t_0$ i $t=t_1$. Uvrštavajući nađene izraze u obrazac (14.44), dobijamo

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 \quad (14.45)$$

Ovde prema slici imamo približno

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_{i0} - \dot{q}_{i0} \delta t_0, \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_{i1} - \dot{q}_{i1} \delta t_1,$$

pa se drugi član može napisati u vidu

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} &= \sum_{i=1}^n p_{i1} \delta q_i(t_1) - \sum_{i=1}^n p_{i0} \delta q_i(t_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_{i1} (\delta q_{i1} - \dot{q}_{i1} \delta t_1) - \sum_{i=1}^n p_{i0} (\delta q_{i0} - \dot{q}_{i0} \delta t_0). \end{aligned}$$

Tako izraz (14.45) za varijaciju dejstva dobija oblik

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \sum_{i=1}^n p_{i1} \delta q_{i1} - \left(\sum_{i=1}^n p_{i1} \dot{q}_{i1} - L_1 \right) \delta t_1 - \sum_{i=1}^n p_{i0} \delta q_{i0} + \left(\sum_{i=1}^n p_{i0} \dot{q}_{i0} - L_0 \right) \delta t_0$$

odnosno, na osnovu definicije Hamilton-ove funkcije (13.21)

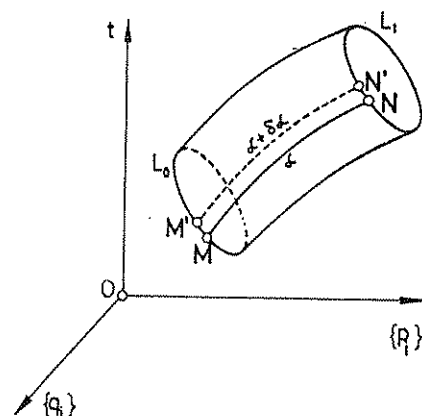
$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left(\sum_{i=1}^n p_{i1} \delta q_{i1} - H_1 \delta t_1 \right) - \left(\sum_{i=1}^n p_{i0} \delta q_{i0} - H_0 \delta t_0 \right) \quad (14.46)$$

To je tražena *opšta varijacija dejstva sa promenljivim granicama*, a ako se između promenjenog početnog i krajnjeg položaja sistem kreće po pravom putu u saglasnosti sa Lagrange-ovim jednačinama, gornja varijacija se svodi na

$$\delta W = \left| \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right|_{t_0}^{t_1} \quad (14.47)$$

Uočimo sad u proširenom faznom prostoru (sl. 14.2), u kome pod tačkom podrazumevamo skup $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$, proizvoljnu zatvorenu krivu L_0 sa jednačinama u parametarskom obliku

$$q_i = q_i^0(\alpha) \quad p_i = p_i^0(\alpha) \quad t = t^0(\alpha) \quad (14.48)$$



Sl. 14.2

i neka vrednostima $\alpha=0$ i $\alpha=\alpha_0$ odgovara ista tačka na krivoj L_0 . Svaka tačka M ove krive prikazuje izvesno stanje sistema i povucimo iz svake od njih kao početnog stanja trajektoriju MN koja predstavlja odgovarajući pravi put sistema. Takav pravi put određen je Hamilton-ovim jednačinama i tako dobijamo familiju pravih puteva

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha), \quad (14.49)$$

koje formiraju jednu cevastu površ prikazanu na slici, pri čemu parametar α karakteriše polaznu tačku M .

Na toj površi izaberimo sad neku drugu proizvoljnu zatvorenu krivu L_1 i pošto svakoj vrednosti parametra α u intervalu $0 < \alpha < \alpha_0$ odgovara jedna tačka M , te i određena trajektorija pravog puta MN , time je jednoznačno određena i odgovarajuća tačka N na krivoj L_1 . Stoga jednačine krive L_1 možemo takođe napisati pomoću istog parametra

$$q_i = q_i^1(\alpha), \quad p_i = p_i^1(\alpha), \quad t = t^1(\alpha) \quad (14.50)$$

Posmatrajmo sad dejstvo duž ma koje od ovih trajektorija

$$W(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L[q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha), t] dt$$

i potražimo njegovu varijaciju kad sa vrednosti parametra α predemo na $\alpha + \delta\alpha$, tj. sa trajektorije MN na susednu $M'N'$. Ona je određena obrascem (14.47)

$$\delta W(\alpha) = \delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt = W'(\alpha) \delta \alpha = \left| \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right|_{t_0}^{t_1}, \quad (14.51)$$

pri čemu sad sve varijacije na desnoj strani potiču od odgovarajuće promene parametra $\delta\alpha$. Integraleći ovu jednačinu po α od $\alpha=0$ do $\alpha=\alpha_0$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_0} \delta W = W(\alpha_0) - W(0) &= \int_0^{\alpha_0} \left(\sum_{i=1}^n p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 \right) d\alpha - \int_0^{\alpha_0} \left(\sum_{i=1}^n p_i^0 \delta q_i^0 - H_0 \delta t_0 \right) d\alpha = \\ &= \oint_{L_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) - \oint_{L_0} \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right). \end{aligned}$$

a pošto je dejstvo W jednoznačno, biće $W(\alpha_0) = W(0)$, odakle proizlazi da je

$$\oint_{L_0} \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) = \oint_{L_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) \quad (14.52)$$

Odavde vidimo da za mehaničke sisteme sa potencijalnim silama i holonomnim idealnim vezama krivolinijski integral

$$I = \oint \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) \quad (14.53)$$

uzet duž proizvoljne zatvorene konture u proširenom faznom prostoru ne menja svoju vrednost pri proizvoljnom pomeranju te konture duž cevaste površi pravih puteva sistema. Ova veličina na ziva se *integralna invarijanta Poincaré-Cartan-a*. Može se pokazati da iz ove osobine invarijantnosti navedenog integrala proizlazi da odgovarajuće diferencijalne jednačine pravih puteva moraju imati upravo oblik Hamilton-ovih jednačina i obrnuto, tj. invarijantnost integrala Poincaré-Cartan-a je ekvivalentna Hamilton-ovim jednačinama. U specijalnom slučaju $\delta t=0$, kad se kontura sastoji iz tačaka koje prikazuju istovremena stanja sistema, gornja veličina se svodi na

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \quad (14.54)$$

i to je tzv. *Poincaré-ova integralna invarijanta*,

Pokažimo sad da navedene veličine predstavljaju invarijante i u odnosu na kanonske transformacije. U tom cilju podimo od uslova da transformacija bude kanonska (14.8) u obliku

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) - \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i - K \delta t \right) = \delta F \quad (14.55)$$

i integralimo obe strane duž neke zatvorene krive L

$$\oint_L \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) - \oint_L \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i - K \delta t \right) = \oint_L \delta F,$$

gde je $\bar{L}$ odgovarajuća kriva u faznom prostoru transformisanih kanonskih promenljivih.

Zbog jednoznačnosti generatriše biće $\oint \delta F = 0$, odakle sledi da je

$$\oint_L \left(\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right) = \oint_{\bar{L}} \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i - K \delta t \right), \quad (14.56)$$

tj. integral Poincaré-Cartan-a duž ma koje konture u proširenom faznom prostoru pri bilo kakvim kanonskim transformacijama ostaje invarijantan. Ovaj zaključak očevidno važi i za Poincaré-ovu integralnu invarijantu kao specijalan slučaj.

Navedimo još na kraju da se može pokazati da se ova poslednja invarijanta (14.54) primenom Stokes-ove integralne teoreme za višedimenzionalne prostore može transformisati i u površinski integral

$$I_1 = \iint \sum_{i=1}^n \delta q_i \delta p_i, \quad (14.57)$$

pri čemu se integracija vrši po ma kojoj hiperpovršini S koja je oivičena konturom L. Generalizacijom ovih rezultata može se doći do zaključka da postoje i integralne invarijante višeg reda zaključno do reda n

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \iiint \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta q_i \delta q_j \delta p_i \delta p_j \\ I_n &= \underbrace{\iiint \dots \int}_{2n} \delta q_1 \dots \delta q_n \delta p_1 \dots \delta p_n \end{aligned} \right\} \quad (14.58)$$

Pošto se ovde integracija vrši po bilo kojoj oblasti u faznom prostoru, integrali ove vrste nazivaju se *apsolutne integralne invarijante*.

Navedene integralne invarijante prve ili druge vrste od interesa su u raznim granama teorijske fizike, kao na pr. u mehanici fluida, statističkoj fizici i kvantnoj teoriji atoma.

14.6. Hamilton-Jacobi-eva jednačina

Posmatrajmo sad takvu kanonsku transformaciju pri kojoj je nova Hamilton-ova funkcija identički jednaka nuli

$$K(Q_i, P_i, t) \equiv 0 \quad (14.59)$$

i uzmimo za generatrisu funkciju tipa $F_2(q_i, P_i, t)$, koju označimo ovde sa S

$$F = F_2(q_i, P_i, t) \equiv S \quad (14.60)$$

Tada zbog uslova (14.59) Hamilton-ove jednačine u novim kanonskim promenljivama daju

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$$

odakle dobijamo

$$P_i = \alpha_i = \text{const}, \quad Q_i = \beta_i = \text{const} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.61)$$

Dakle, kanonska transformacija pri kojoj je nova Hamilton-ova funkcija identički jednaka nuli daje kao nove kanonske promenljive konstante kretanja.

Na osnovu ovih obrazaca u posmatranoj generatriši možemo staviti $P_i = \alpha_i$

$$S = S(q_i, \alpha_i, t),$$

pa prema obrascima (14.16), u kojima je sad generatriša nepoznata, i uslovu (14.59) imamo

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (14.62)$$

Pri tome je Hamilton-ova funkcija H izvesna funkcija generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena, pa ako u toj funkciji smenimo generalisane impulse prema prvom sistemu jednačina (14.62) sa $\partial S / \partial q_i$

$$H = H(q_i, p_i, t) = H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right),$$

poslednja jednačina (14.62) dobija oblik

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0. \quad (14.63)$$

Ova jednačina naziva se *Hamilton-Jacobi-eva jednačina* i ona igra osnovnu ulogu u ovom metodi. To je *parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda, u kojoj je nepoznata funkcija generatriša S ove kanonske transformacije, pri kojoj je nova Hamilton-ova funkcija identički jednaka nuli, a nezavisno promenljive su sve generalisane koordinate q_i i vreme t*. Rešenje ove jednačine zove se *Hamilton-Jacobi-eva generatriša*.

Ako Hamilton-ova funkcija H ne zavisi eksplicitno od vremena, Hamilton-Jacobi-eva jednačina (14.63) glasi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0.$$

U ovom slučaju potražimo rešenje ove jednačine u obliku

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t, \quad (14.64)$$

a stavljajući ovaj izraz u prethodnu jednačinu i imajući u vidu da je

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i},$$

dobijamo

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1. \quad (14.65)$$

To je Hamilton-Jacobi-eva jednačina za funkciju W , pri čemu konstanta α_1 predstavlja konstantnu vrednost Hamilton-ove funkcije, koja se poklapa sa ukupnom energijom sistema ako je $H=E$. Napomenimo da u slučaju koji razmatramo zbog činjenice da H ne zavisi eksplicitno od vremena on je uvek integral kretanja, ali ne mora imati smisao energije. Tako definisana funkcija W naziva se *karakteristična Hamilton-ova funkcija*.

14.7. Hamilton-Jacobi-ev metod

Da bismo videli smisao Hamilton-Jacobi-eve generatriše, potražimo njen totalni izvod po vremenu

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (14.66)$$

a na osnovu prvog obrasca (14.62) i Hamilton-Jacobi-eve jednačine (14.63) ovaj izraz možemo napisati u obliku

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H. \quad (14.67)$$

Prema definiciji Hamilton-ove funkcije (13.21) prethodni izraz jednak je Lagrange-ovoj funkciji

$$\frac{dS}{dt} = L,$$

pa integracijom po vremenu od t_0 do t dobijamo

$$S = \int_{t_0}^t L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (14.68)$$

Poređenjem sa obrascem (12.27) vidimo da *Hamilton-Jacobi-eva generatriša predstavlja Hamilton-ovo dejstvo sa neodređenom gornjom granicom*.

Međutim, to nam ne pruža i praktično pravilo za nalaženje ove funkcije, jer za izračunavanje gornjeg integrala potrebno je znati rešenja Hamilton-ovih jednačina, koja napišimo u obliku

$$q_i = q_i(t, q_k^0, p_k^0), \quad p_i = p_i(t, q_k^0, p_k^0), \quad (14.69)$$

gde su q_k^0 i p_k^0 početne vrednosti generalisanih koordinata i impulsa. Ako ove funkcije uvrstimo u integral (14.68)

$$S = \int_{t_0}^t L[q_i(t, q_k^0, p_k^0), \dot{q}_i(t, q_k^0, p_k^0), t] dt$$

i izvršimo integraciju, dobićemo Hamilton-Jacobi-evu generatrišu kao funkciju od t, q_k^0 i p_k^0

$$S = S(t, q_k^0, p_k^0). \quad (14.70)$$

Da bismo je prikazali u uobičajenom obliku, rešimo prvi sistem jednačina (14.69) po konstantama p_k^0

$$p_k^0 = f_k(q_i, q_i^0, t)$$

i zamenimo sve p_k^0 u izrazu (14.70) ovim funkcijama, čime dobijamo

$$S = S[t, q_k^0, f_k(q_i, q_i^0, t)] \equiv S^*(q_i, q_i^0, t). \quad (14.71)$$

Hamilton-Jacobi-eva generatriša prikazana kao funkcija od generalisanih koordinata, njenih početnih vrednosti i vremena naziva se *glavna Hamilton-ova funkcija*.

Pokažimo sad kako se dati dinamički problem može rešiti pomoću Hamilton-Jacobi-eve jednačine ako ne znamo rešenja Hamilton-ovih jednačina. Kao što je poznato iz matematike, postoje dva osnovna tipa rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina: opšti integrali, koji zavise od proizvoljnih funkcija i potpuni integrali, koji zavise od proizvoljnih konstanti. Ako imamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom i n nezavisno promenljivih x_i

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

njeno rešenje oblika

$$z = \varphi(x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_n), \quad (14.72)$$

ti. rešenje koje sadrži toliko proizvoljnih konstanti koliko i nezavisno promenljivih naziva se *potpun integral* ove parcijalne diferencijalne jednačine. Pri tome se pokazuje da je svaka ovakva parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda ekvivalentna jednom sistemu simultanih običnih diferencijalnih jednačina, koji je poznat pod imenom *Lagrange-Charpy-ev sistem*.

Pretpostavimo sad da smo bilo kakvim putem našli jedan potpun integral Hamilton-Jacobi-eve jednačine (14.63) u obliku

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, a_1, \dots, a_n) + a_{n+1}, \quad (14.73)$$

koji sadrži $n+1$ proizvoljnih konstanti a_i koliko i nezavisno promenljivih q_i i t , i to takav da je

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_i} \right| \neq 0. \quad (14.74)$$

To se obično postiže *metodom razdvajanja promenljivih*, koji se sastoji u tome da se traži rešenje gornje jednačine u jednom od oblika

$$S = S_1(q_1) + \dots + S_n(q_n) + S_{n+1}(t)$$

ili

$$S = S_1(q_1) \dots S_n(q_n) \cdot S_{n+1}(t),$$

ti. u obliku zbira ili proizvoda funkcija koje zavise samo od jedne nezavisno promenljive. Pošto u Hamilton-Jacobi-ovoj jednačini figurišu samo parcijalni izvodi funkcije S , aditivna konstanta a_{n+1} nema nikakvog uticaja, te možemo uzeti da je jednaka nuli

$$S = S(q_i, a_i, t) \quad (14.75)$$

Formirajmo sad sistem jednačina sastavljen od prvog sistema jednačina (14.62) i jednačina dobijenih diferenciranjem funkcija (14.75) po parametru a_i i izjednačavanjem sa novim *proizvoljnim* konstantama b_i

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial a_i} = b_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (14.76)$$

Da bismo potpun integral Hamilton-Jacobi-eve jednačine mogli upotrebiti za rešavanje dinamičkih problema, pokažimo da je ovaj sistem jednačina ekvivalentan sistemu Hamilton-ovih jednačina. U tom cilju diferencirajmo drugi par jednačina (14.76) totalno po vremenu, imajući u vidu da leva strana zavisi od t kako direktno tako i preko svih generalisanih koordinata q_i

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial q_k} \dot{q}_k = 0. \quad (14.77)$$

S druge strane, ako uvrstimo potpun integral (14.75) u Hamilton-Jacobi-evu jednačinu (14.63) i diferenciramo ovu jednačinu po parametru a_1 , dobićemo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1} = 0$$

odnosno, s obzirom da je $\partial S / \partial q_k = p_k$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1} \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0. \quad (14.78)$$

Jednačine (14.77) mogu se shvatiti kao sistem od n linearnih algebarskih jednačina za određivanje promenljivih $\dot{q}_k$, a jednačine (14.78) za određivanje $\partial H / \partial p_k$. Pošto su odgovarajući koeficijenti uz ove veličine isti, sledi da i ove veličine kao rešenja gornjih jednačina moraju biti iste

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (14.79)$$

Diferencirajmo sad prvi par jednačina (14.76) totalno po vremenu

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_k = \dot{p}_1. \quad (14.80)$$

S druge strane, ako Hamilton-Jacobi-evu jednačinu (14.63) diferenciramo po promenljivoj q_1 , imajući u vidu da H zavisi od q_1 kako direktno tako i preko svih $\partial S / \partial q_i$, nalazimo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right)} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_1} = 0,$$

a pošto je, na osnovu obrasca (14.79)

$$\frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} \right)} = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k,$$

prethodna jednačina dobija oblik

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_1} \dot{q}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_1}. \quad (14.81)$$

Poređenjem jednačina (14.80) i (14.81) zaključujemo da je

$$\dot{p}_1 = - \frac{\partial H}{\partial q_1} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (14.82)$$

Prema tome, sistem jednačina (14.76), gde je $S(q_i, a_i, t)$ jedan potpun integral Hamilton-Jacobi-eve jednačine, za bilo kakve vrednosti konstanti a_1 i b_1 predstavlja potpun sistem integrala Hamilton-ovih jednačina kretanja. Ovaj stav poznat je pod imenom Jacobi-eve teorema.

Izaberimo sad za proizvoljne konstante a_1 i b_1 upravo konstantne vrednosti novih generalisanih impulsa α_1 i novih generalisanih koordinata β_1 , definisane obrascem (14.61)

$$a_1 = \alpha_1 = P_1, \quad b_1 = \beta_1 = Q_1 \quad (14.83)$$

Tada potpun integral (14.75) dobija oblik

$$S = S(q_i, \alpha_i, t)$$

i ako ovu funkciju uvrstimo u jednačine (14.62), dobijamo sistem od $2n$ jednačina

$$\frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (14.84)$$

Leve strane ovih jednačina biće izvesne funkcije od promenljivih q_i , α_i i t , slično jednačinama (14.17), samo su ovde nepoznate generalisane koordinate q_i i generalisani impulsi p_i . Rešavanjem drugog sistema jednačina (14.84) po veličinama q_i dobićemo ove veličine u obliku

$$q_i = q_i(t, \alpha_k, \beta_k) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (14.85)$$

što je zbog pretpostavke (14.74) uvek moguće, a uvrštavanjem ovih izraza u prvi sistem jednačina neposredno dobijamo i veličine p_i

$$p_i = p_i(t, \alpha_k, \beta_k) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.86)$$

Ove jednačine određuju sve generalisane koordinate i generalisane impulse, tj. nepoznate funkcije u Hamilton-ovim jednačinama kao funkcije vremena, te predstavljaju rešenja Hamilton-ovih jednačina, a proizvoljne konstante α_k i β_k predstavljaju integracione konstante, određene početnim uslovima.

Prema tome, ako nađemo jedan potpun integral Hamilton-Jacobi-eve jednačine, algebarskim rešavanjem Jacobi-evog sistema jednačina (14.84) po veličinama q_i i p_i dobićemo rešenja Hamilton-ovih jednačina. Na taj način rešavanje dinamičkog problema svedeno je na nalaženje jednog potpunog integrala Hamilton-Jacobi-eve jednačine.

14.8. Primer

Primenimo Hamilton-Jacobi-ev metod za rešavanje tzv. Kepler-ovog problema, tj. problema kretanja čestice u ravni u polju privlačne centralne sile obrnuto srazmerne kvadratu rastojanja $F = - \frac{k}{r^2} \mathbf{r}_0$. Potencijalna energija ove čestice u odnosu na nulti nivo u beskonačnosti biće

$$U(r) = - \int_{M_0}^M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^r \frac{k}{r^2} dr = - \frac{k}{r},$$

a odgovarajuća Hamilton-ova funkcija može se neposredno dobiti iz obrasca (13.48), u kome zbog kretanja u ravni treba staviti $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, odakle sledi $p_\vartheta = mr^2 \dot{\vartheta} = 0$

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}. \quad (14.87)$$

Prema prvom sistemu jednačina (14.62) ovde treba staviti

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi},$$

tako da Hamilton-Jacobi-eva jednačina (14.63) za ovaj problem glasi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \frac{k}{r} = 0. \quad (14.88)$$

Potražimo sad rešenje ove jednačine metodom razdvajanja promenljivih, stavljajući

$$S = S_1(r) + S_2(\varphi) + S_3(t) \quad (14.89)$$

Tada prethodna jednačina dobija oblik u kome se promenljive r i φ mogu prebaciti na levu stranu, a promenljiva t na desnu

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 \right\} - \frac{k}{r} = -\frac{dS_3}{dt}. \quad (14.90)$$

Da bi funkcija od r i φ s leve strane mogla biti jednaka funkciji od t s desne, ove funkcije moraju se svesti na jednu i to istu konstantu

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 \right\} - \frac{k}{r} = \alpha_2, \quad -\frac{dS_3}{dt} = \alpha_2,$$

odakle sledi, integracijom druge jednačine i množenjem prve sa $2mr^2$

$$S_3 = -\alpha_2 t, \quad \left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 = r^2 \left\{ 2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 \right\} \quad (14.91)$$

Pošto je u drugoj jednačini leva strana funkcija samo od φ , a desna funkcija samo od r , obe ove funkcije takode se moraju svesti na istu konstantu

$$\left(\frac{dS_2}{d\varphi} \right)^2 = \alpha_1^2, \quad r^2 \left\{ 2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 \right\} = \alpha_1^2,$$

odakle se dobija

$$S_2 = \alpha_1 \varphi, \quad \frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} \quad (14.92)$$

Integracijom poslednje jednačine nalazimo

$$S_1 = \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr,$$

tako da traženo rešenje (14.89) dobija oblik

$$S = \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr + \alpha_1 \varphi - \alpha_2 t \quad (14.93)$$

To je potpun integral Hamilton-Jacobi-eva jednačine (14.63), koji zavisi od dveju integracionih konstanti α_1 i α_2 . Identifikujući ove konstante sa novim generalisanim impulsima P_r i P_φ , koji su konstante kretanja, formirajmo odgovarajući Jacobi-ev sistem jednačina (14.84)

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr + \varphi = \beta_1,$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}} dr - t = \beta_2$$

Primenjujući pravilo iz analize za izvod integrala po parametru, nalazimo

$$\int \frac{\alpha_1 dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}}} = \varphi - \beta_1 \quad (14.94)$$

i

$$\int \frac{m dr}{\sqrt{2m\alpha_2 + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_1^2}{r^2}}} = t + \beta_2 \quad (14.95)$$

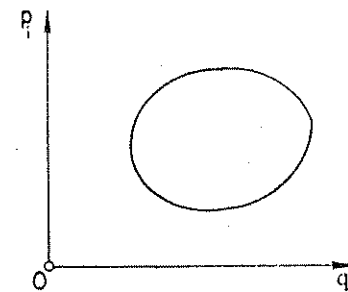
Integral u prvoj jednačini može se izračunati smenom $r=1/u$, a posle integracije dobija se jednačina putanje u obliku

$$r = \frac{\frac{\alpha_1^2}{mk}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2 \alpha_1^2}{mk^2} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \beta_1 \right)}} \quad (14.96)$$

Konstanta α_2 prema prvoj jednačini posle (14.90) predstavlja ukupnu energiju čestice E , pa iz poslednjeg obrasca vidimo da je putanja čestice *konusni presek* i to elipsa ako je $E = \alpha_2 < 0$, hiperbola ako je $E = \alpha_2 > 0$, a parabola ako je $E = \alpha_2 = 0$. Druga jednačina (14.95) posle integracije daće nam polarnu koordinatu r kao funkciju od vremena, što ostavljamo čitaocu za vežbu.

14.9. Promenljive dejstvo-ugao

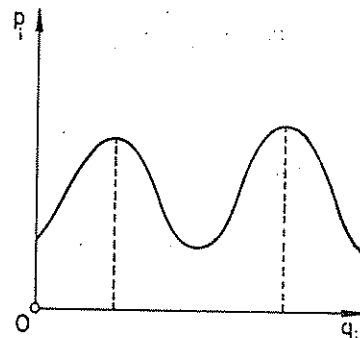
U mnogim granama fizike važnu ulogu igraju sistemi koji vrše periodična kretanja i pri tome nas često ne interesuje detaljno poznavanje već samo period kretanja. Za tu svrhu može se modifikovati Hamilton-Jacobi-ev metod, uzimajući za nove generalisane impulse pogodne kombinacije konstanti α_1 iz potpunog integrala, a sama periodična kretanja na koja ćemo primeniti ovaj metod mogu se podeliti u dve grupe:



Sl. 14.3

1. Kretanja pri kojima su sve funkcije $p_i(t)$ i $q_i(t)$ periodične sa istim periodom za svaki par konjugovanih kanonskih promenljivih. Tada u faznom prostoru projekcija reprezentativne tačke na svaku ravan opisuje zatvorenu putanju (sl. 14.3), a takvo kretanje naziva se *libracija*.

2. Kretanja pri kojima su samo funkcije $p_i(t)$ periodične, ali se pri uvećanju q_i za neku veličinu položaj sistema u stvari ne menja (sl. 14.4). Tipičan primer takvog kretanja je rotacija krutog tela oko nepomične ose, kad pri uvećanju ugla obrtanja za 2π telo dolazi u isti položaj i stoga se ova vrsta periodičnog kretanja naziva *rotacija*.



Sl. 14.4

Posmatrajmo takva periodična kretanja sistema kod kojih Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena i pretpostavimo da Hamilton-Jacobi-eva jednačina (14.65) za takve sisteme dozvoljava razdvajanje promenljivih u obliku

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \dots + W_n(q_n) \quad (14.97)$$

Tada prema obrascima (14.62) i (14.64) imamo

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_1(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i}, \quad (14.98)$$

gde s desne strane figuriše samo jedna, odgovarajuća generalisana koordinata, čime dobijamo funkcije oblika

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Uvedimo sad veličine definisane obrascem

$$J = \oint p_i dq_i, \quad (14.99)$$

gde integraciju treba sprovesti po svim vrednostima q_i u toku jednog ciklusa. Tako definisane veličine nazivaju se *promenljive dejstva*. Stavljajući umesto p_i izraz (14.98), dobijamo

$$J_i = \oint \frac{\partial W_1(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i, \quad (14.100)$$

odakle vidimo da su veličine J_i funkcije od n konstanti α_i

$$J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Stoga ove veličine J_i , kao konstantne i nezavisne, možemo uzeti za nove generalisane impulse, a rešavajući gornji sistem jednačina po veličinama α_i nalazimo

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14.101)$$

Tada karakterističnu funkciju W možemo izraziti u obliku

$$W = W(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n),$$

a Hamilton-ovu funkciju, na osnovu Hamilton-Jacobi-eve jednačine (14.65)

$$\dot{H} = \alpha_1 = \alpha_1(J_1, \dots, J_n) \quad (14.102)$$

Nove generalisane koordinate, koje odgovaraju veličinama J_i , prema drugom obrascu (14.62) određene su relacijama

$$w_i = \frac{\partial S}{\partial J_i} = \frac{\partial W}{\partial J_i} \quad (14.103)$$

One se nazivaju *ugaone promenljive*, a odgovarajući drugi sistem Hamilton-ovih jednačina (13.24) imaće oblik

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_i} \equiv v_i(J_1, \dots, J_n), \quad (14.104)$$

gde smo rezultat diferenciranja ovde označili sa v_i . Odavde integracijom neposredno dobijamo

$$w_i = v_i t + \beta_i, \quad (14.105)$$

tj. *ugaone promenljive kao nove generalisane koordinate su linearne funkcije vremena*.

Da bismo videli smisao ovih veličina v_i , zamislimo da koordinata q_j izvrši jedan pun ciklus, dok ostale koordinate ostanu nepromenjene. Tada će promena ugaone promenljive w_i u toku jednog ciklusa biti

$$\Delta w_i = \oint \delta w_i, \quad \delta w_i = \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j \quad (14.106)$$

pa dobijamo, zamenjujući w_i izrazom (14.103)

$$\Delta w_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial J_i} dq_j$$

a menjajući još red operacija i stavljajući $\partial W / \partial q_i = p_i$

$$\Delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j dq_j \quad (14.107)$$

Dobijeni integral s desne strane prema obrascu (14.99) predstavlja promenljivu dejstva J_j , tako da konačno dobijamo

$$\Delta w_i = \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij} \quad (14.108)$$

Ovaj obrazac određuje ukupnu promenu ugaone promenljive w_i u toku jednog ciklusa izazvanu promenom samo generalisane koordinate q_j . Ako sa τ_i označimo period promenljive q_i , za $j=i$ prema obrascu (14.105) imamo

$$\Delta w_i = 1 = v_i \Delta t = v_i \tau_i,$$

a otuda, s obzirom na obrazac (14.104)

$$v_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \frac{1}{\tau_i} \quad (14.109)$$

Oдавде vidimo da konstante v_i predstavljaju frekvencije ciklusa odgovarajuće promenljive q_i u ravnima (q_i, p_i) .

Na taj način, pomoću promenljivih dejstvo-ugao možemo naći periode pojedinih ciklusa bez detaljnog ispitivanja kretanja sistema. Ako nam je unapred poznato da je kretanje periodično, treba prvo izračunati promenljive dejstva J_i prema obrascu (14.100), a potom ove jednačine rešiti po veličinama α_i , čime se dobijaju relacije oblika (14.101). Tada Hamilton-ovu funkciju treba izraziti pomoću veličina $J_1, \dots, J_n$ u vidu (14.102), a potom izvršiti diferenciranje ove funkcije po promenljivama J_i , čime se prema obrascu (14.104) neposredno dobijaju odgovarajuće frekvencije ciklusa posmatranog periodičnog kretanja.

Glava V

SPECIJALNI PROBLEMI

15. SISTEMI SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE

15.1. Jednodimenziono kretanje

Pozabavimo se prvo najprostijim problemima mehanike, problemima sa jednim stepenom slobode. Posmatrajmo jednodimenziono kretanje jedne čestice duž neke prave, koju uzmimo za X-osu, u polju konzervativnih sila sa potencijalom $U(x)$. Lagrange-eva funkcija takve čestice biće

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x), \quad (15.1)$$

a odgovarajuća Lagrange-eva jednačina (10.30)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (15.2)$$

predstavljaće diferencijalnu jednačinu kretanja posmatrane čestice.

Međutim, u problemima ove vrste nije uvek neophodno izvršiti integraciju ove jednačine i tako dobiti konačne jednačine kretanja, dovoljno je neposredno poći od njenog prvog integrala — zakona održanja mehaničke energije

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E \quad (15.3)$$

To je diferencijalna jednačina prvog reda, koja se može integraliti razdvajanjem promenljivih

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]},$$

odakle se dobija

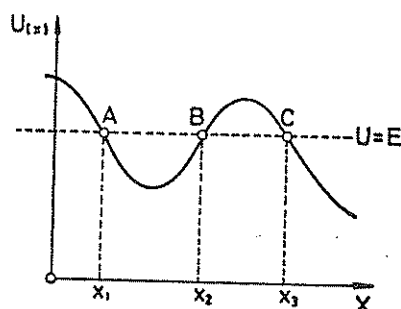
$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + C \quad (15.4)$$

Ulogu integracionih konstanti ovde igraju ukupna energija E i adicijona konstanta C , koje su određene početnim uslovima.

Pošto kinetička energija ne može biti negativna, pri kretanju posmatrane čestice ukupna energija mora biti veća od potencijalne, tj. kretanje čestice se vrši samo u onim oblastima u kojima je $U(x) < E$. Neka na pr. funkcija $U(x)$ ima oblik kao na sl. 15.1 i prikažimo na tom grafiku nivo ukupne energije pravom $U=E$. Tada je kretanje čestice moguće samo u oblasti AB ($x_1 < x < x_2$) ili u oblasti desno od C ($x > x_3$).

Tačke u kojima je potencijalna energija jednaka ukupnoj

$$U(x) = E \quad (15.5)$$



Sl. 15.1

određuju granice kretanja posmatrane čestice i predstavljaju tačke u kojima je njena brzina jednaka nuli. Ako je oblast kretanja ograničena dvema takvim tačkama, kretanje čestice se vrši u ograničenoj oblasti prostora i takvo kretanje naziva se *finitno*. Ukoliko oblast kretanja nije ograničena bar sa jedne strane, za takvo kretanje kažemo da je *indefinitno*.

Jednodimenziono finitno kretanje periodično se ponavlja između krajnjih tačaka (na slici između A i B), tj. predstavlja oscilatorno kretanje. Pri tome, zbog invarijantnosti diferencijalnih jednačina kretanja u odnosu na transformaciju $t \rightarrow -t$, vreme kretanja od x_1 do x_2 biće jednako vremenu obrnutog kretanja od x_2 do x_1 . Stoga je *period oscilacija*, tj. vreme za koje će se čestica vratiti u prvobitno kinematičko stanje, jednako dvostrukom vremenu za koje će čestica preći put od x_1 do x_2 i prema obrascu (15.4) iznosi

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (15.6)$$

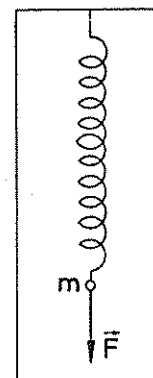
Ovde su $x_1(E)$ i $x_2(E)$ koreni jednačine (15.5) pri datoj vrednosti E i ovaj obrazac određuje period oscilovanja čestice kao funkciju od njene energije E .

15.2. Linearni oscilator

Jedno od najvažnijih kretanja sa jednim stepenom slobode predstavlja tzv. *linearni oscilator*. Pod time se podrazumeva kretanje čestice pod uticajem triju sila: *privlačne sile* srazmerne rastojanju od ravnotežnog položaja, *otporne sile* srazmerne brzini čestice i *prinudne sile* koja je periodična funkcija vremena. Kao primer takvog kretanja može nam poslužiti oscilatorno kretanje jedne male kuglice vezane za elastičnu oprugu (sl. 15.2), koja se nalazi u gustoj gasovitoj sredini i na koju deluje izvesna spoljna periodična sila. Ovakva kretanja igraju važnu ulogu u fizici, jer u nizu fizičkih pojava imamo kretanja ovakve vrste.

Uzmimo pravac kretanja čestice za X -osu, a njen ravnotežni položaj za koordinatni početak i označimo prvu silu sa $-k_1x$, a drugu silu sa $-k_2\dot{x}$. Pošto se svaka periodična funkcija može pomoću Fourier-ovog reda razložiti u zbir sinusnih i kosinusnih funkcija, ograničimo se na najprostiju prinudnu silu oblika $k_3 \cos(\omega t + \beta)$. Tada osnovna jednačina dinamike glasi

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2\dot{x} + k_3 \cos(\omega t + \beta), \quad (15.7)$$



Sl. 15.2

a ako je napišemo u obliku

$$\ddot{x} + \frac{k_2}{m}\dot{x} + \frac{k_1}{m}x = \frac{k_3}{m} \cos(\omega t + \beta)$$

i uvedemo oznake

$$2\rho = \frac{k_2}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, \quad a = \frac{k_3}{m}, \quad (15.8)$$

gornja jednačina dobija vid

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2x = a \cos(\omega t + \beta) \quad (15.9)$$

Proučimo sad redom razne moguće slučajeve, pretpostavljajući da je bar prva sila različita od nule, tj. $\omega_0 \neq 0$.

Čisto harmonijsko kretanje

Ako deluje samo prva sila $-k_1x$, kad je $\omega_0 \neq 0$, a $\rho = a = 0$, jednačina (15.9) se svodi na

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (15.10)$$

Pošto su partikularni integrali ove diferencijalne jednačine $\cos \omega_0 t$ i $\sin \omega_0 t$, njen opšti integral možemo neposredno dobiti kao linearnu kombinaciju ovih partikularnih

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (15.11)$$

do čega se može doći i rešavanjem odgovarajuće karakteristične jednačine. Ako još stavimo

$$C_1 = A \cos \alpha, \quad C_2 = -A \sin \alpha,$$

odakle proizlazi

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{C_2}{C_1} \quad (15.12)$$

gornji izraz prelazi u

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (15.13)$$

gde su A i α nove integracione konstante, koje zavise od početnih uslova. Odavde vidimo da je kretanje u ovom slučaju oscilatorno između $-A$ i $+A$ sa periodom

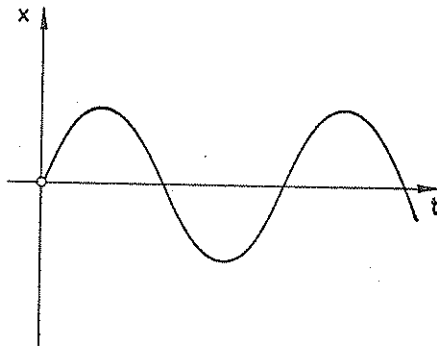
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} \quad (15.14)$$

To je tzv. *čisto harmonijsko kretanje*, a zavisnost elongacije x od vremena prikazana je na i. 15.3.

Kretanje sa otpornom silom

Ako pored prve sile dejstvuje i druga, jednačina (15.9) glasi

$$\ddot{x} + 2\rho \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (15.15)$$



Sl.15.3

Opšti integral ove linearne diferencijalne jednačine možemo naći rešavanjem odgovarajuće karakteristične jednačine

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

odakle dobijamo

$$\lambda_1 = -\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} \quad (15.16)$$

Ovde mogu nastupiti tri slučaja: 1) $\rho < \omega_0$, 2) $\rho > \omega_0$ i 3) $\rho = \omega_0$. Ako su koreni ove jednačine različiti (prva dva slučaja), opšti integral diferencijalne jednačine (15.14) imaće vid

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (15.17)$$

Pri tome, ako je $\rho < \omega_0$, λ_1 i λ_2 su konjugovano kompleksni

$$\lambda_1 = -\rho + i\omega_0', \quad \lambda_2 = -\rho - i\omega_0',$$

gde je

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} \quad (15.18)$$

i tada imamo

$$x = C_1 e^{(-\rho + i\omega_0')t} + C_2 e^{(-\rho - i\omega_0')t}$$

tj.

$$x = e^{-\rho t} (C_1 e^{i\omega_0' t} + C_2 e^{-i\omega_0' t}) \quad (15.19)$$

Izraz u zagradi možemo na osnovu Euler-ovog obrasca $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ svesti na trigonometrijski oblik

$$C_1 e^{i\omega_0' t} + C_2 e^{-i\omega_0' t} = (C_1 + C_2) \cos \omega_0' t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0' t,$$

a stavljajući

$$C_1 + C_2 = A \cos \alpha, \quad i(C_1 - C_2) = -A \sin \alpha,$$

gornji izraz može se napisati

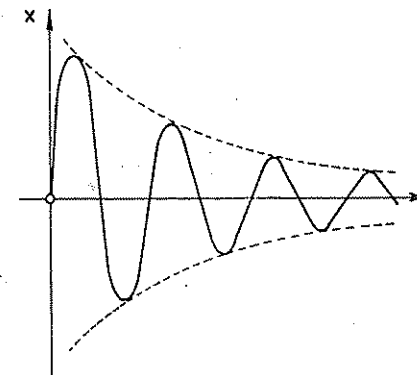
$$C_1 e^{i\omega_0' t} + C_2 e^{-i\omega_0' t} = A \cos(\omega_0' t + \alpha),$$

te dobijamo

$$x = A e^{-\rho t} \cos(\omega_0' t + \alpha) \quad (15.20)$$

U ovom slučaju imamo, dakle, *amortizovane harmonijske oscilacije*, tj. takve oscilacije kod kojih amplituda opada eksponencijalno sa vremenom (sl. 15.4). Pri tome

$$\tau' = \frac{2\pi}{\omega_0'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}} \quad (15.21)$$



Sl. 15.4

predstavlja kvaziperiod, tj. vreme posle koga se dobija ista vrednost $\cos(\omega_0' t + \alpha)$, ali kraća amplituda.

Ako je $\rho > \omega_0$, λ_1 i λ_2 su realni i negativni, te možemo staviti

$$\lambda_1 = -m, \quad \lambda_2 = -n,$$

gde su m i n apsolutne vrednosti izraza (15.16). Tada opšti integral (15.17) dobija vid

$$x = C_1 e^{-mt} + C_2 e^{-nt}. \quad (15.22)$$

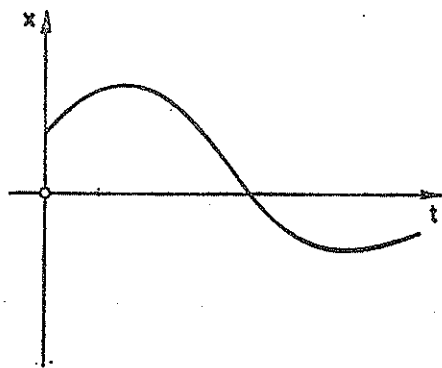
To je *aperiodično kretanje*, pri kome se čestica posle beskonačnog vremena zaustavlja u ravnotežnom položaju (sl. 15.5). Pri tome ona ili ne prolazi ili samo jednom prolazi kroz ravnotežni položaj, što zavisi od početnih uslova.

Ako su koreni karakteristične jednačine jednaki (treći slučaj), opšti integral diferencijalne jednačine (15.15) biće

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} \quad (15.23)$$

Ovde je, prema (15.16)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\rho,$$



Sl. 15.5

te gornji izraz dobija oblik,

$$x = e^{-\rho t} (C_1 + C_2 t), \quad (15.24)$$

što predstavlja graničan slučaj aperiodičnog kretanja.

Kretanje sa prinudnom silom

Ako pored prve sile dejstvuje i treća, jednačina (15.9) imaće vid

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos(\omega t + \beta). \quad (15.25)$$

Opšti integral ove nehomogene diferencijalne jednačine jednak je zbiru opšteg integrala homogene jednačine (15.13) i partikularnog integrala nehomogene jednačine. Potražimo partikularni integral u obliku

$$x_p = C \cos(\omega t + \beta). \quad (15.26)$$

Zamenom u gornjoj jednačini dobijamo

$$-\omega^2 C \cos(\omega t + \beta) + \omega_0^2 C \cos(\omega t + \beta) = a \cos(\omega t + \beta),$$

a otuda

$$C = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

te za x_p nalazimo

$$x_p = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \beta). \quad (15.27)$$

Opšti integral gornje diferencijalne jednačine (15.25) tada glasi

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \beta) \quad (15.28)$$

U ovom slučaju imamo *prinudne neamortizovane oscilacije* i one predstavljaju rezultat slaganja dva čisto harmonijska kretanja: sopstvenog sa periodom $2\pi/\omega_0$ i prinudnog sa periodom $2\pi/\omega$. Međutim, to ne znači da i rezultujuće kretanje mora biti harmonijsko, jer zbir dveju kosinusnih funkcija biće periodična funkcija samo ako su njihove periode sa-merljive.

Gornji izraz možemo transformisati u pogodniji oblik, stavljajući $\omega = \omega_0 + \delta$

$$\begin{aligned} x &= A [\cos \omega_0 t \cos \alpha - \sin \omega_0 t \sin \alpha] + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos \omega_0 t \cos(\delta t + \beta) - \\ &\quad - \sin \omega_0 t \sin(\delta t + \beta)] = \cos \omega_0 t \left[A \cos \alpha + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\delta t + \beta) \right] - \\ &\quad - \sin \omega_0 t \left[A \sin \alpha + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\delta t + \beta) \right] \end{aligned}$$

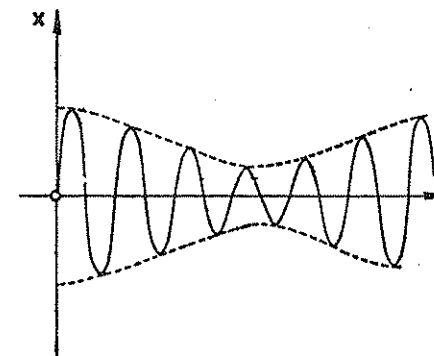
i uvodeći nove veličine $R(t)$ i $\varphi(t)$ relacijama

$$\left. \begin{aligned} A \cos \alpha + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\delta t + \beta) &= R(t) \cos \varphi(t) \\ A \sin \alpha + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\delta t + \beta) &= R(t) \sin \varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (15.29)$$

Tako uvedene veličine biće funkcije vremena, a prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$x = R(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (15.30)$$

Odavde vidimo da se rezultat slaganja ovih dveju harmonijskih oscilacija može shvatiti kao *kvaziharmonijsko kretanje*, čija amplituda $R(t)$ i faza $\varphi(t)$ su funkcije vremena. To je tzv. *podrhtavanje* sa naizmeničnim pojačavanjem i slabljenjem oscilacija (sl. 15.6), koje je periodično samo tada kad su frekvencije sopstvenog i prinudnog kretanja sa-merljive.



Sl. 15.6

Ispitajmo još slučaj kad je $\omega_0 = \omega$, tj. kad su frekvencije sopstvenog i prinudnog kretanja međusobno jednake. Taj slučaj poznat je pod imenom *rezonancija* i tada su gornji rezultati

direktno neprimjenjivi. Ako obrazac (15.28) transformišemo dodavanjem i oduzimanjem izraza $a \cos(\omega_0 t + \beta) / (\omega_0^2 - \omega^2)$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)]$$

i prva dva člana, koji predstavljaju linearnu kombinaciju funkcija $\cos \omega_0 t$ i $\sin \omega_0 t$, napišemo u obliku $A' \cos(\omega_0 t + \alpha')$, gde su A' i α' nove integracione konstante, dobijamo

$$x = A' \cos(\omega_0 t + \alpha') + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} [(\cos(\omega t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta))] \quad (15.31)$$

Da zaista gornji izraz možemo napisati na taj način, sledi iz toga što se nove integracione konstante mogu odrediti iz početnih uslova i u slučaju $\omega = \omega_0$. Naime, za $t=0$ imaćemo

$$x_0 = A' \cos \alpha' + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \beta - \cos \beta) = A' \cos \alpha'$$

$$\dot{x}_0 = -A' \omega \sin \alpha' + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} (-\omega \sin \beta + \omega_0 \sin \beta) = -A' \omega \sin \alpha' + \frac{a}{\omega_0 + \omega} \sin \beta,$$

čime su A' i α' potpuno određeni. Tada pri $\omega \rightarrow \omega_0$ drugi član izraza (15.31) postaje neodređen oblika $0/0$, a smatrajući ovaj član funkcijom od ω i primenjujući na njega l'Hospital-ovo pravilo, nalazimo

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\cos(\omega t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)}{\omega_0^2 - \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{-t \sin(\omega t + \beta)}{-2\omega} = \frac{t}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t + \beta)$$

Tako gornji integral za $\omega = \omega_0$ dobija vid

$$x = A' \cos(\omega_0 t + \alpha') + \frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (15.32)$$

Oдавde vidimo da u slučaju rezonancije amplituda oscilacija raste linearno sa vremenom, čime iščezava stacionarni oscilatorni režim.

U opštem slučaju, kad dejstvuju sve navedene sile, rešenje problema dobiće se kao zbir opšteg integrala odgovarajuće homogene jednačine i partikularnog integrala posmatrane nehomogene jednačine, što ostavljamo čitaocu za vežbu.

15.3. Matematičko klatno

Kao primer prinudnog kretanja čestice sa jednim stepenom slobode uzmimo matematičko klatno, tj. kretanje čestice po krugu u vertikalnoj ravni pod uticajem Zemljine teže (sl. 15.7). Pošto je ovo kretanje po liniji, ono ima samo jedan stepen slobode, a položaj ove čestice potpuno je određen uglom skretanja φ od vertikale. Stoga možemo ovaj ugao uzeti za generalisanu koordinatu i primeniti Lagrange-eve jednačine (10.30)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (15.33)$$

Ovde je $s=R\varphi$, pa je kinetička energija

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (15.34)$$

a potencijalna energija u odnosu na najniži položaj je

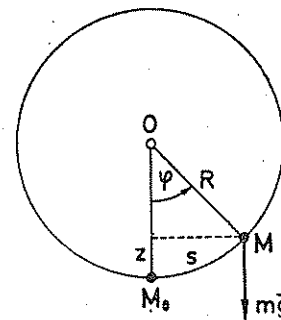
$$U = mgz = mgR(1 - \cos \varphi) \quad (15.35)$$

Tada je Lagrange-eva funkcija

$$L = T - U = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 - mgR(1 - \cos \varphi), \quad (15.36)$$

pa imamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgR \sin \varphi,$$



Sl. 15.7

te jednačina (15.33) dobija oblik

$$\frac{d}{dt} (m R^2 \dot{\varphi}) + mgR \sin \varphi = 0.$$

tj.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \sin \varphi = 0. \quad (15.37)$$

To je diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna. Njen prvi integral možemo naći ako je pomnožimo sa $d\varphi$

$$\ddot{\varphi} d\varphi = -\frac{g}{R} \sin \varphi d\varphi,$$

a pošto je

$$\ddot{\varphi} d\varphi = \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \frac{1}{2} d\dot{\varphi}^2,$$

gornju jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{2} d\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{R} \sin \varphi d\varphi \quad (15.38)$$

Integracijom ove jednačine dobijamo

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{R} \cos \varphi + C = \frac{g}{R} (\cos \varphi + C'), \quad (15.39)$$

gde je $C = \frac{g}{R} C'$ integraciona konstanta. Ovaj prvi integral ekvivalentan je zakonu održanja energije

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + mgR(1 - \cos \varphi) = E, \quad (15.40)$$

iz koga sledi

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R} (\cos \varphi - 1) + \frac{E}{mR^2},$$

što je istog oblika kao i jednačina (15.39), samo izraženo pomoću druge integracione konstante: $C' = \frac{E}{mgR} - 1$, gde je E sad nova integraciona konstanta.

Analizom dobijenog prvog integrala možemo ispitati moguće vrste kretanja matematičkog klatna. Ako je $C' > 1$, uvek je $\dot{\varphi}^2 > 0$, te ugao φ nema ni maksimuma ni minimuma i kretanje je *progresivno*. Ako je $C' = 1$, biće $\dot{\varphi}^2 \geq 0$, pri čemu znak jednakosti važi samo za $\varphi = \pi$, te je ovo kretanje kao graničan slučaj prethodnog *asimptotsko*. Ako je $-1 < C' < 1$, postoje dva ugla φ za koje je $\dot{\varphi} = 0$, takvo kretanje je *oscilatorno* između ta dva ugla. Na pr. za $C' = 0$ mogući su samo oni uglovi za koje je $\cos \varphi \geq 0$, tj. ugao φ se menja između $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$. Ako je $C' = -1$, biće $\dot{\varphi}^2 \leq 0$, pri čemu znak jedna-

kosti ovde važi samo za $\varphi = 0$, te čestica stalno miruje u ravnotežnom položaju. Najzad, ako je $C' < -1$, uvek je $\dot{\varphi}^2 < 0$ i kretanje nije uopšte moguće.

Konačna jednačina kretanja

Ograničimo se u daljem izlaganju na oscilatorno kretanje. Tada je $-1 < C' < 1$, pa možemo staviti

$$C' = -\cos \alpha, \quad (15.41)$$

uvodeći tako umesto integracione konstante C' novu integracionu konstantu α . Jednačina (15.39) tada dobija oblik

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{R} (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (15.42)$$

i iz nje možemo videti smisao konstante α . Naime, ako je $\varphi = \pm \alpha$, biće $\dot{\varphi} = 0$, te φ dostiže u tom slučaju maksimum ili minimum. Prema tome, konstanta α predstavlja maksimalnu apsolutnu vrednost ugla φ , tj. amplitudu oscilacija. Pošto je

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

prethodnu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{R} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (15.43)$$

Odavde imamo

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2 \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

a posle razdvajanja promenljivih

$$\sqrt{\frac{g}{R}} dt = \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

pa integracijom dobijamo

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (15.44)$$

gde smo stavili

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (15.45)$$

pri čemu vreme računamo od trenutka kad je čestica bila u najnižem položaju.

Ako uvedemo novu promenljivu u obrascem

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k u, \quad (15.46)$$

odakle imamo

$$\cos \frac{\varphi}{2} d\frac{\varphi}{2} = k du, \quad d\frac{\varphi}{2} = \frac{k du}{\sqrt{1-k^2 u^2}},$$

prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \quad (15.47)$$

Integral na levoj strani ove jednačine

$$J = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

predstavlja tzv. eliptički integral prve vrste i ne može se izraziti pomoću elementarnih funkcija. Ovaj integral je izvesna funkcija gornje granice

$$J = f(u),$$

a ako pak želimo da prikažemo gornju granicu kao funkciju samog integrala, ova inverzna funkcija takođe se ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija i označava se simbolom sn

$$u = sn J$$

Ovako uvedena funkcija sn , definisana inverzijom gornjeg integrala, naziva se *sinusna eliptička funkcija* i na bazi teorije eliptičkih funkcija postoje i numeričke tablice, pomoću kojih se za svaku vrednost argumenta može naći vrednost ove funkcije. Detaljnije o eliptičkim funkcijama može se naći u svakom opširnijem udžbeniku matematičke analize.

U našem slučaju je $J = \sqrt{\frac{g}{R}} t$, pa imamo

$$u = sn \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \quad (15.48)$$

Prema obrascima (15.46) i (15.48) tada dobijamo

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \quad (15.49)$$

i ova jednačina određuje ugao skretanja φ kao funkciju vremena, te predstavlja konačnu jednačinu kretanja matematičkog klatna.

Period oscilacija

Da bismo našli period oscilacija, primenimo jednačinu (15.47) na najviši položaj matematičkog klatna. Tada vreme t predstavlja četvrtinu perioda τ , a promenljiva u prema obrascu (15.46) u tom položaju ima vrednost jedinice, te imamo

$$\sqrt{\frac{g}{R}} \frac{\tau}{4} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

a odavde nalazimo

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \quad (15.50)$$

Ovaj integral možemo transformisati smenom

$$u = \sin v, \quad du = \cos v dv, \quad (15.51)$$

čime dobijamo

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 v}} \quad (15.52)$$

Ako podintegralnu funkciju razvijemo u red po stepenima od $k^2 \sin^2 v$, imamo

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 v + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 v + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 v + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} \sin^{2n} v \end{aligned}$$

Pošto je svaki član ovog reda, sem prvog, manji od odgovarajućeg člana opadajućeg geometrijskog reda

$$1 + k^2 \sin^2 v + k^4 \sin^4 v + k^6 \sin^6 v + \dots,$$

ovaj red je uniformno konvergentan za sve vrednosti v , te se može integrirati član po član, pa imamo

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} \sin^{2n} v \right] dv,$$

tj.

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} v dv \right] \quad (15.53)$$

Ovaj integral može se izračunati uzastopnom parcijalnom integracijom i na taj način se nalazi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} v dv = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

te dobijamo

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right]^2 k^{2n} \frac{\pi}{2} \right\},$$

tj.

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (15.54)$$

Ovaj obrazac određuje period oscilacija matematičkog klatna. Imajući u vidu da k prema obrascu (15.45) zavisi od amplitude α , vidimo da *period oscilacija zavisi ne samo od dužine klatna i ubrzanja Zemljine teže već i od amplitude oscilacija.*

Slučaj malih oscilacija

Ispitajmo još slučaj vrlo malih oscilacija matematičkog klatna. Tada je α , a takođe i k vrlo malo u odnosu na jedinicu, pa u jednačini (15.47) možemo zanemariti k^2

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \quad (15.55)$$

Inverzijom ovog obrasca dobijamo

$$u = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right),$$

a pošto u ovom slučaju prema obrascu (15.46) približno imamo

$$u = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{\varphi}{\alpha},$$

prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\varphi = \alpha \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \quad (15.56)$$

Odgovarajući period oscilacija možemo naći iz obrasca (15.54), zanemarujući članove sa stepenima od k^2 , čime u prvoj aproksimaciji dobijamo

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (15.57)$$

Dobijeni obrasci određuju konačnu jednačinu kretanja i period vrlo malih oscilacija matematičkog klatna. Odavde vidimo da se u slučaju vrlo malih oscilacija ugao skretanja menja čisto harmonijski sa vremenom, a period oscilacija ne zavisi od njegove amplitude.

U ovom slučaju i potencijalna energija matematičkog klatna dobija uprošćen vid. Razvijajući $\cos \varphi$ u red

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots$$

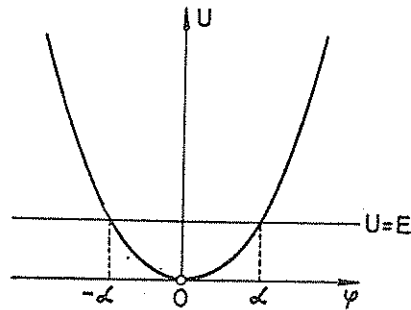
i zanemarujući više stepene, možemo obrazac (15.35) napisati u obliku

$$U = mgR(1 - \cos \varphi) = mgR \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 \right),$$

tj.

$$U = \frac{1}{2} mgR \varphi^2. \quad (15.58)$$

Ako prikažemo potencijalnu energiju kao funkciju ugla φ (sl. 15.8), dobićemo parabolu sa temenom u koordinatnom početku. Pri datoj ukupnoj energiji matematičkog klatna E kretanje je moguće samo u onoj oblasti uglova u kojoj je $U \leq E$. Granice ove oblasti su određene uslovom $U=E$ i to su apscise presečnih tačaka gornje parabole i nivoa ukupne energije E , tj. $-\alpha$ i α .



Sl. 15.8

Napomenimo na kraju da smo silu reakciju kod matematičkog klatna već odredili pomoću prirodnih jednačina kretanja i ona je data obrascem (9.35) za ma koji položaj klatna.

16. MALE OSCILACIJE

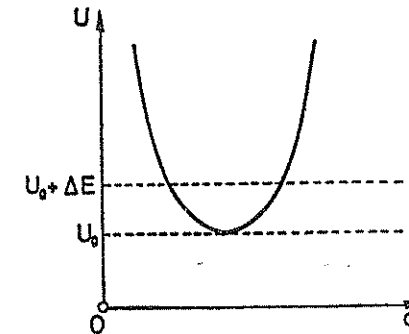
16.1. Stabilna ravnoteža sistema

Posmatrajmo neki sistem čestica sa n stepeni slobode i pretpostavimo da je ovaj sistem holonoman i konzervativan i neka je njegov položaj određen pomoću generalisanih koordinata $q_1, q_2, \dots, q_n$. Ako su u nekom položaju sistema *sve sile koje deluju na čestice jednake nuli*, biće i sve generalisane sile (10.14) takođe jednake nuli

$$Q_i = - \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16.1)$$

i tada kažemo da se sistem čestica nalazi u *ravnoteži*. Pretpostavimo još i da je u tom položaju sistema $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} \right)_0 \neq 0$, tada gornji uslovi kazuju da *pri ravnoteži sistema čestica pod uslovom $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} \right)_0 \neq 0$ njegova potencijalna energija ima ekstremum*.

Izvedimo sada sistem malo iz ravnotežnog položaja, dajući njegovim česticama male brzine. Ako pri tome sistem stalno ostaje u okolini svog ravnotežnog položaja, kažemo da je ravnoteža *stabilna*, a u protivnom slučaju *nestabilna*. Pretpostavimo da je sistem u položaju minimuma potencijalne energije (sl. 16.1) sa energijom $E=U_0$. Ako sistem izvedemo malo



Sl. 16.1

iz ovog položaja povećavajući mu energiju za ΔE , to će izazvati povećanje njegove potencijalne energije i jedan deo primljene energije upotrebiće se na ovo povećanje potencijalne energije, a drugi na dobijanje kinetičke energije. Pošto je sistem po pretpostavci konzervativan, važi zakon o održanju mehaničke energije

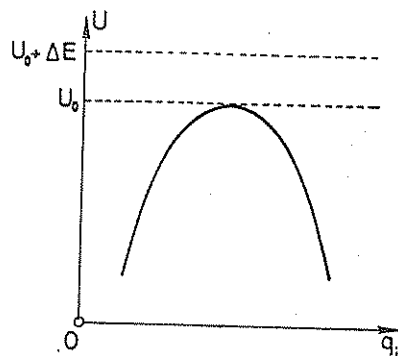
$$T + U = E = \text{const}, \quad (16.2)$$

te svako dalje povećanje potencijalne energije mora izazvati smanjenje kinetičke energije. Kada se sistem čestica toliko udalji od ravnotežnog položaja da mu potencijalna energija bude $U_0 + \Delta E$, kinetička energija će se svesti na nulu, te će se sistem zaustaviti u tom položaju. Potom će pod dejstvom sila početi da se vraća ka svom ravnotežnom položaju i nastaviće da vrši *male oscilacije* oko ovog položaja. Stoga je ovakvo kretanje ograničeno i sistem će stalno ostati u okolini svog ravnotežnog položaja, te je ravnoteža stabilna. Ako bi pak sistem bio u položaju maksimuma potencijalne energije (sl. 16.2), svako udaljavanje sistema iz ravnotežnog položaja izazvalo bi smanjenje potencijalne energije, a time i povećanje kinetičke energije. Stoga bi se u tom slučaju sistem sve više udaljavao od svog ravnotežnog položaja, te bi ravnoteža bila nestabilna. Prema tome, možemo reći:

Ako u položaju ravnoteže holonomnog konzervativnog sistema čestica potencijalna energija ima minimum, ravnoteža sistema je stabilna. Ovaj stav poznat je pod imenom *Lejeune-Dirichlet-ova teorema* i predstavlja samo *dovoljan*, ali ne i *potreban* uslov stabilnosti ravnoteže. Naime, sistem čestica može biti u stabilnoj ravnoteži i u konfiguraciji u kojoj potencijalna energija nema minimum. Kao što je poznato iz matematike, za jednu funkciju $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ od n nezavisno promenljivih položaji stacionarnih tačaka se određuju rešavanjem jednačina

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

a da bi rešenja $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ gornjih jednačina odgovarala *minimumu*, potrebno je da budu zadovoljeni još i sledeći uslovi



Sl. 16.2

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 > 0, \quad \left| \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 \end{pmatrix} \right| > 0, \dots, \\ \left| \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2} \right)_0 \end{pmatrix} \right| > 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

pri čemu se vrednosti drugih izvoda uzimaju u tački $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$. Napisane determinante, koje sve moraju biti pozitivne da bi bio u pitanju minimum, nazivaju se *Sylvester-ove determinante*.

Kao primer stabilne ravnoteže može nam služiti matematičko klatno u svom najnižem, ravnotežnom položaju. Ako klatno malo izvedemo iz ravnotežnog položaja, ono će početi da vrši male oscilacije oko ovog položaja, te je ova ravnoteža stabilna i u tom položaju potencijalna energija klatna, određena obrascem (15.58), ima minimum, kao što se vidi i iz sl. 15.8.

16.2. Diferencijalne jednačine malih oscilacija

Izaberimo sad generalisane koordinate sistema tako da ih računamo od položaja njegove stabilne ravnoteže, tj. da u tom položaju one budu jednake nuli

$$(q_i)_0 = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16.4)$$

Pretpostavimo još da je kinetička energija sistema homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (16.5)$$

Pri tome su koeficijenti a_{ij} izvesne funkcije generalisanih koordinata, pa ako ih razvijemo u Taylor-ov red oko položaja stabilne ravnoteže, s obzirom na uslove (16.4) imamo

$$a_{ij}(q_1, \dots, q_n) = a_{ij}(0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \dots$$

Zbog malog udaljavanja sistema od ravnotežnog položaja sve generalisane koordinate q_k imaju stalno male vrednosti, pa možemo zanemariti više članove

$$a_{ij} \approx a_{ij}(0, \dots, 0), \quad (16.6)$$

te oko položaja stabilne ravnoteže možemo uzeti da su koeficijenti a_{ij} u izrazu za kinetičku energiju konstantni.

Proučimo sad potencijalnu energiju sistema, čiji smo nulti nivo prema prvom uslovu (16.3) odredili tako da potencijalna energija u položaju stabilne ravnoteže bude jednaka nuli

$$U(0, \dots, 0) = 0 \quad (16.7)$$

Razvijmo potencijalnu energiju u Taylorov red oko položaja stabilne ravnoteže

$$U(q_1, \dots, q_n) = U(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots$$

S obzirom na uslove (16.7) i (16.3) prva dva člana otpadaju, a zbog malih vrednosti q_i oko položaja stabilne ravnoteže možemo zadržati samo treći član, koji je oblika

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} q_i q_j \quad (16.8)$$

Prema tome, oko položaja stabilne ravnoteže potencijalna energija sistema uvek se može prikazati kao homogena kvadratna funkcija generalisanih koordinata.

Ako u izrazima (16.5) i (16.8) uzajamno izmenimo indekse i i j i potom izmenimo red sumiranja, dobićemo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} \dot{q}_j \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} q_j q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} q_i q_j$$

pa poredenjem sa polaznim izrazima vidimo da je,

$$a_{ji} = a_{ij} \quad b_{ji} = b_{ij} \quad (16.9)$$

Dakle, koeficijenti a_{ij} i b_{ij} u izrazima za kinetičku i potencijalnu energiju su simetrični.

Formirajmo sad odgovarajuće Lagrange-eve jednačine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Prema obrascima (16.5) i (16.8) Lagrange-eva funkcija je

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - b_{ij} q_i q_j), \quad (16.10)$$

a pošto se svaki par indeksa dva puta pojavljuje, biće

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n b_{ij} q_j,$$

pa Lagrange-eve jednačine glase

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} q_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (16.11)$$

Ovaj sistem od n simultanih diferencijalnih jednačina, linearan po drugim izvodima generalisanih koordinata, predstavlja *diferencijalne jednačine malih oscilacija* holonomnog konzervativnog sistema čestica oko položaja stabilne ravnoteže.

16.3. Normalne koordinate sistema

Potražimo sad partikularne integrale sistema jednačina (16.11) u obliku

$$q_j = A_j \sin(\omega t + \psi) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (16.12)$$

Zamenom ovih izraza u gornjem sistemu jednačina dobijamo

$$- \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega^2 A_j \sin(\omega t + \psi) + \sum_{j=1}^n b_{ij} A_j \sin(\omega t + \psi) = 0,$$

tj.

$$\sum_{j=1}^n (b_{ij} - \omega^2 a_{ij}) A_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16.13)$$

To je sistem od n linearnih homogenih jednačina sa n nepoznatih A_j . Kao što je poznato iz matematike, da bi sistem linearnih homogenih jednačina imao rešenja različita od nule, determinanta njegovih koeficijenata mora biti jednaka nuli, što u ovom slučaju dovodi do uslova

$$|b_{ij} - \omega^2 a_{ij}| = 0 \quad (16.14)$$

Ova jednačina naziva se *karakteristična jednačina* i ona određuje moguće vrednosti ω^2 . Pošto je gornja determinanta n -tog reda, to je *algebarska jednačina n -tog reda po ω^2* , pa ćemo označiti korene ove jednačine sa ω_k^2 ($k=1, 2, \dots, n$). Veličine ω_k određene na ovaj način nazivaju se *svojstvene frekvencije sistema*.

Pokažimo da su svi koreni ω^2 ove jednačine realni i pozitivni. U tom cilju pomnožimo jednačinu (16.13) sa A_i i sumirajmo tako dovičene jednačine po i

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{ij} - \omega^2 a_{ij}) A_j A_i = 0,$$

odakle dobijamo

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} A_i A_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} A_i A_j}. \quad (16.15)$$

Pošto izrazi u brojiocu i imeniocu imaju formalno isti oblik kao potencijalna odnosno kinetička energija (16.5) i (16.8), a one su obe pozitivno definitne, i navedeni izrazi u gor-

njem obrascu su realni i pozitivni, te istu osobinu mora imati i ω^2 . Prema tome, svi koreni karakteristične jednačine ω^2 su realni i pozitivni.

Svaki koren karakteristične jednačine ω_k^2 odgovara jedan sistem linearnih homogenih jednačina (16.13), iz koga možemo odrediti odgovarajuće koeficijente A_j , određene samo do proizvoljnog multiplikativnog faktora, koje ćemo označiti sa A_{jk} , a odgovarajuće konstante Ψ označimo sa Ψ_k . Odgovarajući partikularni integrali diferencijalnih jednačina (16.11) određeni su tada obrascima (16.12)

$$q_j = A_{jk} \sin(\omega_k t + \Psi_k) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (16.16)$$

a pošto su ove diferencijalne jednačine linearne, linearne kombinacije ovakvih partikularnih integrala predstavljaju takođe integrale jednačina (16.11)

$$q_j = \sum_{k=1}^n C_k A_{jk} \sin(\omega_k t + \Psi_k) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (16.17)$$

Ovi izrazi sadrže $2n$ proizvoljnih konstanti C_k i Ψ_k , koje su određene početnim uslovima, stoga oni predstavljaju *opšte integrale* posmatranih diferencijalnih jednačina malih oscilacija sistema.

Prema tome, male oscilacije holonomnog konzervativnog sistema čestica oko položaja stabilne ravnoteže mogu se uvek prikazati kao superpozicija čisto harmonijskih oscilacija sistema kao celine.

Umesto generalisanih koordinata q_j uvedimo sad nove veličine Q_k relacijama

$$q_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} Q_k, \quad (16.18)$$

gde su koeficijenti A_{jk} određeni sistemom jednačina (16.13) za $\omega = \omega_k$ i tako definisane veličine Q_k nazivaju se *normalne* ili *glavne koordinate sistema*. Lagrange-eva funkcija u ovim koordinatama dobija oblik

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_m \dot{Q}_i \dot{Q}_m \sum_j \sum_j a_{ij} A_{jm} - \frac{1}{2} \sum_i \sum_m Q_i Q_m \sum_j \sum_j b_{ij} A_{jm},$$

što možemo napisati i konciznije

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{im} \dot{Q}_i \dot{Q}_m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \beta_{im} Q_i Q_m, \quad (16.19)$$

gde smo uveli oznake

$$\alpha_{im} = \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{jm}, \quad \beta_{im} = \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} A_{jm}. \quad (16.20)$$

Da bismo pokazali da se ova Lagrange-eva funkcija može uprostiti, napišimo jednačinu (16.13) za m -ti koren karakteristične jednačine, pa pomnožimo svaku od njih sa A_{il} i sumirajmo po indeksu i

$$\sum_i \sum_j (b_{ij} - \omega_m^2 a_{ij}) A_{jm} A_{il} = 0. \quad (16.21)$$

Za l -ti koren, izmenom indeksa i i j kao i i m , imaćemo

$$\sum_j \sum_i (b_{ji} - \omega_l^2 a_{ji}) A_{il} A_{jm} = 0,$$

pa oduzimanjem ovih jednačina dobijamo, s obzirom na simetričnost koeficijenata a_{ij} i b_{ij}

$$(\omega_l^2 - \omega_m^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{il} A_{jm} = 0.$$

Ako je $l \neq m$, odavde neposredno sledi da je gornja dvostruka suma jednaka nuli, tj.

$$\alpha_{lm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{il} A_{jm} = 0 \quad (l \neq m). \quad (16.22)$$

Na sličan način, pišući relaciju (16.21) u obliku

$$\sum_i \sum_j b_{ij} A_{il} A_{jm} = \omega_m^2 \sum_i \sum_j a_{ij} A_{il} A_{jm}$$

zaključujemo da i izraz s leve strane mora biti jednak nuli

$$\beta_{lm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} A_{il} A_{jm} = 0 \quad (l \neq m) \quad (16.23)$$

Stoga u Lagrange-evoj funkciji (16.19) otpadaju svi mešoviti članovi, pa dobijamo

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \dot{Q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_{ii} Q_i^2. \quad (16.24)$$

Pošto je $L = T - U$, iz prethodnog izraza vidimo da kinetička i potencijalna energija u novim generalisanim koordinatama imaju oblik

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \dot{Q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_{ii} Q_i^2, \quad (16.25)$$

tj. u normalnim koordinatama sistema kinetička i potencijalna energija imaju oblik sume čisto kvadratnih članova. Odavde neposredno dobijamo i diferencijalne jednačine kretanja u ovim koordinatama, naime

$$\frac{d}{dt}(\alpha_{ii} \dot{Q}_i) - (-\beta_{ii} Q_i) = 0$$

odnosno, na osnovu obrasca (16.15)

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (16.26)$$

Prema tome, uvođenjem normalnih koordinata sistema diferencijalne jednačine malih oscilacija raspadaju se na n međusobno nezavisnih jednačina, od kojih svaka opisuje jednu čisto harmonijsku oscilaciju sistema kao celine.

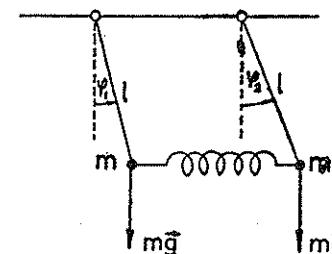
16.4. Primer

Kao primer uzmimo male spregnute oscilacije dvaju matematičkih klatna (sl. 16.3) iste dužine l i mase m , spojenih elastičnom oprugom čiji je koeficijent elastičnosti k , a dužina u nedeformisanom stanju jednaka rastojanju između tačaka vešanja. Ovaj sistem ima dva stepena slobode i za generalisane koordinate uzmimo uglove skretanja od vertikale φ_1 i φ_2 . Kinetička energija ovog sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija oba klatna i prema obrascu (15.34) ima oblik

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \quad (16.27)$$

Potencijalna energija sastoji se iz gravitacione energije oba klatna i elastične energije opruge preko koje se vrši uzajamno dejstvo klatna. Prva energija prema obrascu (15.58) iznosi

$$U_1 = \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$



Sl. 16.3

a pošto je elastična sila u opruzi srazmerna njenom izduženju iz ravnotežnog položaja

$$F = -kx = -kl(\varphi_2 - \varphi_1),$$

druga energija biće

$$U_2 = - \int_0^x F dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kl^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

te je ukupna potencijalna energija

$$U = \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} kl^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \quad (16.28)$$

Poređenjem dobijenih izraza sa izrazima (16.5) i (16.8) vidimo da je

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= ml^2, & a_{22} &= ml^2, & a_{12} &= 0, \\ b_{11} &= mgl + kl^2, & b_{22} &= mgl + kl^2, & b_{12} &= -kl^2 \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

Sistem jednačina (16.13), koji za dva stepena slobode u opštem slučaju ima oblik

$$(b_{11} - \omega^2 a_{11}) A_1 + (b_{12} - \omega^2 a_{12}) A_2 = 0$$

$$(b_{21} - \omega^2 a_{21}) A_1 + (b_{22} - \omega^2 a_{22}) A_2 = 0$$

u ovom slučaju glasi

$$(mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2) A_1 - kl^2 A_2 = 0$$

$$-kl^2 A_1 + (mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2) A_2 = 0,$$

a uvodeći oznake

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad n^2 = \frac{k}{m} \quad (16.30)$$

posle deobe sa ml^2 dobijamo

$$\left. \begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2 + n^2) A_1 - n^2 A_2 &= 0 \\ -n^2 A_1 + (-\omega^2 + \omega_0^2 + n^2) A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

Karakteristična jednačina (16.14) predstavlja tada uslov da gornji sistem linearnih homogenih jednačina ima rešenja različita od nule

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + n^2 & -n^2 \\ -n^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16.32)$$

Ova jednačina u razvijenom obliku glasi

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + n^2)^2 - n^4 = 0,$$

a otuda

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + n^2 = \pm n^2,$$

pa su koreni ove jednačine

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2n^2 \quad (16.33)$$

Tada bilo koja od jednačina (16.31) određuje odgovarajuće odnose koeficijenata $\frac{A_2}{A_1}$, tj. koeficijente A_1 i A_2 određene do multiplikativnog faktora. Stavljanjem prve vrednosti u prvu jednačinu imamo

$$n^2 A_1 - n^2 A_2 = 0,$$

a otuda, označavajući ove koeficijente odgovarajućim indeksom 1, dobijamo

$$A_{21} = A_{11} \quad (16.34)$$

Za drugu vrednost ω_2^2 biće

$$-n^2 A_1 - n^2 A_2 = 0,$$

pa uvodeći indeks 2 dobijamo

$$A_{22} = -A_{12} \quad (16.35)$$

Tada su opšti integrali određeni obrascima (16.17)

$$\varphi_1 = C_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$\varphi_2 = C_1 A_{21} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 A_{22} \sin(\omega_2 t + \psi_2),$$

a pošto je ovde prema obrascima (16.34) i (16.35)

$$C_1 A_{21} = C_1 A_{11}, \quad C_2 A_{22} = -C_2 A_{12},$$

uvodeći nove konstante

$$C_1' = C_1 A_{11}, \quad C_2' = C_2 A_{12}, \quad (16.36)$$

dobijamo

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= C_1' \sin(\omega_1 t + \psi_1) + C_2' \sin(\omega_2 t + \psi_2) \\ \varphi_2 &= C_1' \sin(\omega_1 t + \psi_1) - C_2' \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned} \right\} \quad (16.37)$$

pri čemu su C_1' , C_2' , ψ_1 i ψ_2 integracione konstante, određene početnim uslovima. Ove jednačine možemo napisati i u obliku

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t + C \sin \omega_2 t + D \cos \omega_2 t \\ \varphi_2 &= A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t - C \sin \omega_2 t - D \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (16.38)$$

gde su A, B, C i D nove integracione konstante. Ovi obrasci predstavljaju konačne jednačine kretanja.

Talasni udari

Pretpostavimo sad da je elastična sprega slaba, tj. da je

$$n \ll \omega_0 \quad (16.39)$$

Tada prema drugom obrascu (16.33) približno imamo

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2n^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2n^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2n^2}{\omega_0^2} + \dots \right),$$

pa s obzirom i na prvi obrazac (16.35) dobijamo

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{n^2}{\omega_0^2} \right) \quad (16.40)$$

Dakle, u slučaju slabe elastične sprege svojstvene frekvencije ω_1 i ω_2 se vrlo malo međusobno razlikuju.

Uzmimo pri tome da u trenutku $t=0$ samo jedno klatno malo izvedemo iz ravnotežnog položaja za ugao φ_0 i potom ga pustimo, tj. da je

$$\varphi_{10} = \varphi_0, \quad \varphi_{20} = 0, \quad \dot{\varphi}_{10} = 0, \quad \dot{\varphi}_{20} = 0 \quad (16.41)$$

Uvrštavanjem ovih početnih uslova u jednačine (16.38) imamo

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= B + D, & 0 &= B - D, \\ 0 &= A\omega_1 + C\omega_2, & 0 &= A\omega_1 - C\omega_2, \end{aligned}$$

a otuda

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2} \varphi_0, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2} \varphi_0,$$

pa dobijamo

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t),$$

što možemo napisati i u obliku

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \\ \varphi_2 &= -\varphi_0 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \end{aligned} \right\} \quad (16.42)$$

Ovde je prema obrascima (16.40)

$$\frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_0, \quad \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \approx -\frac{n^2}{2\omega_0},$$

pa konačno dobijamo

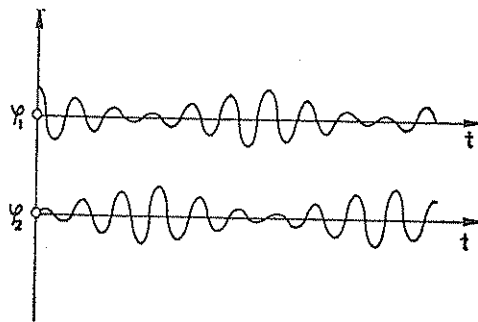
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \left(\varphi_0 \cos \frac{n^2}{2\omega_0} t \right) \cos \omega_0 t \\ \varphi_2 &= \left(\varphi_0 \sin \frac{n^2}{2\omega_0} t \right) \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \quad (16.43)$$

To su konačne jednačine kretanja pod navedenim uslovima. Njihove amplitude (izrazi u zagradama) predstavljaju periodične funkcije vremena sa kružnom frekvencijom $\omega_A = \frac{n^2}{2\omega_0}$, odnosno periodom

$$\tau_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{4\pi\omega_0}{n^2},$$

dok je period funkcija van zagrada $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$, pa je njihov odnos zbog uslova (16.39)

$$\frac{\tau_A}{\tau} = \frac{2\omega_0^2}{n^2} \gg 1 \quad (16.44)$$



Sl. 16.4

Stoga se ove amplitude sporo menjaju u toku vremena u odnosu na izraze van zagrada, pa ih možemo interpretirati kao sporo promenljive amplitude.

Prema tome, dva matematička klatna vezana slabom elastičnom spregom pod navedenim uslovima vrše harmonijske oscilacije sa sporo promenljivim amplitudama, kao što je prikazano na sl. 16.4. U početnom trenutku amplituda prvog klatna ima maksimalnu vrednost φ_0 , a amplituda drugog je nula; potom amplituda prvog opada, a drugog raste i posle vremena $1/4 \tau_A$ amplituda prvog postaje nula, a drugog φ_0 . Dalji proces ponavlja se u obrnutom redu i ta pojava, u kojoj se naizmenično pojačavaju i slabe oscilacije klatna, poznata je pod imenom *talasni udari*.

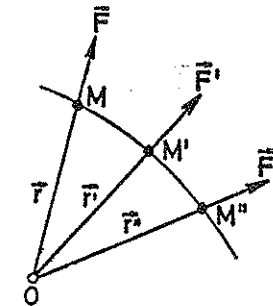
17. CENTRALNO KRETANJE

17.1. Opšte osobine centralnog kretanja

Kretanje čestice pri kome sila koja deluje na nju prolazi stalno kroz jednu tačku prostora (sl. 17.1) naziva se *centralno kretanje*, a odgovarajuća sila *centralna sila*. Ova vrsta kretanja je od velikog značaja, jer u takve sile spadaju gravitacione i električne sile. Pretpostavimo da je u stalnoj tački izvor sile i označimo sa $\mathbf{r}$ vektor položaja posmatrane čestice u odnosu na izvor sile. Tada prema definiciji centralnog kretanja sila $\mathbf{F}$ u svakom trenutku mora biti

kolinearna sa jediničnim vektorom $\mathbf{r}_0$ vektora položaja, a faktor srazmernosti u opštem slučaju može zavistiti od položaja, brzine i vremena.

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{r}_0 \quad (17.1)$$



Sl. 17.1

Međutim, od većeg interesa su jedino takve sile čiji intenzitet zavisi samo od intenziteta vektora položaja

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}_0 \quad (17.2)$$

i mi ćemo se u daljem izlaganju ograničiti samo na ovaj tip centralne sile i pod centralnim kretanjem podrazumevaćemo uvek kretanje čestice pod uticajem takve sile.

Pokažimo pre svega nekoliko opštih osobina centralnog kretanja. Moment sile u odnosu na stalnu tačku O zbog kolinearnosti vektora $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}_0$ je

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times f(r) \mathbf{r}_0 = 0,$$

pa važi zakon o konstantnosti momenta impulsa (5.54)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{C} \quad (17.3)$$

Prema tome, pri centralnom kretanju moment impulsa čestice u odnosu na izvor sile je stalan. Pošto je prema obrascu (13.12) sektorska brzina, tj. površina koju opiše vektor položaja po jedinici vremena, srazmerna momentu impulsa, i ona je takođe konstantna

$$\frac{dS}{dt} = C' \quad (17.4)$$

Pri centralnom kretanju sektorska brzina je stalna u toku vremena. (drugi Keplerov zakon). Sem toga, na osnovu obrasca (17.3) vidimo da vektor položaja $\mathbf{r}$ (sl. 17.2) mora uvek biti normalan na stalnom vektoru $\mathbf{C}$, te stalno leži u ravni normalnoj na vektoru $\mathbf{C}$. Dakle, centralno kretanje uvek se vrši u jednoj ravni, te ima dva stepena slobode.

Da bismo pokazali još jednu bitnu osobinu centralnog kretanja sa silom oblika (17.2), uvedimo veličinu

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(r) dr \quad (17.5)$$

Tada imamo

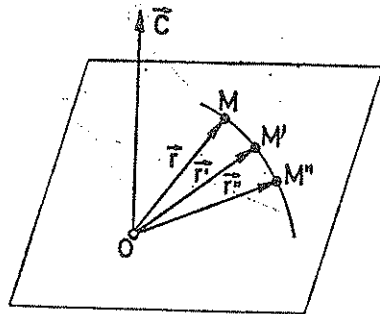
$$U'(r) = -f(r),$$

pa centralnu silu možemo napisati u obliku

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}_0 = -U'(r) \mathbf{r}_0 = -U'(r) \text{grad } r,$$

tj.

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U(r) \quad (17.6)$$



Sl. 17.2

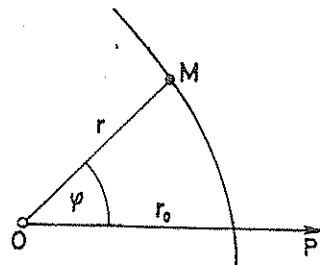
Prema tome, centralne sile oblika $\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}_0$ su uvek konzervativne. Pri tome je potencija određen obrascem (17.5) i on zavisi od zakona sile $f(r)$. Pošto su sile konzervativne, važ zakon o održanju mehaničke energije (5.32)

$$T + U = E = \text{const} \quad (17.7)$$

Dakle, pri centralnom kretanju ukupna energija čestice, tj. zbir kinetičke i potencijalne energije, ostaje stalna.

Izrazimo analitički navedene zakone o održanju momenta impulsa i energije. Pošto sle centralno kretanje vrši u jednoj ravni, a intenzitet sile zavisi samo od r , uzmimo polarne koordinate u ovoj ravni (sl. 17.3), uzimajući za pol stalnu tačku O. Tada zakon o održanju momenta impulsa prema obrascu (13.16) možemo napisati u obliku

$$M = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (17.8)$$



Sl. 17.3

Pošto je potencijalna energija određena obrascem (17.5), zakon o održanju mehaničke energije na osnovu obrasca (3.15) dobija oblik

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const} \quad (17.9)$$

Navedeni obrasci predstavljaju dva prva integrala kretanja.

17.2. Jednačine putanje pri centralnom kretanju

Da bismo našli jednačine putanje za centralno kretanje sa silom oblika (17.2), primenimo Lagrange-ove jednačine (10.30) za r i φ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Na osnovu navedenog obrasca (2.16) Lagrange-eva funkcija posmatrane čestice je

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (17.10)$$

pa, imajući u vidu obrazac (17.5) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\varphi}^2 - U'(r) = m r \dot{\varphi}^2 + f(r) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned}$$

te Lagrange-ove jednačine glase

$$m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - f(r) = 0, \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (17.11)$$

To su diferencijalne jednačine centralnog kretanja. Iz druge jednačine neposredno se nalazi jedan prvi integral

$$m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad (17.12)$$

a to je prema obrascu (17.8) zakon o održanju momenta impulsa, te gornja konstanta predstavlja moment impulsa. Pomoću ovog prvog integrala možemo eliminisati vreme iz diferencijalnih jednačina kretanja, stavljajući

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2}$$

pa imamo

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{M}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \ddot{r} &= -\frac{M}{m} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\varphi} = -\frac{M}{m} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{M}{m r^2} = -\frac{M^2}{m^2 r^3} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Uvrštavajući gornji izraz za $\dot{\varphi}$ i ovaj izraz za $\ddot{r}$ u prvu jednačinu (17.11), dobijamo

$$-\frac{M^2}{m r^3} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{M^2}{m r^3} - f(r) = 0,$$

što posle množenja sa $-m r^2 / M^2$ možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{m r^2 f(r)}{M^2} \quad (17.13)$$

Ova jednačina naziva se *Binet-ov obrazac* i ona predstavlja diferencijalnu jednačinu putanje.

Pri datom zakonu sile $f(r)$ to je diferencijalna jednačina u kojoj je nepoznata funkcija $\frac{1}{r}$.

a nezavisno promenljiva φ , te ćemo rešavanjem ove jednačine dobiti konačnu jednačinu putanje u polarnim koordinatama u obliku

$$\frac{1}{r} = F_1(\varphi)$$

Jednačini putanje možemo dati i drugi, integralni oblik, polazeći od *dva prva integrala kretanja*: zakona o održanju momenta impulsa (17.8) i zakona o održanju energije (17.9). Iz prvog zakona imamo

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

pa stavljajući ove izraze u zakon o održanju energije dobijamo

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{m r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{m r^2} + U(r) = E \quad (17.14)$$

Odavde je

$$\frac{M}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}},$$

pa možemo razdvojiti promenljive

$$d\varphi = \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}},$$

te integracijom dobijamo

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (17.15)$$

pri čemu r_0 odgovara uglu $\varphi=0$. Ova jednačina predstavlja *konačnu jednačinu putanje u integralnom obliku*. Pri datom zakonu sile $U(r)$ je određeno obrascem (17.5), te integral na desnoj strani predstavlja izvesnu određenu funkciju od r , pa rezultat integracije daje konačnu jednačinu putanje u polarnim koordinatama u obliku

$$\varphi = \varphi(r),$$

a inverzijom ove funkcije možemo dobiti jednačinu putanje i u obliku

$$r = F_2(\varphi)$$

17.3. Kepler-ov problem

Među centralnim silama specijalan značaj imaju sile koje opadaju sa kvadratom rastojanja, tj. koje su oblika

$$F = \frac{k}{r^2} \mathbf{r}_0, \quad (17.16)$$

pri čemu k može biti kako pozitivno tako i negativno. Takva sila je npr. Newtonova sila opšte gravitacije

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_0, \quad (17.17)$$

koja određuje silu uzajamnog privlačenja dveju čestica s masama m_1 i m_2 na međusobnom rastojanju r . Problem određivanja kretanja pod uticajem sila oblika (17.16) naziva se *Kepler-ov problem*.

Potencijalna energija koja odgovara ovoj sili prema obrascu (17.5) iznosi

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0},$$

a ako uzmemo da je *potencijalna energija u beskonačnosti jednaka nuli*, biće $r_0 = \infty$, pa dobijamo

$$U(r) = \frac{k}{r} \quad (U(\infty) = 0) \quad (17.18)$$

Da bismo našli jednačinu putanje, stavimo gornji izraz u obrazac (17.15)

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{k}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

Ovaj integral možemo napisati u obliku

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE\right) - \left(\frac{M}{r} + \frac{mk}{M}\right)^2}},$$

odakle vidimo da je zgodno uvesti smenu

$$\frac{M}{r} + \frac{mk}{M} = x, \quad -\frac{M}{r^2} dr = dx \quad (17.19)$$

i staviti

$$a^2 = \frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE \quad (17.20)$$

Tada dobijamo

$$\varphi = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} - \arccos \frac{x_0}{a}$$

pri čemu donja granica x_0 odgovara uglu $\varphi=0$. Ako ugao φ računamo od položaja u kome r ima minimum, tj. u kome je $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, označavajući ovu vrednost sa r_0 na osnovu obrasca (17.14) imamo

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{m r_0^2} + \frac{k}{r_0} = E \quad (17.21)$$

Tada je

$$\frac{x_0}{a} = \frac{\frac{M}{r_0} + \frac{mk}{M}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE}} = \frac{\frac{M}{r_0} + \frac{mk}{M}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{M^2} + \frac{M^2}{r_0^2} + \frac{2mk}{r_0}}} = 1,$$

pa će biti

$$\arccos \frac{x_0}{a} = \arccos 1 = 0,$$

te prethodni obrazac dobija oblik

$$\varphi = \arccos \frac{x}{a} = \arccos \frac{\frac{M}{r} + \frac{mk}{M}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE}} \quad (17.22)$$

Inverzijom ove funkcije dobijamo

$$\frac{\frac{M}{r} + \frac{mk}{M}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE}} = \cos \varphi,$$

a otuda

$$\frac{M}{r} = \cos \varphi \sqrt{\frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE} - \frac{mk}{M}$$

Ako ovu jednačinu rešimo po r, dobićemo

$$r = \frac{M}{\cos \varphi \sqrt{\frac{m^2 k^2}{M^2} + 2mE} - \frac{mk}{M}} = \frac{-\frac{M^2}{mk}}{1 - \cos \varphi \sqrt{1 + \frac{2M^2 E}{m k^2}}}$$

što se može napisati kraće u obliku

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (17.23)$$

gde smo stavili

$$p = -\frac{M^2}{mk}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2M^2 E}{m k^2}} \quad (17.24)$$

Kao što je poznato iz matematike, jednačina (17.23) predstavlja konusni presek sa žižom u polu koordinatnog sistema (dakle u centru sile) i to elipsu ako je $\varepsilon < 1$, hiperbolu ako je $\varepsilon > 1$, a parabolu ako je $\varepsilon = 1$.

Prema tome, pod uticajem centralne sile koja opada sa kvadratom rastojanja čestica opisuju konusni presek sa žižom u izvoru sile i to elipsu ako je $E < 0$, hiperbolu ako je $E > 0$ ili parabolu ako je $E = 0$ (prvi Keplerov zakon).

Ako je $k < 0$, što odgovara privlačnoj sili, biće prema obrascu (17.18) $U(r) < 0$, te ukupna energija može biti i pozitivna, i negativna i nula. Stoga u slučaju $k < 0$ putanja čestice može biti i elipsa, i hiperbola i parabola. Međutim, ako je $k > 0$, što odgovara odbojnoj sili, biće $U(r) > 0$, te je ukupna energija uvek pozitivna. Stoga u slučaju $k > 0$, putanja čestice može biti samo hiperbola, kao na pr. u slučaju rasejanja α -čestica u polju atomskih jezgara (Rutherford-ov eksperiment).

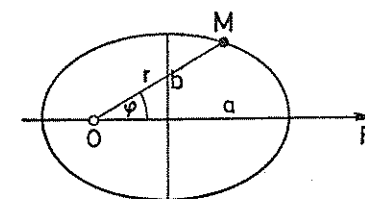
Elipsičke putanje

Zadržimo se posebno na slučaju kada je putanja čestice elipsička (sl. 17.4), kada je $k < 0$ i $E < 0$. Tada je

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{a},$$

pa prema obrascima (17.24) imamo

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{-\frac{M^2}{mk}}{1 - \left(1 + \frac{2M^2 E}{m k^2}\right)},$$



Sl. 17.4

tj. dobijamo

$$a = \frac{k}{2E} \quad (17.25)$$

Poluosu b možemo tada dobiti iz obrasca $p = b^2/a$

$$b^2 = ap = -\frac{k}{2E} \cdot \frac{M^2}{mk} = -\frac{M^2}{2mE},$$

odakle nalazimo

$$b = \sqrt{-\frac{M^2}{2mE}} \quad (17.26)$$

Pošto je $k < 0$ i $E < 0$, dobijene veličine su realne i pozitivne.

Dakle, kod elipsičkih putanja velika poluosa zavisi samo od energije, a mala poluosa kako od energije tako i od momenta impulsa.

Nadimo još zavisnost između perioda obilaženja čestice, koju označimo sa T, i velike poluose a. Pošto je sektorska brzina stalna, ona je jednaka odnosu površine elipse $ab\pi$ i perioda T, pa prema obrascima (13.12) i (17.24) imamo

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{M}{2m}\right)^2 = \left(\frac{ab\pi}{T}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot a p \pi^2}{T^2} = -\frac{a^3 \pi^2 M^2}{T^2 m k},$$

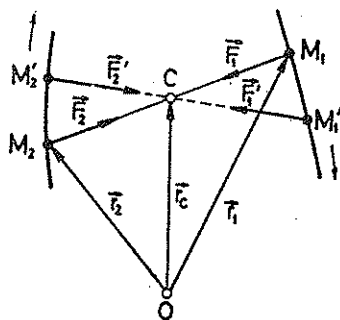
a odavde dobijamo

$$\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2 m}{k} \quad (17.27)$$

Dakle, odnos kvadrata perioda obilaženja i kuba velike poluose kod svih eliptičkih putanja je stalan (treći Keplerov zakon).

17.4. Opšti problem dvaju tela

Sva dosadašnja rasuđivanja važe pod pretpostavkom da je izvor sile nepokretan, tj. da se u njemu nalazi čestica neuporedivo veće mase od mase čestice čije kretanje posmatramo i tada se u izvoru sile nalazi i centar masa obeju čestica. Međutim, u realnosti taj uslov nije često zadovoljen i stoga proučimo opšti slučaj pokretnog izvora sile, tj. slučaj kada se obe čestice kreću pod dejstvom centralne sile njihovog uzajamnog dejstva. Tada sila koja dejstvuje na česticu mase m_1 kao i sila koja dejstvuje na česticu mase m_2 (sl. 17.5) uvek prolaze kroz centar masa obeju čestica, te centar masa ovdje igra ulogu tačke u prostoru kroz koju uvek prolaze centralne sile. Stoga u ranijim dokazima treba samo stalnu tačku O zameniti centrom masa, te se u ovom slučaju kretanje vrši u ravni koja se uniformno kreće zajedno sa centrom masa, ostajući stalno paralelna sama sebi, ali zbog kretanja obeju čestica imamo četiri stepena slobode.



Sl. 17.5

Položaj obeju čestica u ravni kretanja možemo odrediti pomoću njihovih vektora položaja $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, ali je pogodnije umesto njih uvesti vektor položaja centra masa $\mathbf{r}_c$, određen obrascem (5.24), i njihov relativni vektor položaja $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (17.28)$$

Iz ovih jednačina napisanih u obliku

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$$

možemo odrediti $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, množenjem druge sa m_2 odnosno $-m_1$ i sabiranjem sa prvom

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_c + m_2 \mathbf{r}$$

$$m_2 \mathbf{r}_2 + m_1 \mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_c - m_1 \mathbf{r},$$

a otuda

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (17.29)$$

Brzine ovih čestica tada iznose

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad (17.30)$$

gde je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (17.31)$$

relativna brzina prve čestice u odnosu na drugu. Kinetička energija ovih čestica na osnovu gornjih obrazaca je

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[v_c^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[v_c^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 \right] = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2,$$

a uvodeći oznake

$$m = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (17.32)$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2,$$

te Lagrange-eva funkcija sistema od ovih dveju čestica u slučaju da su one izolovane iznosi

$$L = T - U = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 - U(r) \quad (17.33)$$

Ovde m predstavlja ukupnu masu sistema, a μ definisano drugim obrascem (17.32), naziva se *redukovana masa*. Ako je $m_2 \gg m_1$, biće

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1,$$

što odgovara prethodnom slučaju.

Ako ravan kretanja uzmemo za XOY ravan, a za generalisane koordinate uzmemo koordinate centra masa x_c i y_c i relativne koordinate x i y , kretanje ovih čestica je određeno Lagrange-ovim jednačinama

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial L}{\partial x_c} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial L}{\partial y_c} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Ovde Lagrange-eva funkcija u eksplisicnom obliku glasi

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y),$$

pa dobijamo

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_c &= 0, & m \ddot{y}_c &= 0 \\ \mu \ddot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial x}, & \mu \ddot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (17.34)$$

što možemo napisati i u vektorskom obliku, imajući u vidu da je $\mathbf{F} = -\text{grad } U$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_c = 0 \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (17.35)$$

Prva jednačina određuje kretanje centra masa, a druga relativno kretanje čestica. Na osnovu gornjih jednačina možemo reći:

Svako kretanje dveju čestica pod uzajamnim uticajem centralnih sila može se svesti na uniformno translatorno kretanje centra masa, u kome bi bila koncentrisana ukupna masa čestica, i na relativno kretanje ovih dveju čestica, koje je ekvivalentno kretanju jedne zamišljene čestice sa redukovanom masom oko druge nepokretne čestice u centru masa.

Opšti Kepler-ov problem

Ako centralne sile koje dejstvuju između dveju čestica opadaju sa kvadratom rastojanja, imamo opšti Kepler-ov problem. Tada je sila oblika (17.16)

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2} \mathbf{r}_0,$$

pa sistem jednačina (17.35) dobija oblik

$$m\ddot{\mathbf{r}}_c = 0, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{k}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (17.36)$$

Prva jednačina kazuje da se centar masa kreće uniformno, a druga određuje relativno kretanje ovih dveju čestica. Ona je istog oblika kao i jednačina kretanja prve čestice sa nepokretnim centrom privlačenja u centru masa s tom razlikom što umesto mase m stoji redukovana masa μ . Stoga svi ranije dobijeni obrasci i zaključci problema dvaju tela važe i u ovom slučaju s tom razlikom da *svuda umesto mase m treba staviti redukovanu masu μ i da pod r treba podrazumevati rastojanje od centra masa.*

18. SUDARI ČESTICA

18.1. Elastični sudar dveju čestica

Posmatrajmo sad elastični sudar dveju čestica, pod kojim ćemo podrazumevati takvo uzajamno dejstvo između njih pri kome jedna čestica pod uticajem centralne sile koja potiče od druge skrene za izvestan ugao od svog prvobitnog pravca, što je na velikim rastojanjima od mesta sudara ekvivalentno elastičnom sudaru dveju čvrstih kugli. Pošto smo na osnovu jednačina (17.35) videli da se svako centralno kretanje dveju izolovanih čestica može svesti na uniformno kretanje centra masa i relativno kretanje ovih dveju čestica, jednostavnije je posmatrati sudar dveju čestica u sistemu vezanom za njihov centar masa. U ovom sistemu dolazi do izraza samo relativno kretanje čestica, čime je broj stepeni slobode sveden na dva. Nepokretni sistem naziva se tada laboratorijski sistem, a sistem čiji je početak vezan za centar masa ovih čestica sistem centra masa, pri čemu se drugi u odnosu na prvi kreće uniformno kao i sam centar masa. Pošto su svi inercijalni sistemi ekvivalentni, a sistem od ovih dveju čestica je izolovan, u oba sistema važe isti zakoni održanja, te kako u laboratorijskom tako i u sistemu centra masa važe zakoni održanja energije i impulsa.

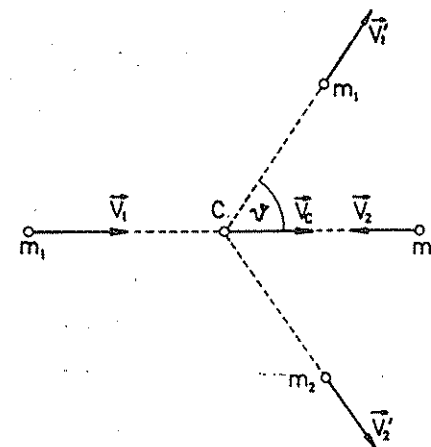
Brzine čestica u oba sistema

Neka su brzine ovih dveju čestica u laboratorijskom sistemu (sl. 18.1) pre sudara $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$, a posle sudara $\mathbf{v}_1'$ i $\mathbf{v}_2'$ i neka pri sudaru prva čestica skrene za izvestan ugao ϑ . Pri tome su na slici prikazani položaji obeju čestica kako pre tako i posle sudara kao i

položaj centra masa u trenutku sudara, tj. u trenutku kada se čestice nalaze najbliže jedna drugoj. Uzmimo da druga čestica pre sudara miruje, tada je brzina prve čestice istovremeno i relativna brzina prve čestice u odnosu na drugu

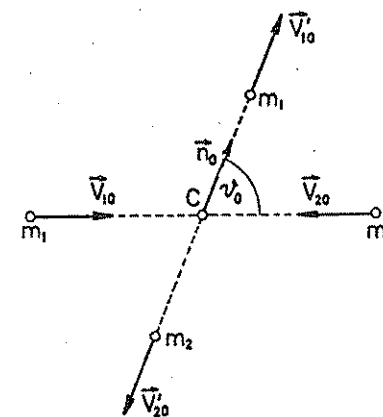
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad (18.1)$$

pri čemu ova relativna brzina mora biti unapred data kao i mase obeju čestica.



Sl. 18.1

U sistemu centra masa (sl. 18.2) označimo sve odgovarajuće veličine indeksom nula, kao što je prikazano na slici, pri čemu su opet prikazani položaji obeju čestica pre i posle su-



Sl. 18.2

dara i položaj centra masa u trenutku sudara. Početak ovog sistema, centar masa na osnovu obrasca (17.28) i (18.1) kreće se u odnosu na laboratorijski sistem brzinom

$$\mathbf{v}_c = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}. \quad (18.2)$$

Brzine čestica pre sudara u ovom sistemu prema obrascima (17.30) imaju vrednosti

$$\left. \begin{aligned} v_{10} &= v_1 - v_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \\ v_{20} &= v_2 - v_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

Ukupni impuls sistema od ovih dveju čestica pre sudara iznosi

$$p_0 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} v - m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v,$$

tj.

$$p_0 = p_{10} + p_{20} = 0 \quad (18.4)$$

Dakle, ukupni impuls obeju čestica u sistemu centra masa jednak je nuli. Pošto ukupni impuls mora ostati isti i posle sudara, biće

$$p_0' = p_{10}' + p_{20}' = 0 \quad (18.5)$$

Impulsi čestica posle sudara ostaju međusobno isti po intenzitetu, a suprotno usmereni.

Pošto je uzajamno dejstvo posmatranih čestica na velikim međusobnim rastojanjima jednako nuli, ukupna energija sistema od ovih dveju čestica na velikim rastojanjima svodi se na kinetičku energiju. Prema obrascu (18.4) je $p_{20} = p_{10}$, pa ukupna energija pre sudara iznosi

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} p_{10}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} p_{10}^2 \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2},$$

što prema drugom obrascu (17.32) možemo napisati u obliku

$$E_0 = \frac{1}{2\mu} p_{10}^2. \quad (18.6)$$

Na osnovu obrasca (18.5) je $p_{20}' = p_{10}'$, pa ukupna energija posle sudara biće

$$E_0' = \frac{1}{2} m_1 v_{10}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}'^2 = \frac{1}{2} p_{10}'^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} p_{10}'^2 \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2},$$

tj.

$$E_0' = \frac{1}{2\mu} p_{10}'^2. \quad (18.7)$$

Pošto ukupna energija mora ostati ista i posle sudara, izjednačujući izraze (18.6) i (18.7) dobijamo da je $p_{10}' = p_{10}$, a pošto je prema obrascima (18.4) i (18.5) $p_{10} = p_{20}$ i $p_{10}' = p_{20}'$, biće i $p_{20}' = p_{20}$

$$p_{10}' = p_{10}, \quad p_{20}' = p_{20} \quad (18.8)$$

Impulsi čestica posle sudara po intenzitetu ostaju nepromenjeni.

Zbog nepromenljivosti masa isti zaključci važe i za brzine čestica, pa s obzirom i na obrazac (18.5) možemo reći:

U sistemu centra masa rezultat sudara dveju čestica svodi se na obrtanje brzina obeju čestica, koje ostaju nepromenjene po intenzitetu, a suprotno usmerene. Ova osobina znatno uprošćava odnose pri sudaru u sistemu centra masa.

Ako sa n_0 označimo jedinični vektor u pravcu brzine prve čestice posle sudara v_{10}' , prema obrascima (18.3) i gornjem zaključku brzine čestica posle sudara u sistemu centra masa biće

$$v_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0, \quad v_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0. \quad (18.9)$$

Tada s obzirom na obrazac (18.2) brzine čestica posle sudara u laboratorijskom sistemu imaju vrednosti

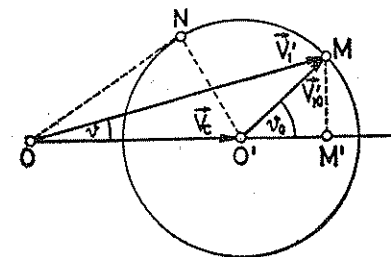
$$\left. \begin{aligned} v_1' &= v_c + v_{10}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0 \\ v_2' &= v_c + v_{20}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0 \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

Pri tome pravac jediničnog vektora n_0 , koji određuje pravac kretanja prve čestice posle sudara u sistemu centra masa, zavisi od zakona uzajamnog dejstva čestica i njihovog uzajamnog položaja u toku sudara, te se o njemu ne može ništa reći na osnovu zakona održanja impulsa i energije.

18.2. Uglovi skretanja u oba sistema

Potražimo sad zavisnost između uglova skretanja prve čestice (sl. 18.3) u laboratorijskom sistemu i sistemu centra masa. Neka su ovi uglovi skretanja ϑ i ϑ_0 , kao što je prikazano na slici. Tada je

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{MM'}{OM'} = \frac{MM'}{OO' + O'M'},$$



Sl. 18.3

tj.

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_{10}' \sin \vartheta_0}{v_c + v_{10}' \cos \vartheta_0}. \quad (18.11)$$

Pošto je prema obrascima (18.9) i (18.2)

$$v_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v,$$

biće

$$\frac{v_c}{v_{10}'} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (18.12)$$

pa prethodni obrazac posle deobe brojitelja i imenitelja sa v_{10}' možemo napisati u obliku

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta_0}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \vartheta_0} \quad (18.13)$$

Ovaj obrazac daje nam vezu između uglova skretanja u laboratorijskom sistemu i sistemu centra masa i iz njega vidimo da *zavisnost između uglova ϑ i ϑ_0 zavisi samo od odnosa masa obeju čestica.*

Ako je $m_1 < m_2$, prema obrascu (18.12) biće $v_e < v_{10}'$, pa će tačka O ležati u unutrašnjosti kruga na sl. 18.3. Tada ugao ϑ može imati sve vrednosti kako manje tako i veće od $\frac{\pi}{2}$, što zavisi od prirode centralnih sila i uzajamnog položaja čestica, te u slučaju $m_1 < m_2$ prva čestica posle sudara u laboratorijskom sistemu može skrenuti za proizvoljan ugao. Ako je $m_1 > m_2$, biće $v_e > v_{10}'$, kao na slici, pa ugao ϑ ne može preći izvesnu maksimalnu vrednost, koju dostiže kad prava OM zauzme položaj tangente ON. Ta maksimalna vrednost prema slici je određena obrascem

$$\sin \vartheta_{\max} = \frac{v_{10}'}{v_e} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (18.14)$$

e u slučaju $m_1 > m_2$ prva čestica posle sudara u laboratorijskom sistemu ne može skrenuti iše od izvesnog maksimalnog ugla, koji zavisi od odnosa masa. Najzad, ako je $m_1 = m_2$, to e može smatrati kao graničan slučaj prethodnog, pa dobijamo $\sin \vartheta_{\max} = 1$ odnosno

$$\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{2}.$$

U poslednjem slučaju $m_1 = m_2$ obrazac (18.13) dobija znatno prostiji oblik. Tada imamo

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta_0}{1 + \cos \vartheta_0} = \frac{2 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}}{2 \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2}} = \frac{\sin \frac{\vartheta_0}{2}}{\cos \frac{\vartheta_0}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2},$$

pa dobijamo

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{2}. \quad (18.15)$$

Dakle, u slučaju $m_1 = m_2$ ugao skretanja u laboratorijskom sistemu uvek je polovina od ugla skretanja u sistemu centra masa.

18.3. Gubitak energije čestice pri sudaru

Na osnovu dobijenih rezultata možemo naći i gubitak energije prve čestice pri sudaru u laboratorijskom sistemu. Energija prve čestice posle sudara u ovom sistemu prema prvom obrascu (18.10) iznosi

$$\begin{aligned} E_1' &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{m_1^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{2 m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} \cos \vartheta_0 + \frac{m_2^2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} \right], \end{aligned}$$

tj.

$$E_1' = \frac{1}{2} \frac{m_1 v^2}{(m_1 + m_2)^2} (m_1^2 + 2 m_1 m_2 \cos \vartheta_0 + m_2^2). \quad (18.16)$$

Pošto je energija prve čestice pre sudara bila $\frac{1}{2} m_1 v^2$, promena njene energije je

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= E_1 - E_1' = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1 v^2}{(m_1 + m_2)^2} (m_1^2 + 2 m_1 m_2 \cos \vartheta_0 + m_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 v^2}{(m_1 + m_2)^2} (2 m_1 m_2 - 2 m_1 m_2 \cos \vartheta_0), \end{aligned}$$

tj.

$$\Delta E_1 = \frac{m_1^2 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \vartheta_0). \quad (18.17)$$

Ovaj obrazac određuje gubitak energije prve čestice pri sudaru u laboratorijskom sistemu u funkciji od ugla skretanja u sistemu centra masa. Ako želimo da izrazimo gornji izraz u funkciji od ugla skretanja u laboratorijskom sistemu ϑ , taj prelaz može se izvršiti pomoću obrasca (18.11), čime bismo sve veličine izrazili u laboratorijskom sistemu.

Ako su mase čestica jednake, tj. ako je $m_1 = m_2$, prethodni obrazac dobija prostiji oblik. Tada je

$$\Delta E_1 = \frac{m_1^3 v^2}{4 m_1^2} (1 - \cos \vartheta_0) = \frac{m_1 v^2}{4} 2 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} = E_1 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2},$$

što s obzirom na obrazac (18.15) možemo napisati u obliku

$$\Delta E_1 = E_1 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} = E_1 \sin^2 \vartheta. \quad (18.18)$$

Ovaj obrazac određuje gubitak energije prve čestice pri sudaru sa česticom iste mase u funkciji od ugla skretanja u laboratorijskom sistemu, te će energije prve i druge čestice posle sudara biti

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= E_1 - \Delta E_1 = E_1 \cos^2 \vartheta \\ E_2' &= \Delta E_1 = E_1 \sin^2 \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

18.4. Rasejanje čestica

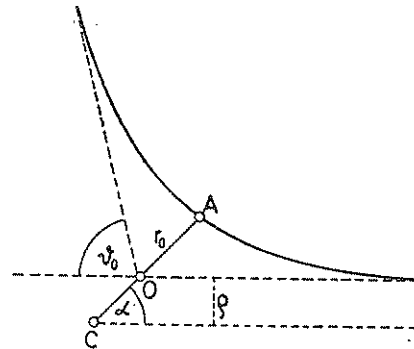
Proučimo sad elastični sudar čestica uzimajući u obzir i određeni zakon njihovog uzajamnog dejstva. Posmatrajmo skretanje jedne čestice mase m_1 (sl. 18.4) u polju centralne sile sa potencijalom $U(r)$, koje potiče od druge čestice mase m_2 . Ranije smo videli, na osnovu obrasca (17.35), da je kretanje čestice u polju pokretnog izvora sila ekvivalentno zamišljenom kretanju čestice redukovane mase μ u polju nepokretnog izvora sila u centru masa. Stoga će biti pogodnije posmatrati ovo skretanje čestice u sistemu centra masa, gde imamo samo dva stepena slobode.

Neka je C centar masa, u kome zamišljamo nepomičan izvor sila, izvučena linija putanja čestice sa masom μ , v_{10} i v_{20} početna i krajnja brzina te čestice, a ϑ_0 njen ugao skretanja, tj. ugao između asimptota putanje. Pošto intenzitet centralnih sila zavisi samo od rastojanja od izvora sila, putanja čestice je simetrična u odnosu na pravu koja prolazi kroz centar masa i najbližu tačku putanje, i neka je α ugao između ove ose simetrije CA i

prvobitnog pravca čestice. Tada prema slici vidimo da između uglova ϑ_0 i α postoji sledeća zavisnost

$$\vartheta_0 = \pi - 2\alpha, \quad (18.20)$$

te se problem određivanja ugla skretanja ϑ_0 svodi na problem nalaženja ugla α .



Sl. 18.4

Određivanje ugla skretanja

Uvedimo polarne koordinate u ravni putanje, uzimajući centar masa C za pol, a osu simetrije za polarnu osu. Ako imamo u vidu da posmatrana putanja u sistemu centra masa odgovara kretanju čestice redukovane mase μ , jednačina ove putanje prema obrascu (17.15) glasi

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}},$$

gde r_0 odgovara najbližoj tački putanje A. Za beskonačno udaljenu tačku na putanji biće $r = \infty$, $\varphi = \alpha$, pa imamo

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (18.21)$$

i ovaj obrazac određuje ugao α , a time i ugao skretanja ϑ_0 .

U ovom problemu pogodno je umesto konstanti kretanja E i M uvesti dve druge konstante: brzinu čestice u beskonačnosti v_{∞} , koja ima vrednost $v_{\infty} = |\mathbf{v}_{10}| = |\mathbf{v}_{20}|$, i tzv. parametar sudara ρ , koji se definiše kao rastojanje na kome bi čestica prošla od izvora sile kad polje sile ne bi delovalo. Tada je

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{\infty}^2, \quad M = \rho \mu v_{\infty}. \quad (18.22)$$

Ovi obrasci izražavaju stare konstante kretanja pomoću novih, pa obrazac (18.21) dobija oblik

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho \mu v_{\infty}}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left[\frac{1}{2} \mu v_{\infty}^2 - U(r) \right] - \frac{\rho^2 \mu^3 v_{\infty}^2}{r^2}}},$$

tj.

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v_{\infty}^2}}} \quad (18.23)$$

Ako je dat zakon uzajamnog dejstva čestica $U(r)$ i brzina čestice u beskonačnosti v_{∞} , ovaj obrazac zajedno sa obrascem (18.20) određuje ugao skretanja ϑ_0 u funkciji od parametra sudara ρ

$$\vartheta_0 = \vartheta_0(\rho)$$

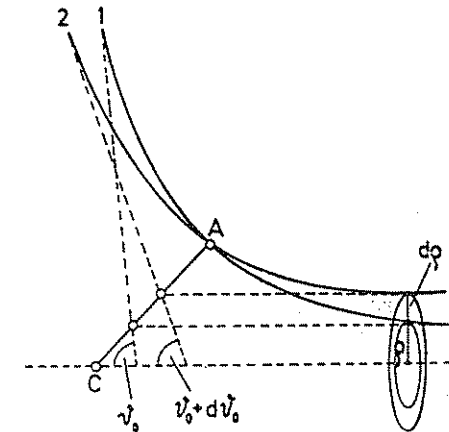
O ovoj funkciji pretpostavimo samo da je jednoznačna i monotona i da se može rešiti po ρ

$$\rho = \rho(\vartheta_0) \quad (18.24)$$

Npr. ako je centralna sila odbojna i opada sa rastojanjem, ukoliko čestica prođe bliže izvoru sila utoliko će više skrenuti, tj. ukoliko je manje ρ utoliko je veće ϑ_0 . U tom slučaju gornja funkcija će biti izvesna monotonno opadajuća funkcija.

18.5. Efikasni presek rasejanja

U fizičkim problemima obično se ne radi o individualnom skretanju čestica, već o rasejanju paralelnog snopa istih čestica koje dolaze sa istom brzinom v_{∞} . Različite čestice u snopu imaju različite parametre sudara (sl. 18.5) i stoga skreću pod različitim uglovima. Pretpo-



Sl. 18.5

stavimo da je snop čestica homogen, pa označimo sa n tzv. gustinu fluksa, tj. broj čestica koje u jedinici vremena prođu kroz jedinicu površine normalnog preseka snopa, a sa dN broj rasejanih čestica koje u jedinici vremena skrenu za ugao između ϑ_0 i $\vartheta_0 + d\vartheta_0$. Tada se odnos

$$d\sigma_0 = \frac{dN}{n} \quad (18.25)$$

tj. odnos broja rasejanih čestica u jedinici vremena u intervalu $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$ i gustine fluksa upadnih čestica naziva diferencijalni efikasni presek rasejanja. Zbir ovih veličina po svim mogućim uglovima

$$\sigma_0 = \int d\sigma_0 = \int \frac{dN}{n} \quad (18.26)$$

naziva se *ukupni efikasni presek rasejanja*; on je određen prirodom uzajamnog dejstva čestica i predstavlja važnu karakteristiku procesa rasejanja.

Ako sa ρ i $\rho + d\rho$ označimo dva parametra sudara i posmatramo upadne čestice koje imaju parametar sudara u tom intervalu, one će skrenuti za ugao koji leži u intervalu $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$, kao što je prikazano na slici 18.5. Broj čestica koje u jedinici vremena skrenu za ugao između ϑ_0 i $\vartheta_0 + d\vartheta_0$ jednak je broju čestica koje na velikom rastojanju od izvora sila prođu u jedinici vremena kroz kružni prsten poluprečnika ρ i $\rho + d\rho$, te iznosi

$$dN = 2\pi \rho d\rho \cdot n \quad (18.27)$$

Tada je diferencijalni efikasni presek

$$d\sigma_0 = \frac{dN}{n} = 2\pi \rho d\rho, \quad (18.28)$$

tj. *diferencijalni efikasni presek rasejanja jednak je površini kružnog prstena između ρ i $\rho + d\rho$, koji odgovara intervalu ugla skretanja $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$.*

Ovu veličinu možemo izraziti i u funkciji od ugla skretanja na osnovu funkcije (18.24), koja pod učinjenim pretpostavkama predstavlja poznatu funkciju od ϑ_0

$$d\sigma_0 = 2\pi \rho(\vartheta_0) \frac{d\rho(\vartheta_0)}{d\vartheta_0} d\vartheta_0 \quad (18.29)$$

Imajući u vidu da je prostorni ugao koji odgovara intervalu $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$

$$d\omega_0 = 2\pi \sin \vartheta_0 d\vartheta_0,$$

poslednji obrazac možemo napisati u obliku

$$d\sigma_0 = \frac{\rho(\vartheta_0)}{\sin \vartheta_0} \frac{d\rho(\vartheta_0)}{d\vartheta_0} d\omega_0. \quad (18.30)$$

Ovi obrasci određuju *diferencijalni efikasni presek rasejanja* u funkciji od *ugla skretanja u sistemu centra mase*. Ako želimo da predemo u laboratorijski sistem, treba samo u dobijenim izrazima preći sa ugla ϑ_0 na ugao ϑ pomoću obrasca (18.13).

18.6. Primer

Kao primer uzmimo elastično rasejanje čvrste kugle na nepomičnoj čvrstoj kugli (sl. 18.6). Ako sa a označimo zbir njihovih poluprečnika, sudar nastupa kada se centar pokretne kugle nađe na rastojanju a od centra nepokretne. Pošto pri dodiru idealno čvrstih kugli nastaju beskonačno velike odbojne sile u pravcu normale, potencijal je oblika

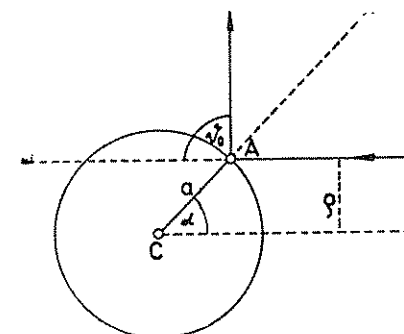
$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{za } r > a \\ \infty & , \quad r < a \end{cases} \quad (18.31)$$

Prema slici tada imamo

$$\rho = a \sin \alpha,$$

a pošto je prema obrascu (18.20)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0}{2},$$



Sl. 18.6

dobijamo

$$\rho = a \cos \frac{\vartheta_0}{2}, \quad (18.32)$$

Ova jednačina daje nam zavisnost između ρ i ϑ_0 , tj. predstavlja funkciju oblika (18.24).

Diferencijalni efikasni presek rasejanja prema obrascu (18.29) tada glasi

$$d\sigma_0 = 2\pi \rho \frac{d\rho}{d\vartheta_0} d\vartheta_0 = -2\pi a \cos \frac{\vartheta_0}{2} \frac{a}{2} \sin \frac{\vartheta_0}{2} d\vartheta_0$$

tj.

$$d\sigma_0 = -\frac{\pi a^2}{2} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0, \quad (18.33)$$

pri čemu treba imati u vidu da pri porastu ρ ugao ϑ_0 opada, te je tada $d\vartheta_0 < 0$. Kad ρ raste od 0 do a , ϑ_0 opada od π do 0, a zatim za vrednosti od a do ∞ ugao ϑ_0 ostaje jednak nuli, te je ukupni efikasni presek

$$\sigma_0 = - \int_{\pi}^0 \frac{\pi a^2}{2} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2,$$

tj.

$$\sigma_0 = a^2 \pi \quad (18.34)$$

Ovaj obrazac određuje ukupni efikasni presek rasejanja i iz njega vidimo da je on jednak površini glavnog poprečnog preseka kugle, čiji je poluprečnik jednak zbiru poluprečnika posmatranih dveju kugli.

Glava VI

KRETANJE KRUTOG TELA

19. KINEMATIČKI ELEMENTI KRUTOG TELA

19.1. Određivanje položaja krutog tela

Kruto telo je takav sistem čestica čija se međusobna rastojanja ne menjaju u toku vremena. Ovako definisano kruto telo predstavlja idealizovan pojam, ali u velikom broju slučajeva srednja međusobna rastojanja molekula čvrstih tela skoro se ne menjaju ni pod uticajem sila, te se mnoga tela vrlo približno ponašaju kao kruta.

Ispitajmo pre svega koliko stepeni slobode ima slobodno kruto telo. Njegov položaj potpuno je određen *trima tačkama koje ne leže na istoj pravoj*. Za određivanje položaja prve tačke potrebne su tri koordinate (x_1, y_1, z_1) , za drugu tačku zbog uslova nepromenljivosti njenog rastojanja od prve

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{const}$$

samo su dve koordinate nezavisne, a za treću tačku zbog uslova nepromenljivosti njenog rastojanja od prvih dveju

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \text{const},$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = \text{const}$$

samo jedna koordinata je nezavisna.

Prema tome, ma kakvo slobodno kruto telo od proizvoljnog broja čestica ima šest stepeni slobode.

Položaj krutog tela može se odrediti na taj način što se za njega čvrsto veže jedan koordinatni sistem $AX'Y'Z'$ (sl. 19.1), koji se kreće na isti način kao i samo kruto telo. Tada je *položaj krutog tela u ma kom trenutku određen položajem ovog koordinatnog sistema $AX'Y'Z'$ vezanog za njega*. Položaj novog koordinatnog početka, koji se naziva *pol krutog tela*, određen je njegovim koordinatama (x_A, y_A, z_A) i ove tri koordinate istovremeno određuju i *translatorsko kretanje krutog tela*. Položaj novih koordinatnih osa može se odrediti na dva načina: pomoću kosinusa pravaca ili pomoću tzv. *Euler-ovih uglova*, koji istovremeno određuju i *rotaciono kretanje krutog tela*.

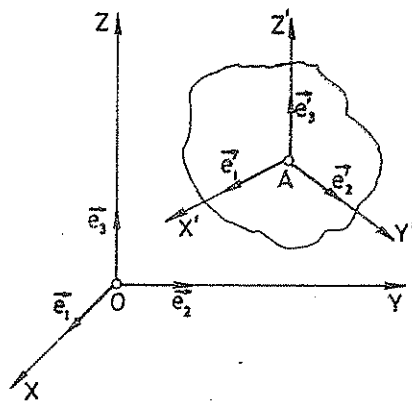
U prvom načinu određivanja položaja novih osa koristimo kosinuse pravaca novih jediničnih vektora e_1' , e_2' i e_3' , koje možemo označiti prema šemi

	e_1	e_2	e_3
e_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}
e_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}
e_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(19.1)

Između njih postoje međutim šest veza

$$e_i' \cdot e_i' = 1, \quad e_i' \cdot e_j' = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$



Sl. 19.1

što možemo napisati i analitički koncizno u obliku

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19.2)$$

i

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jk} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (19.3)$$

te su samo tri kosinusa pravca nezavisna. Stoga pri upotrebi kosinusa pravaca moramo stalno voditi računa o ovim vezama, što znatno otežava rad sa njima.

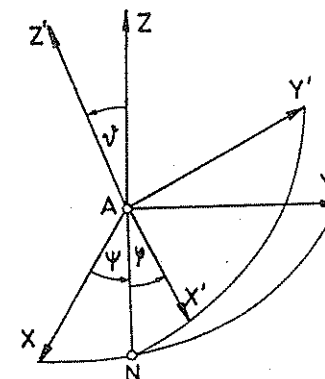
U drugom načinu određivanja položaja novih osa koristimo samo tri nezavisna ugla i stoga je ovaj način pogodniji od prethodnog. Ako sistem OXYZ pomerimo translatorsno u tačku A (sl. 19.2), koordinatne ravni XAY i X'AY' seku se po izvesnoj pravoj AN, koja se naziva *čvorna linija*. Tada se položaj novih osa može odrediti pomoću ova tri ugla: ugla ψ između X ose i čvorne linije AN, ugla ϑ između Z ose i Z' ose i ugla φ između čvorne linije AN i X' ose. Ova tri ugla nazivaju se *Euler-ovi uglovi*, pri čemu se često ugao ψ naziva *ugao precesije*, ugao ϑ *ugao nutacije*, a ugao φ *ugao rotacije*. Koordinatni sistem XYZ može se tada dovesti u položaj koordinatnog sistema AX'Y'Z' pomoću triju uzastopnih rotacija: *rotacije oko Z ose za ugao ψ* , *zatim rotacije oko čvorne linije AN za ugao ϑ* i *najzad rotacije oko Z' ose za ugao φ* , odakle vidimo da ova tri ugla zaista određuju položaj novog koordinatnog sistema u odnosu na stari.

Na taj način položaj krutog tela može se odrediti pomoću šest nezavisnih veličina, koliko ima i stepeni slobode, te ove veličine možemo smatrati kao *generalisane koordinate krutog tela*.

Kretanje krutog tela je potpuno određeno ako znamo kako se ove veličine menjaju u toku vremena. Na pr. ako znamo funkcije

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x_A(t), & y_A &= y_A(t), & z_A &= z_A(t), \\ \psi &= \psi(t), & \vartheta &= \vartheta(t), & \varphi &= \varphi(t), \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

one potpuno određuju kretanje krutog tela i predstavljaju *konačne jednačine kretanja*.



Sl. 19.2

19.2. Ortogonalne transformacije

Zadržimo se na transformacijama iz nepomičnog sistema XYZ u sistem AX'Y'Z' vezan za kruto telo. Radi konciznijeg pisanja uvedimo oznake

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad (19.5)$$

i izrazimo nove koordinate kao funkcije starih

$$x_i' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i' = \left(\sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j \right) \cdot \mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^3 x_j (\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j),$$

što prema shemi (19.1) možemo napisati u obliku

$$x_i' = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19.6)$$

Ove transformacije koordinata karakterišu se time da pri posmatranoj rotaciji koordinatnih osa *intenzitet bilo kog vektora položaja ostaje nepromenjen*

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2. \quad (19.7)$$

Ispitajmo sad uslove koje moraju zadovoljavati koeficijenti α_{ij} da bi ovaj zahtav bio zadovoljen. Stavljajući izraz (19.6) u levu stranu relacije (19.7), dobijamo

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{ik} x_j x_k$$

ili, menjajući redosled sumiranja

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{ik} \right) x_j x_k \quad (19.8)$$

Da bi se ovaj izraz sveo na desnu stranu relacije (19.7), mora biti

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{ik} = 1 \quad \text{za } j=k$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{ik} = 0 \quad \text{,, } j \neq k,$$

a ove uslove možemo napisati konciznije pomoću Kronecker-ovog simbola

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \alpha_{ik} = \delta_{jk} \quad (19.9)$$

što je ekvivalentno sa (19.2) i (19.3).

Svaka linearna transformacija koordinata oblika (19.6) pri kojoj koeficijenti zadovoljavaju uslove (19.9), a koji u opštem slučaju ne moraju predstavljati koeficijente pravca, naziva se *ortogonalna transformacija*, a shema odgovarajućih koeficijenata

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (19.10)$$

matrica ove transformacije. Na taj način prelaz od nepokretnog sistema ka sistemu vezanom za kruto telo predstavlja jednu ortogonalnu transformaciju.

Navedimo kao primer rotaciju sistema $AXYZ$ u ravni oko Z ose za ugao φ (sl. 19.3). Tada se prema slici neposredno vidi da je

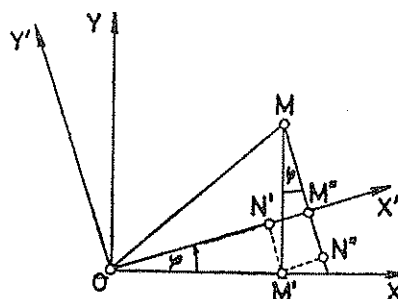
$$x' = OM'' = ON' + M'N''$$

kao i

$$y' = MM'' = MN'' - N'M',$$

što možemo izraziti pomoću starih koordinata i ugla rotacije φ u obliku

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (19.11)$$



Sl. 19.3

Matrica ove transformacije biće

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (19.12)$$

za koju se lako može pokazati da je *ortogonalna*. Naime, ako formiramo transponovanu matricu $\tilde{A}$, definisanu formulom $\tilde{A}_{ij} = A_{ji}$, imaćemo

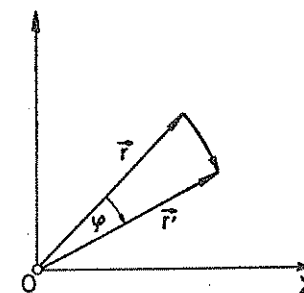
$$A^* = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

a njihov proizvod biće jedinična matrica

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad (19.13)$$

što je ekvivalentno definiciji ortogonalne matrice $\tilde{A} = A^{-1}$. Sem toga, neposredno se vidi da je determinanta ove matrice $|\alpha_{ij}| = 1$, što sve važi i u opštem slučaju.

Matricu ove ortogonalne transformacije možemo smatrati i kao *operator* koji dejstvujući na komponente (x, y) vektora položaja r prevodi ih u komponente (x', y') tog istog vektora u novom sistemu. Međutim ovu istu matricu možemo interpretirati i kao operator koji dejstvujući na vektor r prevodi ga u vektor r' u istom koordinatnom sistemu (sl. 19.4). Obe ove interpretacije su ekvivalentne, pri čemu je u mehanici krutih tela pogodnija prva, dok je za druge ciljeve često korisnija druga.



Sl. 19.4

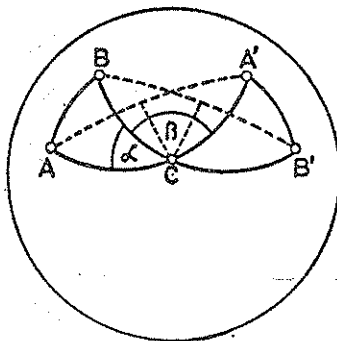
19.3. Euler-ova i Chasles-ova teorema

Proučimo sad osnovne forme kretanja krutog tela, na koje se može razložiti svako složeno kretanje. *Translacija krutog tela* predstavlja takvo njegovo pomeranje pri kome se sve tačke ovog tela pomere za istu veličinu Δr . *Rotacija krutog tela* predstavlja pak takvo njegovo pomeranje pri kome se sve tačke obrnu za isti ugao $\Delta \alpha$ oko neke ose. Pokažimo sad da se svako kretanje krutog tela sa jednom nepomičnom tačkom može ostvariti pomoću jedne rotacije oko neke određene ose, a da se ma kakvo pomeranje krutog tela u prostoru može razložiti na jednu translaciju i rotaciju.

U tom cilju posmatrajmo prvo slučaj kad kruto telo ima jednu nepomičnu tačku i uzmimo ovu tačku O za pol. Opišimo iz ove tačke sferu proizvoljnog poluprečnika (sl. 19.5) i uočimo dve tačke A i B krutog tela koje leže na ovoj sferi u početnom položaju krutog tela. U konačnom položaju ove tačke će zauzeti nove položaje A' i B' , koji zbog nepromenljivosti rastojanja između bilo koje dve tačke krutog tela moraju takođe ležati na istoj sferi. Spojimo ove tačke A i B , kao i tačke A' i B' lucima odgovarajućih glavnih krugova $\widehat{AB}$ i $\widehat{A'B'}$, a isto tako i početne i krajnje položaje ovih tačaka, A i A' odnosno B i B' , pa iz sredina ovih lukova povucimo velike krugove normalne na njih, koje se seku u izvesnoj tački C .

Da bismo pokazali da tačka C određuje položaj ose ekvivalentne rotacije, spojimo još C sa navedenim tačkama A i B odnosno A' i B' lucima velikih krugova, čime dobijamo dva sferna trougla CAB i CA'B'. Ova dva trougla su podudarna, jer je $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ prema samoj konstrukciji, $\widehat{AC} = \widehat{A'C}$ zbog toga što tačka C leži na visini povučenoj u sredini luka AA', a $\widehat{BC} = \widehat{B'C}$ zato što C leži na visini luka BB'. Odatle proizilazi da uglovi kod temena C ovih sfernih trouglova moraju biti međusobno jednaki

$$\angle ACB = \angle A'CB' = \alpha. \quad (19.14)$$



Sl. 19.5

Tada se putanja prve od ovih uočenih tačaka AA' može prikazati kao rezultat rotacije oko ose OC, koja prolazi kroz nepomičan pol O i tačku C, za ugao $\angle ACA' = \alpha + \beta$. S druge strane, ugao $\angle BCB'$ na osnovu obrasca (19.14) može se napisati u obliku

$$\angle BCB' = \angle BCA' + \angle A'CB' = \beta + \alpha,$$

odakle proizilazi da je

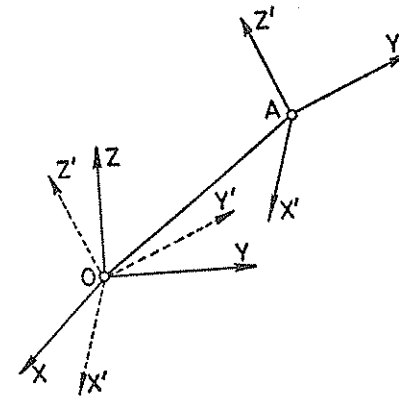
$$\angle ACA' = \angle BCB' = \alpha + \beta. \quad (19.15)$$

To znači da se putanja i druge od ovih čestica BB' može dobiti rotacijom oko iste ose OC za isti ugao $\alpha + \beta$, čime se sferni trougao CAB prevodi u položaj CA'B'.

Dakle, ma kakvo kretanje krutog tela oko jedne nepomične tačke ekvivalentno je jednoj jedinoj rotaciji oko određene ose koja prolazi kroz tu tačku. To je tzv. Euler-ova teorema, a na osnovu prethodnog odeljka vidimo da se svako takvo kretanje krutog tela može shvatiti i kao jedna ortogonalna transformacija.

U opštem slučaju, kad nemamo ni jednu nepomičnu tačku (sl. 19.6), izaberimo ma koju tačku O za pol i uočimo položaje sistema vezanog za kruto telo u početnom i konačnom njegovom položaju OXYZ i AX'Y'Z'. Tada na osnovu prethodne teoreme možemo prvo početni položaj sistema OXYZ prevesti jednom rotacijom oko izvesne ose u položaj OX'Y'Z', čije su koordinatne ose paralelne konačnim pravcima pokretnog sistema, a zatim translacijom za OA prevesti sistem OX'Y'Z' u konačni položaj AX'Y'Z'. Do istog rezultata možemo doći i ako izmenimo redosled, tj. ako prvo izvršimo ovu translaciju, a potom rotaciju krutog tela za isti ugao oko ose paralelne prethodnoj. Takve rotacije, koje zamenjuju niz uzastopnih realnih rotacija krutog tela oko različitih trenutnih osa rotacija, predstavljaju ekvivalentne rotacije, koje se zajedno sa translacijom uvek mogu tako izabrati da prevedemo posmatrano kruto telo iz početnog u bilo koji unapred dati krajnji položaj.

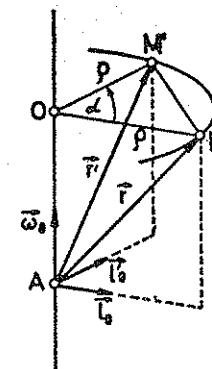
Prema tome, ma kakvo kretanje krutog tela u prostoru može se uvek razložiti na translaciju, koja odgovara pomeranju proizvoljno izabranog pola i rotaciju krutog tela oko određene ose koja prolazi kroz izabrani pol. Ovaj stav poznat je pod imenom Chasles-ova teorema i predstavlja osnovnu teoremu u kinematici krutog tela.



Sl. 19.6

19.4. Konačne rotacije krutog tela

Proučimo sad detaljnije konačne rotacije krutog tela oko nepomične ose, koje su prema Euler-ovoj teoremi ekvivalentne bilo kakvom njegovom kretanju oko jedne nepomične tačke. Neka se posmatrano kruto telo obrne za ugao α oko stalne ose AO (sl. 19.7) i označimo sa $\vec{\omega}_0$ jedinični vektor ove ose, usmerene na onu stranu odakle se vidi da se rotacija vrši u pozitivnom smeru. Uočimo bilo koju tačku M krutog tela, ona će pri ovoj rotaciji opisati izvestan kružni luk MM' sa centrom na osi rotacije, čiji je centralni ugao $\angle MOM' = \alpha$.



Sl. 19.7

Odredimo sad vektor položaja $\vec{r}'$ uočene tačke posle rotacije krutog tela u odnosu na izabrani pol A na osi rotacije u funkciji od njenog početnog vektora položaja $\vec{r}$, jediničnog vektora ose rotacije $\vec{\omega}_0$ i ugla rotacije α . U tom cilju rastavimo vektore $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ duž ose rotacije i duž

pravaca paralelnih sa $\vec{OM}$ i $\vec{OM}'$, čije jedinične vektore označimo sa $\vec{l}_0$ i $\vec{l}_0'$, a poluprečnik kružnog luka $\vec{OM}$ odnosno $\vec{OM}'$ sa ρ

$$\vec{r} = \vec{AO} \cdot \vec{\omega}_0 + \rho \vec{l}_0 \quad \vec{r}' = \vec{AO} \cdot \vec{\omega}_0 + \rho \vec{l}_0' \quad (19.16)$$

Jedinični vektor $\vec{l}_0'$ može se izraziti pomoću jediničnog vektora $\vec{l}_0$ i jediničnog vektora $\vec{\omega}_0 \times \vec{l}_0$ normalnog na $\vec{l}_0$

$$\vec{l}_0' = \cos \alpha \vec{l}_0 + \sin \alpha (\vec{\omega}_0 \times \vec{l}_0)$$

Veličina $\vec{AO}$ može se pak napisati kao

$$\vec{AO} = \vec{r} \cos(\vec{r}, \vec{\omega}_0) = \vec{r} \cdot \vec{\omega}_0$$

pa uvrštavanjem ovih izraza u drugi obrazac (19.16) nalazimo

$$\vec{r}' = \rho \cos \alpha \vec{l}_0 + \rho \sin \alpha (\vec{\omega}_0 \times \vec{l}_0) + (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0) \vec{\omega}_0 \quad (19.17)$$

Pomoću, prvog obrasca (19.16) možemo još eliminisati jedinični vektor $\vec{l}_0$

$$\rho \vec{l}_0 = \vec{r} - \vec{AO} \vec{\omega}_0 = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0) \vec{\omega}_0$$

pa prethodni izraz za $\vec{r}'$ konačno dobija oblik

$$\vec{r}' = \cos \alpha [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0) \vec{\omega}_0] + \sin \alpha \vec{\omega}_0 \times [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0) \vec{\omega}_0] + (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0) \vec{\omega}_0$$

odnosno

$$\vec{r}' = \cos \alpha \vec{r} + \sin \alpha (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + \vec{\omega}_0 (\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0) (1 - \cos \alpha) \quad (19.18)$$

Ovaj obrazac, koji određuje vektor položaja posmatrane tačke u položaju posle rotacije oko stalne ose, naziva se *Euler-ov obrazac*.

Da bismo našli samo pomeranje tačke M , zamislimo da se kruto telo obrne oko iste ose iz konačnog položaja u suprotnom smeru za isti ugao α . Tada u gornjem obrascu treba samo izmeniti uloge vektora položaja $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ uz istovremenu zamenu α sa $-\alpha$

$$\vec{r} = \cos \alpha \vec{r}' - \sin \alpha (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') + \vec{\omega}_0 (\vec{r}' \cdot \vec{\omega}_0) (1 - \cos \alpha),$$

a oduzimanjem gornjih jednačina dobijamo

$$\vec{r}' - \vec{r} = \cos \alpha (\vec{r} - \vec{r}') + \sin \alpha \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} + \vec{r}') + \vec{\omega}_0 (1 - \cos \alpha) (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\omega}_0$$

Pošto je vektor $\vec{r}' - \vec{r}$ normalan na osu rotacije, poslednji član otpada, pa se prethodni obrazac svodi na

$$(1 + \cos \alpha) (\vec{r}' - \vec{r}) = \sin \alpha \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} + \vec{r}') \quad (19.19)$$

Ako ovde još stavimo

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

dobićemo

$$\vec{r}' - \vec{r} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} + \vec{r}'),$$

što možemo napisati konciznije u obliku

$$\vec{r}' - \vec{r} = \vec{w} \times (\vec{r} + \vec{r}'), \quad (19.20)$$

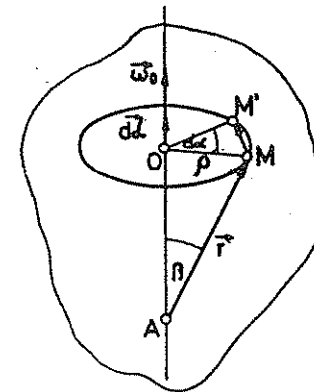
gde smo stavili

$$\vec{w} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \vec{\omega}_0 \quad (19.21)$$

Obrazac (19.20) određuje vektor pomeranja tačke M pri rotaciji oko stalne ose za ugao α i poznat je pod imenom *Rodrigues-ov obrazac*. Sama rotacija krutog tela potpuno je određena vektorom (19.21), koji ima pravac i smer ose rotacije, a intenzitet jednak tangensu polougla obrtanja i tako definisan vektor $\vec{w}$ naziva se *verzor konačne rotacije*. Međutim, on nema uobičajene osobine vektora u odnosu na operaciju sabiranja rotacija, naime *dvema uzastopnim rotacijama krutog tela sa verzorima $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ ne odgovara jedna rezultujuća rotacija sa verzorom $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$* . Iz toga proizlazi i da konačne rotacije nisu komutativne, tj. ako se izvrše dve uzastopne rotacije krutog tela, njegov krajnji položaj zavisice od redosleda ovih rotacija.

19.5. Elementarne rotacije. Ugaona brzina

Od posebnog interesa su elementarne rotacije krutog tela, koje se vrše u beskonačno malom intervalu vremena. Pri rotacionom kretanju krutog tela u opštem slučaju osa rotacije menjače svoj pravac u toku vremena. Međutim, u beskonačno malom intervalu vremena ($t, t+dt$) možemo smatrati da je pravac ose rotacije stalan i takva rotacija naziva se *elementarna rotacija krutog tela*. Za to vreme sve tačke krutog tela, kao i pri konačnoj rotaciji oko stalne ose, obrnu se za isti ugao $d\alpha$ oko ose rotacije (sl. 19.8). Pri tome za pol A izaberimo opet neku tačku na osi rotacije.



Sl. 19.8

U ovom slučaju verzor (19.21) koji se može pridružiti ovoj rotaciji dobija prostiji oblik. Naime, zbog beskonačno malih uglova obrtanja $d\alpha$ možemo staviti $\operatorname{tg} \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$, pa će biti

$$\vec{w} = \operatorname{tg} \frac{d\alpha}{2} \vec{\omega}_0 \approx \frac{d\alpha}{2} \vec{\omega}_0,$$

a ako još uvedemo vektor

$$\vec{d\alpha} = d\alpha \vec{\omega}_0, \quad (19.22)$$

vezor elementarne rotacije možemo napisati u obliku

$$\vec{w} = \frac{1}{2} d\vec{\alpha} \quad (19.23)$$

Tako definisan vektor $d\vec{\alpha}$ naziva se *vektor elementarne rotacije* i svakoj elementarnoj rotaciji krutog tela potpuno jednoznačno može se pridružiti određeni vektor $d\vec{\alpha}$ kao i obrnuto, tj. svakom vektoru $d\vec{\alpha}$ odgovara potpuno određena elementarna rotacija.

Odgovarajuće elementarno pomeranje ma koje tačke M krutog tela pri elementarnoj rotaciji neposredno se može dobiti iz obrasca (19.20). U ovom slučaju možemo približno staviti $\vec{r} + \vec{r}' \approx 2\vec{r}$, pa navedeni obrazac daje

$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{w} \times (\vec{r} + \vec{r}') \approx \frac{1}{2} d\vec{\alpha} \times 2\vec{r},$$

tj.

$$d\vec{r} = d\vec{M}M' = d\vec{\alpha} \times \vec{r}, \quad (19.24)$$

čime je određeno traženo *elementarno pomeranje uočene tačke* u funkciji njenog relativnog vektora položaja $\vec{r}$ i vektora elementarne rotacije $d\vec{\alpha}$. Ovaj rezultat se neposredno vidi i sa slike, jer je intenzitet vektora $d\vec{r}$

$$|d\vec{r}| \approx |MM'| = \rho d\alpha = d\alpha r \sin \beta = |d\vec{\alpha} \times \vec{r}|,$$

dok je njegov pravac normalan na ravni koju čine vektori $d\vec{\alpha}$ i $\vec{r}$, a uperen je od nas na drugu stranu.

Ako vektor elementarne rotacije $d\vec{\alpha}$ podelimo odgovarajućim intervalom vremena dt , tako definisan vektor

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \vec{\omega}_0 \quad (19.25)$$

naziva se *ugaona brzina krutog tela*. Prema samoj definiciji ovog pojma *intenzitet ugaone brzine* predstavlja ugao za koji se obrne kruto telo po jedinici vremena, njegov pravac poklapa se sa pravcem trenutne ose rotacije, a uperen je na onu stranu odakle se vidi da se rotacija vrši u pozitivnom smeru. Ova veličina, kao i $d\alpha$, ne zavisi od izbora tačke M i dok brzina pola $\vec{v}_A$ karakteriše translatorno kretanje, ugaona brzina predstavlja osnovnu karakteristiku rotacionog kretanja krutog tela.

Ispitajmo još osobine elementarnih rotacija krutog tela. Ako imamo dve elementarne rotacije predstavljene vektorima $d\vec{\alpha}_1$ i $d\vec{\alpha}_2$, odgovarajuća elementarna pomeranja tačke M prema obrascu (19.24) biće

$$d'\vec{r} = d\vec{\alpha}_1 \times \vec{r}, \quad d''\vec{r} = d\vec{\alpha}_2 \times \vec{r},$$

pa je ukupno elementarno pomeranje

$$d\vec{r} = (d\vec{\alpha}_1 + d\vec{\alpha}_2) \times \vec{r} \quad (19.26)$$

Oдавde vidimo da *dve elementarne rotacije daju novu elementarnu rotaciju* predstavljenu vektorom

$$d\vec{\alpha} = d\vec{\alpha}_1 + d\vec{\alpha}_2,$$

a smisao toga sastoji se u sledećem. Ako kruto telo jednom elementarnom rotacijom prevedemo iz položaja I u položaj II, a potom iz položaja II u položaj III, moguće je ovo kruto telo

direktno prevesti iz položaja I u položaj III *jednom jedinom* elementarnom rotacijom koja je određena vektorom $d\vec{\alpha} = d\vec{\alpha}_1 + d\vec{\alpha}_2$. Za elementarne rotacije izvršene u obrnutom redosledu imamo

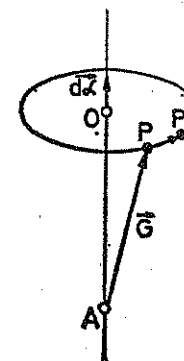
$$d\vec{r} = (d\vec{\alpha}_2 + d\vec{\alpha}_1) \times \vec{r},$$

pa zbog važenja komutativnog zakona za sabiranje vektora vidimo da su *elementarne rotacije komutativne*, što nije bio slučaj sa konačnim rotacijama.

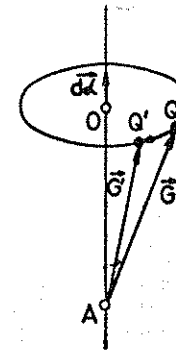
19.6. Apsolutni i relativni izvod vektora

Primenimo sad dobijeni rezultat na nalaženje veze između tzv. apsolutnog i relativnog izvoda. Ako posmatramo ma kakvu vektorsku veličinu $\vec{G}$, kao na pr. vektor položaja ili moment impulsa, možemo je posmatrati kako iz nepokretnog sistema tako i iz sistema vezanog za kruto telo i označimo odgovarajuće elementarne promene te veličine sa $(d\vec{G})_{\text{aps}}$ odnosno $(d\vec{G})_{\text{rel}}$. Njena elementarna promena $(d\vec{G})_{\text{rel}}$ posmatrana iz sistema vezanog za kruto telo potiče od njene apsolutne promene i promene usled same rotacije krutog tela

$$(d\vec{G})_{\text{rel}} = (d\vec{G})_{\text{aps}} + (d\vec{G})_{\text{rot}} \quad (19.27)$$



Sl. 19.9



Sl. 19.10

Odgovarajuće elementarno pomeranje one tačke krutog tela koja se u trenutku t poklapa sa krajem vektora $\vec{G}$ (sl. 19.9) prema obrascu (19.24) iznosi, imajući u vidu da ovde ulogu relativnog vektora položaja igra vektor $\vec{G}$

$$\vec{PP'} = d\vec{\alpha} \times \vec{G}$$

Međutim, sa gledišta posmatrača iz sistema vezanog za kruto telo (sl. 19.10) kraj vektora $\vec{G}$ pomerio se u odnosu na prethodni položaj u suprotnom smeru za istu veličinu i to elementarno pomeranje predstavlja odgovarajuću promenu usled same rotacije krutog tela

$$(d\vec{G})_{\text{rot}} = \vec{QQ'} = -\vec{PP'},$$

odnosno

$$(d\vec{G})_{\text{rot}} = -d\vec{\alpha} \times \vec{G} \quad (19.28)$$

Tada prema obrascu (19.27) imamo

$$(d\vec{G})_{\text{aps}} = (d\vec{G})_{\text{rel}} - (d\vec{G})_{\text{rot}} = (d\vec{G})_{\text{rel}} + d\vec{\alpha} \times \vec{G},$$

a odavde deobom sa dt dobijamo, s obzirom na definiciju ugaone brzine (19.25)

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{aps}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \mathbf{G} \quad (19.29)$$

Ovaj obrazac daje nam vezu između apsolutnog i relativnog izvoda ma kakvog vektora.

19.7. Ugaona brzina i Euler-ovi uglovi

Izrazimo sad ugaonu brzinu krutog tela pomoću Euler-ovih uglova. Posmatrajmo stoga tri infinitezimalne Euler-ove rotacije za $d\psi$, $d\vartheta$ i $d\varphi$ i predstavimo ih vektorima $\vec{d\psi}$, $\vec{d\vartheta}$ i $\vec{d\varphi}$, pa imajući u vidu da nekoliko elementarnih rotacija daje novu elementarnu rotaciju, prikazanu vektorom $\vec{d\alpha}$, imamo

$$\vec{d\alpha} = \vec{d\psi} + \vec{d\vartheta} + \vec{d\varphi} \quad (19.30)$$

Ako sa $\mathbf{n}_0$ označimo jedinični vektor čvorne linije, prema obrascu (19.22) biće

$$\vec{d\alpha} = d\psi \mathbf{e}_3 + d\vartheta \mathbf{n}_0 + d\varphi \mathbf{e}_3',$$

pa ugaona brzina iznosi

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{n}_0 + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3' \quad (19.31)$$

Ovim obrascem je izražena ugaona brzina pomoću Euler-ovih uglova.

Nadimo još projekcije ugaone brzine na ose nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema. Njena projekcija na X osu dobiće se skalarnim množenjem sa jediničnim vektorom $\mathbf{e}_1$

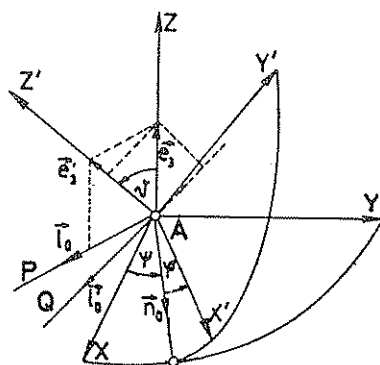
$$\omega_x = \vec{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + \dot{\vartheta} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1 \quad (19.32)$$

Prema sl. 19.11 vidimo da je

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \vartheta$$

Ako jedinični vektor $\mathbf{e}_3'$ rastavimo u ravni ZAZ' na dve komponente: duž Z ose i duž prave AP normalne na Z osi, i ako jedinični vektor odgovarajuće ose označimo sa $\mathbf{l}_0$, imaćemo

$$\mathbf{e}_3' = \cos \vartheta \mathbf{e}_3 + \sin \vartheta \mathbf{l}_0,$$



Sl. 19.11

pa će biti

$$\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = \sin \vartheta \cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin \vartheta \sin \psi$$

Tako dobijamo ω_x , a na sličan način i druge dve komponente

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

Projekcija ugaone brzine na X' osu je

$$\omega_{x'} = \vec{\omega} \cdot \mathbf{e}_1' = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1' + \dot{\vartheta} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_1' + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1' \quad (19.34)$$

Ovde je

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_1' = \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1' = 0,$$

a ako jedinični vektor $\mathbf{e}_3$ rastavimo u ravni ZAZ' na dve komponente: duž Z' ose i duž prave normalne na Z' osi, i ako jedinični vektor odgovarajuće ose označimo sa $\mathbf{l}_0'$, imamo

$$\mathbf{e}_3 = \cos \vartheta \mathbf{e}_3' - \sin \vartheta \mathbf{l}_0',$$

pa je

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1' = \cos \vartheta \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1' - \sin \vartheta \mathbf{l}_0' \cdot \mathbf{e}_1' = -\sin \vartheta \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin \vartheta \sin \varphi$$

Tako dobijamo $\omega_{x'}$ a na sličan način i $\omega_{y'}$ i $\omega_{z'}$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (19.35)$$

Iz gornjih relacija možemo naći i kvadrat ugaone brzine, dizanjem na kvadrat izraza (19.31)

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\vartheta} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_0 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3' + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_3',$$

tj. dobijamo

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \vartheta \quad (19.36)$$

Pri tome napominjemo da kvadrat ugaone brzine nije jednak zbiru kvadrata vremenskih izvoda Euler-ovih uglova stoga što jedinični vektori $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}_0$ i $\mathbf{e}_3'$ u izrazu (19.31) nisu međusobno normalni.

19.8. Brzina i ubrzanje tačaka krutog tela

Posmatrajmo sad proizvoljno elementarno pomeranje krutog tela u intervalu vremena $(t, t+dt)$ i neka pri tome pol A dođe u položaj A' (sl. 19.12). Tada se prema Chasles-ovoj teoremi (odeljak 19.3) kruto telo može dovesti u krajnji položaj translacijom duž AA', a zatim rotacijom oko izvesne ose koja prolazi kroz tačku A'. Odgovarajuće elementarno pomeranje ma koje tačke M krutog tela, čiji relativni vektor položaja u odnosu na pol A označimo sa $\mathbf{r}'$, može se tada razložiti na elementarna pomeranja koja potiču od translacije i od rotacije

$$d\mathbf{r} = (d\mathbf{r})_{\text{tr}} + (d\mathbf{r})_{\text{rot}} \quad (19.37)$$

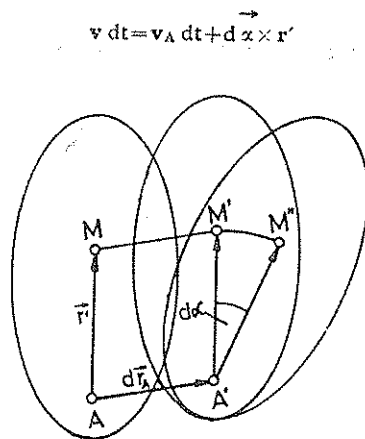
Ovde možemo staviti

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt, \quad (d\mathbf{r})_{\text{tr}} = \mathbf{v}_A dt,$$

a prema obrascu (19.24) je

$$(d\mathbf{r})_{\text{rot}} = d\vec{\alpha} \times \mathbf{r}',$$

te imamo



Sl. 19.12

Deobom sa dt , a imajući u vidu definiciju ugaone brzine (19.25) dobijamo

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (19.38)$$

Ovaj obrazac određuje brzinu ma koje tačke M krutog tela sa relativnim vektorom položaja $\vec{r}'$ u odnosu na pol A. Prvi član predstavlja translatornu, a drugi rotacionu komponentu brzine. Odgovarajući skalarni obrasci glase

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{Ax} + \omega_y (z - z_A) - \omega_z (y - y_A) \\ v_y &= v_{Ay} + \omega_z (x - x_A) - \omega_x (z - z_A) \\ v_z &= v_{Az} + \omega_x (y - y_A) - \omega_y (x - x_A) \end{aligned} \right\} \quad (19.39)$$

Pošto je pol A isti za sve tačke krutog tela, veličine x_A , y_A , z_A , v_{Ax} , v_{Ay} i v_{Az} ne zavise od koordinata tačke M, te imamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\omega_z, & \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \omega_y, & \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \omega_z, \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\omega_x, & \frac{\partial v_z}{\partial x} &= -\omega_y, & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \omega_x, \end{aligned} \right\}$$

a odavde dobijamo

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2\omega_z, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2\omega_x \quad (19.40)$$

Izrazi na levoj strani su komponente vektora rot $\vec{v}$, te gornje obrasce možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} \quad (19.41)$$

Dakle, rotor brzine ma koje tačke krutog tela ne zavisi od položaja te tačke i predstavlja meru ugaone brzine pri rotacionom kretanju krutog tela.

Nadamo još ubrzanje posmatrane tačke M. U tom cilju diferencirajmo po vremenu izraz (19.38)

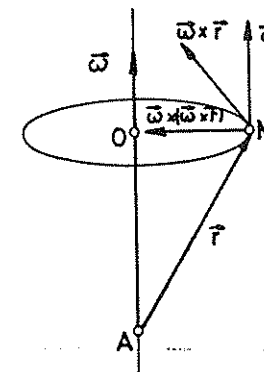
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}', \quad (19.42)$$

a pošto je prema sl. 19.12 i navedenom obrascu (19.38)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_A, \quad \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

gornji izraz dobija konačno oblik

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad (19.43)$$



Sl. 19.13

čime je određeno ubrzanje ma koje tačke M krutog tela. Prvi član predstavlja translatornu, a druga dva rotacionu komponentu ubrzanja. Pri tome krajnji član predstavlja komponentu ubrzanja uperenu od tačke M ka osi rotacije (sl. 19.13) i stoga se naziva *centripetalno ubrzanje*.

20. DINAMIČKI ELEMENTI KRUTOG TELA

20.1. Karakteristike rasporeda masa

Pre nego što predemo na proučavanje kretanja krutog tela pod uticajem sila, pozabavimo se veličinama koje ne zavise ni od stanja kretanja krutog tela ni od sila koje na njega dejstvuju. Takva jedna veličina je *centar mase* (*centar inercije*), definisan obrascem (5.24)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_v \vec{r}_v}{\sum m_v}, \quad (20.1)$$

gde sumiranje ovde treba vršiti po svim česticama krutog tela. Položaj centra mase zavisi jedino od *rasporeda masa posmatranog tela*, a njegov smisao određen obrascem (5.26), dolazi do punog izražaja upravo u mehanici krutih tela i u mnogim slučajevima predstavlja predstavnika translacionog kretanja krutog tela. U slučaju kontinuirane raspodele masa sume u gornjem obrascu prelaze u integrale, a elemente mase m_v možemo napisati u jednom od oblika

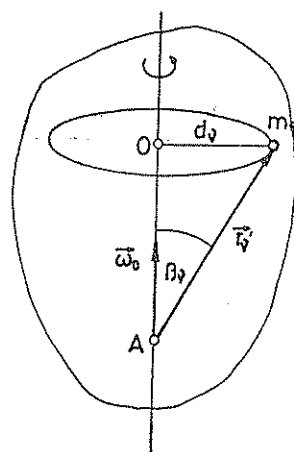
$$dm = \begin{cases} \rho dV \\ \sigma dS \\ \lambda dl \end{cases} \quad (20.2)$$

gde su ρ , σ i λ zapreminska, površinska odnosno linijska gustina, tako da izraz (20.1) prelazi u

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \quad (20.3)$$

Druga važna veličina, sa kojom ćemo se sresti u daljem izlaganju je moment inercije, koji se može uvesti na sledeći način. Neka posmatrano kruto telo rotira oko stalne ose čiji je jedinični vektor $\vec{\omega}_0$ (sl. 20.1) i za pol A uzmimo ma koju tačku na osi rotacije. Tada je brzina bilo koje čestice krutog tela prema obrascu (19.38) $\vec{v}_v = \vec{\omega} \times \vec{r}_v$, pa je njegova kinetička energija

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v v_v^2 = \frac{1}{2} \sum m_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v)^2,$$



Sl. 20.1

a stavljajući ovde $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$, prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (20.4)$$

gde smo uveli oznaku

$$J = \sum m_v (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_v)^2 \quad (20.5)$$

Ova veličina, u kojoj se sumiranje takođe proteže na sve čestice krutog tela, naziva se *moment inercije krutog tela u odnosu na uočenu osu rotacije*. Ako za svaku česticu krutog tela znamo njenu masu m_v i njen relativan vektor položaja $\vec{r}_v$ kao i pravac ose rotacije, tj. njen jedinični vektor $\vec{\omega}_0$, moment inercije je potpuno određen. Odavde zaključujemo da *moment inercije krutog tela u odnosu na neku osu rotacije zavisi kako od rasporeda masa krutog tela tako i od položaja ove ose rotacije*.

Gornjem izrazu možemo dati i drugi, za praksu pogodniji oblik. Prema slici vidimo da je

$$|\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_v| = r_v \sin \beta_v = d_v,$$

gde je d_v normalno rastojanje v -te čestice od ose rotacije, pa moment inercije dobija vid

$$I = \sum m_v d_v^2, \quad (20.6)$$

što predstavlja uobičajen izraz za moment inercije. Međutim, za teorijska razmatranja pogodniji je oblik (20.5), jer u njemu eksplicitno figuriše pravac ose rotacije. U slučaju kontinuirane raspodele masa suma u izrazu (20.6) prelazi u integral, pa ako sa r' označimo normalno rastojanje elementa mase dm od ose rotacije, imamo

$$I = \int r'^2 dm, \quad (20.7)$$

gde za dm treba staviti jedan od izraza (20.2).

20.2. Osnovne osobine momenta inercije

Proučimo sad kako moment inercije krutog tela zavisi od pravca ose rotacije. Označimo sa α , β i γ kosinuse pravca trenutne ose rotacije u odnosu na sistem $AX'Y'Z'$ vezan za kruto telo, tj. stavimo

$$\vec{\omega}_0 = \alpha \vec{e}_1' + \beta \vec{e}_2' + \gamma \vec{e}_3', \quad (20.8)$$

pa izrazimo moment inercije pomoću ovih kosinusa pravaca. U tom cilju transformišimo izraz $(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_v)^2$ u pogodniji oblik

$$(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_v)^2 = (r_v' \sin \beta_v)^2 = r_v'^2 (1 - \cos^2 \beta_v) = r_v'^2 - (r_v' \cos \beta_v)^2,$$

tj.

$$(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_v)^2 = r_v'^2 - (\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}_v)^2. \quad (20.9)$$

Imajući u vidu da je $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, poslednji izraz možemo napisati i u obliku

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_v)^2 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - (\alpha x_v' + \beta y_v' + \gamma z_v')^2 = \\ &= \alpha^2 (y_v'^2 + z_v'^2) + \beta^2 (z_v'^2 + x_v'^2) + \gamma^2 (x_v'^2 + y_v'^2) - \\ &\quad - 2\alpha\beta x_v' y_v' - 2\alpha\gamma x_v' z_v' - 2\beta\gamma y_v' z_v', \end{aligned}$$

pa momenti inercije (20.5) dobija oblik

$$\begin{aligned} I &= \alpha^2 \sum m_v (y_v'^2 + z_v'^2) + \beta^2 \sum m_v (z_v'^2 + x_v'^2) + \gamma^2 \sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2) - \\ &\quad - 2\alpha\beta \sum m_v x_v' y_v' - 2\alpha\gamma \sum m_v x_v' z_v' - 2\beta\gamma \sum m_v y_v' z_v' \end{aligned}$$

Ako za koeficijente uz kosinuse pravaca uvedemo oznake

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \sum m_v (y_v'^2 + z_v'^2), & I_{yy} &= \sum m_v (z_v'^2 + x_v'^2) \\ I_{zz} &= \sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2), & I_{xy} &= - \sum m_v x_v' y_v' \\ I_{xz} &= - \sum m_v x_v' z_v', & I_{yz} &= - \sum m_v y_v' z_v' \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

prethodni izraz konačno možemo napisati u obliku

$$I = I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2 + 2 I_{xy} \alpha\beta + 2 I_{xz} \alpha\gamma + 2 I_{yz} \beta\gamma \quad (20.11)$$

Navedene izraze (20.10) možemo konciznije napisati na jedinstven način, ako koordinate v -te čestice označimo sa x_{vi} ($i=1,2,3$), a indekse x, y, z ovih veličina zamenimo odgovarajućim brojevima $1, 2, 3$

$$I_{ij} = \sum m_v (r_v'^2 \delta_{ij} - x_{vi}' x_{vj}') \quad (20.12)$$

Zaista, za $i=1, j=1$ imaćemo

$$I_{11} = \sum m_v (r_v'^2 - x_{v1}'^2) = \sum m_v (x_{v2}'^2 + x_{v3}'^2) = \sum m_v (y_v'^2 + z_v'^2),$$

a za $i=1, j=2$ biće

$$I_{12} = -\sum m_v x_{v1}' x_{v2}' = -\sum m_v x_v' y_v'$$

itd. Ako još kosinuse pravca trenutne ose rotacije označimo sa α_i ($i=1,2,3$), sam obrazac (20.11) može se koncizno napisati u obliku

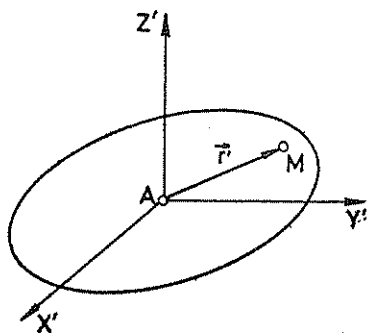
$$I = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \alpha_i \alpha_j. \quad (20.13)$$

Ovaj obrazac izražava moment inercije krutog tela u funkciji kosinusa pravaca ose rotacije u odnosu na sistem $AX'Y'Z'$. Pri tome, koeficijenti uz kosinuse pravaca, definisani obrascima (20.10), zavise samo od rasporeda masa krutog tela u sistemu $AX'Y'Z'$. Pošto izrazi $y_v'^2 + z_v'^2$, $x_v'^2 + z_v'^2$ i $x_v'^2 + y_v'^2$ predstavljaju kvadrate rastojanja tačke M_v od koordinatnih osa, prva tri koeficijenta I_{xx} , I_{yy} i I_{zz} prema obrascu (20.6) su momenti inercije za odgovarajuće ose. Ako znamo ove veličine, koje možemo izračunati pod pretpostavkom da znamo raspored masa krutog tela u odnosu na sistem $AX'Y'Z'$, pomoću obrasca (20.11) možemo naći moment inercije krutog tela u odnosu na ma koju osu rotacije koja prolazi kroz pol A. Pri tome su koordinate svake čestice krutog tela (x_v' , y_v' , z_v') u odnosu na sistem $AX'Y'Z'$ vezan za kruto telo nepromenljive u toku vremena, te se ni gornji momenti i proizvodi inercije u sistemu $AX'Y'Z'$ u toku kretanja krutog tela ne menjaju.

Elipsoid inercije

Da bismo geometrijski prikazali raspored momenata inercije krutog tela po pravcima ose rotacije, prenesimo iz pola A u pravcu ose rotacije, tj. u pravcu jediničnog vektora ω_0 (sl. 20.2), veličinu $\frac{1}{\sqrt{I}}$, gde je I moment inercije u odnosu na tu osu rotacije. Na taj način dobijamo neku tačku M, čiji je vektor položaja

$$\mathbf{r}' = \mathbf{AM} = \frac{1}{\sqrt{I}} \vec{\omega}_0. \quad (20.14)$$



Sl. 20.2

Odgovarajuće koordinate kraja ovako definisanog vektora iznose, s obzirom na obrzac (20.8)

$$x' = \frac{1}{\sqrt{I}} \alpha, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{I}} \beta, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{I}} \gamma. \quad (20.15)$$

Kad se menja pravac ose rotacije, tj. kad jedinični vektor ω_0 menja svoj položaj u prostoru prolazeći stalno kroz tačku A, menjaju se i moment inercije I u odnosu na tu osu rotacije, te će se pri tome menjati i intenzitet vektora $\mathbf{r}'$. Potražimo sad geometrijsko mesto krajeva vektora $\mathbf{r}'$ pri svim mogućim pravcima ose rotacije. Pošto obrazac (20.11) određuje moment inercije krutog tela u funkciji kosinusa pravaca ose rotacije, eliminišimo ove kosinuse pravaca α , β i γ pomoću tog obrasca i obrazaca (20.15). Iz ovih poslednjih imamo

$$\alpha = \sqrt{I} x', \quad \beta = \sqrt{I} y', \quad \gamma = \sqrt{I} z',$$

pa stavljajući ove izraze u obrazac (20.10) dobijamo

$$I = I_{xx} I x'^2 + I_{yy} I y'^2 + I_{zz} I z'^2 + 2 I_{xy} I x' y' + 2 I_{xz} I x' z' + 2 I_{yz} I y' z',$$

tj.

$$I_{xx} x'^2 + I_{yy} y'^2 + I_{zz} z'^2 + 2 I_{xy} x' y' + 2 I_{xz} x' z' + 2 I_{yz} y' z' = 1 \quad (20.16)$$

Ova jednačina predstavlja traženo geometrijsko mesto krajeva vektora $\mathbf{r}'$. Kao što je poznato iz matematike, ona predstavlja izvesnu centralnu površ drugog reda. Ako isključimo trivijalan slučaj kad se sve čestice krutog tela nalaze na samoj osi rotacije, moment inercije I ni za jednu osu rotacije ne može biti jednak nuli, a intenzitet vektora $\mathbf{r}'$ prema obrascu (20.14) nikad ne može biti beskonačan, te ova površ nema tačaka u beskonačnosti. Stoga gornja jednačina može predstavljati samo elipsoid, tzv. elipsoid inercije, koji nam daje raspored momenata inercije po raznim pravcima ose rotacije u odnosu na izabranu tačku A.

Svakom rasporedu masa krutog tela u sistemu $AX'Y'Z'$ odgovaraju određeni momenti i proizvodi inercije za ove koordinatne ose, te i određena jednačina elipsoida inercije. Međutim, i svakoj jednačini elipsoida inercije oblika (20.16) odgovaraju određeni momenti i proizvodi inercije za odgovarajuće koordinatne ose. Stoga pri transformaciji koordinatnog sistema ne moramo transformisati ove momente i proizvode inercije, već samo jednačinu elipsoida inercije i iz transformisane jednačine možemo neposredno pročitati momente i proizvode inercije u novom sistemu.

Zakoni transformacije momenta inercije

Ispitajmo još kako se transformiše skup I_{ij} , koji za dati pravac ose rotacije potpuno određuje moment inercije, pri transformacijama sistema $AX'Y'Z'$ vezanog za kruto telo. Posmatrajmo prvo paralelni prenos sistema $AX'Y'Z'$ u položaj $A'X''Y''Z''$ za $\mathbf{AA}' = \mathbf{a}$ (sl. 20.3). Ako veličine I_{ij} u novom sistemu označimo sa I'_{ij} , prema obrascu (20.12) imaćemo

$$I'_{ij} = \sum m_v (r_v''^2 \delta_{ij} - x_{vi}'' x_{vj}''), \quad (20.17)$$

gde je $\mathbf{r}_v''$ vektor položaja v-te čestice u odnosu na novi koordinatni početak A'. Ovde je

$$\mathbf{r}_v'' = \mathbf{A'A} + \mathbf{r}_v' = \mathbf{r}_v' - \mathbf{a},$$

pa zamenom u gornjem izrazu dobijamo

$$I'_{ij} = \sum m_v [(r_v' - \mathbf{a})^2 \delta_{ij} - (x_{vi}' - a_i)(x_{vj}' - a_j)] = \sum m_v (r_v'^2 \delta_{ij} - x_{vi}' x_{vj}') + \\ + \sum m_v (a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) - \sum m_v (2 \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{a} \delta_{ij} - x_{vi}' a_j - x_{vj}' a_i),$$

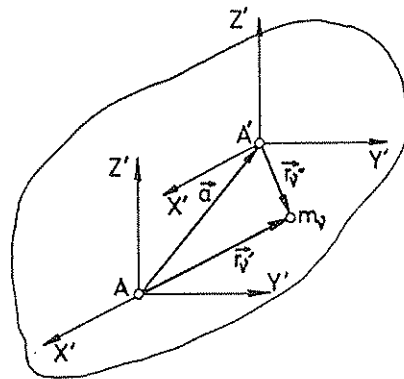
što se na osnovu navedenog obrasca (20.12) i definicije centra masa (20.1) može napisati u obliku

$$I'_{ij} = I_{ij} + m (a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) - m [2 (\mathbf{r}_c' \cdot \mathbf{a}) \delta_{ij} - (\mathbf{r}_c')_i a_j - (\mathbf{r}_c')_j a_i], \quad (20.18)$$

gde je $\mathbf{r}_c'$ vektor položaja centra masa u odnosu na pol A.

Ovaj obrazac izražava zakon transformacije skupa I_{ij} pri translaciji koordinatnog sistema. Ako se za pol A izabere baš centar masa, biće $\vec{r}_0' = 0$, pa se gornji zakon svodi na prostiji oblik

$$I_{ij}' = I_{ij}^{(c)} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j), \quad (20.19)$$



Sl. 20.3

pri čemu smo sa $I_{ij}^{(c)}$ označili komponente ovog skupa u odnosu na sistem sa koordinatnim početkom u centru masa.

Na osnovu ovog obrasca možemo naći i vezu između komponenta I_{zz} u odnosu na dve paralelne ose CZ' i AZ'. U tom slučaju imaćemo

$$I_{zz}' = I_{zz}^{(c)} + m(a^2 - a_z^2) = I_{zz}^{(c)} + m(a_x^2 + a_y^2),$$

odnosno

$$I_{zz}' = I_{zz}^{(c)} + md^2, \quad d = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad (20.20)$$

gde d predstavlja rastojanje između ovih osa. Ova relacija poznata je pod imenom *Steiner-ova teorema* i izražava vezu između momenata inercije u odnosu na dve paralelne ose, od kojih jedna prolazi kroz centar masa.

Da bismo ispitali prirodu skupa koeficijenata (20.10), potražimo kako se transformišu ove veličine pri rotaciji koordinatnih osa. U tom cilju podimo od obrasca (20.13)

$$I = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

i izrazimo ih u odnosu na sistem AX''Y''Z'' dobijen rotacijom sistema AX'Y'Z' oko pola A (sl. 20.4). U odnosu na ovaj sistem prema gornjem obrascu imamo

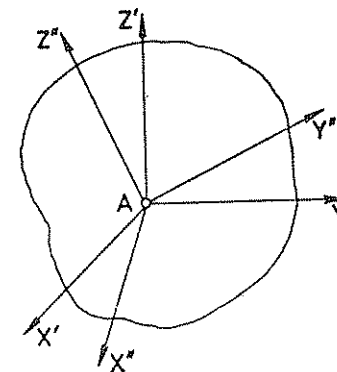
$$I = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl}' \alpha_k' \alpha_l',$$

gde smo zapetom naznačili da se sve ove veličine odnose na novi sistem, pri čemu sam moment inercije I kao skalarna veličina mora biti nezavisna od koordinatnog sistema. Tako dobijamo

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl}' \alpha_k' \alpha_l' = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \alpha_i \alpha_j. \quad (20.21)$$

Izrazimo sad kosinuse pravaca α_i u prvom sistemu S' u funkciji od veličina α_k' u sistemu S''. Pošto su ove veličine koordinate jediničnog vektora ose rotacije ω_0 , primenimo opšti zakon transformacije ma kog vektora A pri rotaciji koordinatnih osa. Kao što je poznato, (v. na pr. Đ. Mušicki i B. Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, odeljak 1.1), komponente ma kog vektora pri rotaciji koordinatnih osa transformišu se po zakonu

$$A_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ki} A_k' \quad \alpha_{ki} \equiv \cos(\mathbf{e}_k', \mathbf{e}_i), \quad (20.22)$$



Sl. 20.4

gde su koeficijenti α_{ki} kosinusi pravca novih koordinatnih osa u odnosu na stare. U našem slučaju imamo

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ki} \alpha_k', \quad (20.23)$$

pa zamenom u obrascu (20.21) dobijamo

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl}' \alpha_k' \alpha_l' = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_{ki} \alpha_k' \right) \left(\sum_{l=1}^3 \alpha_{lj} \alpha_l' \right)$$

ili, posle izmene reda sumiranja

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 I_{kl}' \alpha_k' \alpha_l' = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ki} \alpha_{lj} I_{ij} \right) \alpha_k' \alpha_l'.$$

Pošto ova jednakost treba da važi za ma koji pravac ose rotacije, odgovarajući koeficijenti moraju biti međusobno jednaki

$$I_{kl}' = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ki} \alpha_{lj} I_{ij}. \quad (20.24)$$

Ovaj obrazac izražava zakon transformacije skupa I_{ij} pri rotaciji koordinatnih osa. Upoređivanjem ovog obrasca sa odgovarajućim zakonom transformacije ma kog tenzora u klasičnom smislu (v. isti udžbenik, odeljak 4.1)

$$A_{kl}' = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ki} \alpha_{lj} A_{ij} \quad (20.25)$$

možemo zaključiti sledeće:

Skup koeficijenta I_{ij} , tj. skup momenata i proizvoda inercije u odnosu na izabran sistem, pri rotaciji koordinatnih osa transformiše se kao tenzor, te predstavlja tenzor sa navedenim komponentama. Ovako definisan tenzor naziva se *tenzor inercije*, a njegov mehanički smisao upoznaćemo kasnije, kad budemo govorili o momentu impulsa krutog tela.

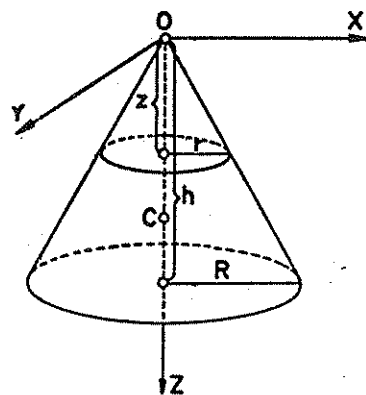
20.3. Primeri

1. Odredimo položaj centra masa homogenog pravog konusa poluprečnika R i visine h (sl. 20.5) i izaberimo koordinatni sistem kao na slici, za Z -osom uperenom nadole. Koordinate centra masa prema obrascu (20.3) u opštem slučaju glase

$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad y_c = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad z_c = \frac{\int z dm}{\int dm}. \quad (20.26)$$

Pošto je ovo telo homogeno i simetrično u odnosu na svoju osu, koja je istovremeno i Z -osa, biće $x_c = y_c = 0$, tj. centar masa leži na njegovoj osi simetriji. Da bismo izračunali z_c , stavimo $dm = \rho dV = \rho S dz$, gde je S površina preseka naznačenog na slici. Pošto je $h : z = R : r$, površina ovog preseka biće

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{Rz}{h} \right)^2$$



Sl. 20.5

pa imamo

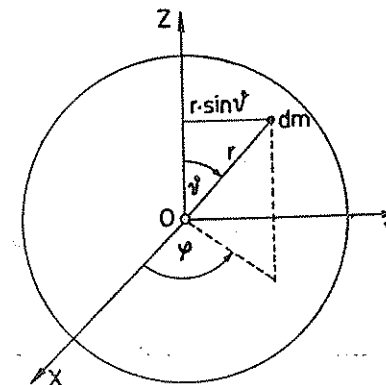
$$z_c = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int_0^h z \rho S dz}{\int_0^h \rho S dz} = \frac{\rho \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz}{\rho \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz} = \frac{\frac{1}{4} h^4}{\frac{1}{3} h^3},$$

tj. centar masa ovog konusa leži na osi simetrije na rastojanju od temena

$$z_c = \frac{3}{4} h \quad (20.27)$$

2. Kao drugi primer izračunajmo moment inercije homogene sfere mase m i poluprečnika R (sl. 20.6) u odnosu na osu rotacije koja prolazi kroz centar sfere. U ovom slučaju najpodesnije je uzeti polarni koordinatni sistem čiji je početak u centru sfere, a polarna osa — osa rotacije. Rastojanje elementa mase $dm = \rho dV$ od ose rotacije je $r' = r \sin \vartheta$ a element zapremine u polarnim koordinatama imaće oblik

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$



Sl. 20.6

Tada traženi moment inercije možemo izračunati prema obrascu (20.7)

$$I = \int r'^2 dm = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta)^2 \rho r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \quad (20.28)$$

Ovaj integral može se rastaviti na proizvod triju integrala

$$I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} \rho \frac{4}{3} R^3 \pi R^2,$$

a pošto je

$$m = \rho \frac{4}{3} R^3 \pi,$$

konačno dobijamo

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \quad (20.29)$$

3. Najzad, posmatrajmo troatomni molekul čiji su atomi raspoređeni po temenima jednakostranog trougla (sl. 20.7) i neka atomi na osnovici imaju istu masu. Takvu strukturu ima na pr. molekul H_2O , kad koga je ugao u temenu (atom kiseonika) oko 105° . Centar masa ovog sistema zbog simetrije ležaće na visini ovog trougla, a njegova ordinata (rastojanje od osnovice) prema obrascu (20.1) biće

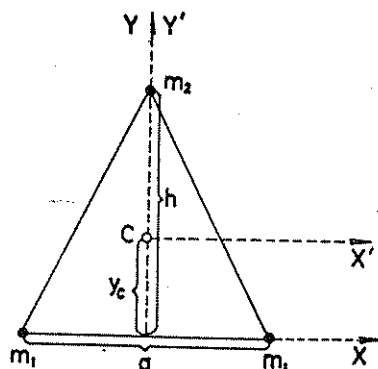
$$y_c = \frac{\sum m_v y_v}{\sum m_v} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_1 \cdot 0 + m_2 h}{2m_1 + m_2},$$

tj.

$$y_c = \frac{m_2}{m} h, \quad m = 2m_1 + m_2. \quad (20.30)$$

Ako u centar masa postavimo nov koordinatni sistem $CX'Y'Z'$ kao na slici, tako da svi atomi leže u $X'C'Y'$ ravni, moment inercije u odnosu na X' -osu ovog sistema prema obrascima (20.10) imaće vrednost

$$I_{xx} = \sum m_v (y_v'^2 + z_v'^2) = m_1 y_c^2 + m_1 y_c^2 + m_2 (h - y_c)^2 = \\ = m_1 \frac{m_2^2 h^2}{m^2} + m_1 \frac{m_2^2 h^2}{m^2} + m_2 \frac{h^2 (m - m_2)^2}{m^2},$$



Sl. 20.7

što posle sređivanja daje

$$I_{xx} = \frac{2 m_1 m_2}{m} h^2. \quad (20.31)$$

Moment inercije u odnosu na Y' -osu biće

$$I_{yy} = \sum m_v (z_v'^2 + x_v'^2) = m_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_2 \cdot 0^2,$$

tj.

$$I_{yy} = \frac{m_1 a^2}{2}. \quad (20.32)$$

Pošto je ovde za sve atome $z_v' = 0$, treći moment inercije možemo dobiti sabiranjem prva dva

$$I_{zz} = \sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2) = I_{xx} + I_{yy},$$

tj.

$$I_{zz} = \frac{2 m_1 m_2}{m} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}. \quad (20.33)$$

Što se tiče proizvoda inercije, koji su određeni drugim redom obrazaca (20.10), prvi od njih u odnosu na ovaj sistem, iznosi

$$I_{xy} = - \sum m_v x_v' y_v' = - m_1 \frac{a}{2} (-y_c) - m_1 \left(-\frac{a}{2}\right) (-y_c) - m_2 \cdot 0 = 0,$$

a druga dva zbog $z_v' = 0$ takode će biti jednaka nuli

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad (20.34)$$

20.4. Rad pri elementarnom pomeranju krutog tela

Predimo sad na proučavanje dinamičkih elemenata krutog tela. Posmatrajmo dejstvo izvesnih sila na kruto telo u intervalu vremena $(t, t+dt)$ i neka se ono malo pomeri iz svog prvobitnog položaja, pa potražimo rad ovih sila pri elementarnom pomeranju krutog tela. Neka je F_v ukupna efektivna sila koja dejstvuje na v -tu česticu krutog tela, a dr_v odgovarajuće elementarno pomeranje ove čestice; tada je traženi elementarni rad prema obrascu (5.29)

$$d'A = \sum F_v \cdot dr_v, \quad (20.35)$$

gde se sumiranje vrši po svim česticama krutog tela. Pošto je prema obrascu (19.38)

$$dr_v = v_v dt = dr_A + d\vec{\alpha} \times r_v',$$

imamo, koristeći osobinu ciklične permutacije kod mešovito proizvoda

$$d'A = \sum F_v \cdot dr_A + \sum F_v \cdot (d\vec{\alpha} \times r_v') = dr_A \cdot \sum F_v + d\vec{\alpha} \cdot \sum r_v' \times F_v$$

Prva suma predstavlja rezultantu svih sila, a druga rezultantu svih momenata sila u odnosu na pol A. Ako ih označimo sa

$$F = \sum F_v, \quad L^{(A)} = \sum r_v' \times F_v, \quad (20.36)$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$d'A = F \cdot dr_A + L^{(A)} \cdot d\vec{\alpha} \quad (20.37)$$

Pošto je prema obrascu (19.30)

$$d\vec{\alpha} = d\psi \mathbf{e}_3 + d\vartheta \mathbf{n}_0 + d\varphi \mathbf{e}_3',$$

elementarni rad možemo izraziti i u funkciji koordinata pola i Euler-ovih uglova

$$d'A = F_x dx_A + F_y dy_A + F_z dz_A + (L^{(A)} \cdot \mathbf{e}_3) d\psi + (L^{(A)} \cdot \mathbf{n}_0) d\vartheta + (L^{(A)} \cdot \mathbf{e}_3') d\varphi \quad (20.38)$$

Dobijeni obrasci određuju rad spoljnih sila pri elementarnom pomeranju krutog tela, pri čemu prvi član u obrascu (20.37) predstavlja rad pri translacionom pomeranju, a drugi rad pri rotacionom pomeranju krutog tela. Odavde vidimo da nije potrebno pojedinačno poznavati sile i momente sila za svaku česticu krutog tela, što bi praktično bilo i nemoguće, već samo njihove rezultante.

Prema tome, rezultanta svih sila i rezultanta svih momenata sila u odnosu na pol karakterišu dejstvo spoljnih sila na kruto telo, pri čemu prva određuje rad pri translacionom pomeranju, a druga rad pri rotacionom pomeranju krutog tela.

20.5. Kinetička energija krutog tela

Proučimo sad kinetičku energiju krutog tela

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v v_v^2, \quad (20.39)$$

gde se suma opet proteže na sve čestice krutog tela. Prema obrascu (19.38) je

$$v_v^2 = v_v \cdot v_v = v_A^2 + 2 \mathbf{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_v') + (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_v')^2,$$

te dobijamo

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v v_A^2 + \sum m_v \mathbf{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v) + \frac{1}{2} \sum m_v (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v)^2 \quad (20.40)$$

Ako uvedemo ukupnu masu krutog tela

$$m = \sum m_v, \quad (20.41)$$

prvi član možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{2} \sum m_v v_A^2 = \frac{1}{2} v_A^2 \sum m_v = \frac{1}{2} m v_A^2,$$

a uvodeći relativni vektor položaja centra masa u odnosu na pol A prema obrascu (20.1)

$$\mathbf{r}_c' = \mathbf{AC} = \frac{\sum m_v \mathbf{r}'_v}{m}, \quad (20.42)$$

za drugi član dobijamo

$$\sum m_v \cdot \mathbf{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v) = \mathbf{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \sum m_v \mathbf{r}'_v) = m \mathbf{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_c')$$

Ako još u trećem članu prema obrascu (19.25) stavimo $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$, prema definiciji momenta inercije (20.5) možemo ga napisati kao

$$\frac{1}{2} \sum m_v (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_v (\vec{\omega}_0 \times \mathbf{r}'_v)^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

pa izraz za kinetičku energiju (20.40) dobija oblik

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \mathbf{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_c') + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (20.43)$$

Ovaj obrazac određuje kinetičku energiju krutog tela u opštem slučaju. Prvi član u gornjem izrazu predstavlja kinetičku energiju pri čistoj translaciji, kad je $\vec{\omega} = 0$, zadnji član kinetičku energiju pri čistoj rotaciji, kad je $\mathbf{v}_A = 0$, a srednji član karakteriše istovremeni uticaj translacije i rotacije. Pri tome naglasimo da je I u obrascu (20.43) moment inercije u odnosu na osu kolinearnu sa vektorom $\vec{\omega}$ koja prolazi kroz tačku A.

Ako za pol krutog tela uzmemo centar masa, njegov relativni vektor položaja u odnosu na pol jednak je nuli, tj. $\mathbf{r}_c' = 0$. Tada u obrascu (20.43) otpada srednji član, pa dobijamo

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad (20.44)$$

Prema tome, kinetička energija krutog tela jednaka je zbiru translatorne energije njegovog centra masa u kome bi bila koncentrisana celokupna masa krutog tela i rotacione energije krutog tela u odnosu na osu rotacije koja bi prolazila kroz njegov centar masa.

Slučaj kretanja sa jednom nepomičnom tačkom

Pošto smo videli da se translatorno kretanje krutog tela može svesti na kretanje njegovog centra masa, bitno kretanje krutog tela je njegovo *rotaciono kretanje*. U cilju detaljnijeg proučavanja rotacionog kretanja pretpostavimo da *bilo koja tačka A krutog tela miruje* i uzmimo ovu tačku za zajednički početak nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema. Ispitajmo sad kako zavisi kinetička energija krutog tela od komponenata trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ u sistemu AX'Y'Z' vezanom za kruto telo. Tada je $\mathbf{v}_A = 0$ pa u obrascu (20.43) otpadaju prva dva člana, te imamo

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (20.45)$$

Ako u ovom obrascu zamenimo I izrazom (20.11), koji izražava moment inercije pomoću kosinusa pravaca ose rotacije, imamo

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2 + 2 I_{xy} \alpha \beta + 2 I_{xz} \alpha \gamma + 2 I_{yz} \beta \gamma) = \frac{1}{2} [I_{xx} (\omega \alpha)^2 + I_{yy} (\omega \beta)^2 + I_{zz} (\omega \gamma)^2 + 2 I_{xy} (\omega \alpha) (\omega \beta) + 2 I_{xz} (\omega \alpha) (\omega \gamma) + 2 I_{yz} (\omega \beta) (\omega \gamma)],$$

a pošto su komponente ugaone brzine

$$\omega_x' = \omega \alpha, \quad \omega_y' = \omega \beta, \quad \omega_z' = \omega \gamma,$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x'^2 + I_{yy} \omega_y'^2 + I_{zz} \omega_z'^2 + 2 I_{xy} \omega_x' \omega_y' + 2 I_{xz} \omega_x' \omega_z' + 2 I_{yz} \omega_y' \omega_z') \quad (20.46)$$

Ovaj obrazac određuje kinetičku energiju krutog tela u slučaju jedne nepomične tačke u funkciji komponenata trenutne ugaone brzine. Odavde vidimo da je *kinetička energija krutog tela sa jednom nepomičnom tačkom homogena kvadratna funkcija komponenata ugaone brzine*.

20.6. Moment impulsa krutog tela

Moment impulsa krutog tela u odnosu na bilo koji pol A prema obrascu (5.46) iznosi

$$\mathbf{M}^{(A)} = \sum \mathbf{r}'_v \times m_v \mathbf{v}_v \quad (20.47)$$

Pošto je ovde prema obrascu (19.38) $\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v$, imamo

$$\mathbf{M}^{(A)} = \sum m_v \mathbf{r}'_v \times \mathbf{v}_A + \sum m_v \mathbf{r}'_v \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v)$$

ili u razvijenom obliku, s obzirom na definiciju centra masa (20.1)

$$\mathbf{M}^{(A)} = \sum m_v \vec{\omega} \times \mathbf{r}'_v^2 - \sum m_v \mathbf{r}'_v (\mathbf{r}'_v \cdot \vec{\omega}) + m \mathbf{r}_c' \times \mathbf{v}_A \quad (20.48)$$

Ovaj obrazac daje nam vezu između momenta impulsa i ugaone brzine krutog tela u opštem slučaju. Da bismo bolje uočili karakteristike čistog rotacionog kretanja, pretpostavimo opet da je *jedna tačka krutog tela nepomična*, pa uzmimo ovu tačku za pol A. Tada otpada poslednji član u izrazu (20.48), pa odgovarajuće skalarnе jednačine u sistemu AX'Y'Z' vezanom za kruto telo glase

$$M_x' = \sum m_v \omega_x' (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - \sum m_v x_v' (x_v' \omega_x' + y_v' \omega_y' + z_v' \omega_z')$$

$$M_y' = \sum m_v \omega_y' (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - \sum m_v y_v' (x_v' \omega_x' + y_v' \omega_y' + z_v' \omega_z')$$

$$M_z' = \sum m_v \omega_z' (x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2) - \sum m_v z_v' (x_v' \omega_x' + y_v' \omega_y' + z_v' \omega_z'),$$

što se posle sređivanja može napisati u obliku

$$M_x' = \omega_x' \sum m_v (y_v'^2 + z_v'^2) - \omega_y' \sum m_v x_v' y_v' - \omega_z' \sum m_v x_v' z_v'$$

$$M_y' = -\omega_x' \sum m_v y_v' x_v' + \omega_y' \sum m_v (z_v'^2 + x_v'^2) - \omega_z' \sum m_v y_v' z_v'$$

$$M_z' = -\omega_x' \sum m_v z_v' x_v' - \omega_y' \sum m_v z_v' y_v' + \omega_z' \sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2)$$

gde smo izostavili oznaku za pol A. Sume u ovim izrazima prema obrascima (20.10) predstavljaju momente i proizvode inercije za koordinatne ose nepomičnog sistema, te konačno dobijamo

$$\left. \begin{aligned} M_x' &= I_{xx} \omega_x' + I_{xy} \omega_y' + I_{xz} \omega_z' \\ M_y' &= I_{xy} \omega_x' + I_{yy} \omega_y' + I_{yz} \omega_z' \\ M_z' &= I_{xz} \omega_x' + I_{yz} \omega_y' + I_{zz} \omega_z' \end{aligned} \right\} \quad (20.49)$$

što možemo napisati i konciznije, prema ranije uvedenim oznakama, u obliku

$$M_i' = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \omega_k' \quad (i=1, 2, 3) \quad (20.50)$$

Prema tome, ako je jedna tačka krutog tela nepomična, komponente momenta impulsa krutog tela u odnosu na tu tačku su linearne homogene funkcije komponenta ugaone brzine krutog tela, te moment impulsa i ugaona brzina u opštem slučaju nisu kolinearni.

Pomoću ovih obrazaca možemo uspostaviti i vezu između kinetičke energije i momenta impulsa krutog tela. Prema obrascima (20.46) i (20.49) imamo

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_x'} = I_{xx} \omega_x' + I_{xy} \omega_y' + I_{xz} \omega_z' = M_x',$$

a na sličan način dobijamo i druge dve jednačine

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_y'} = M_y', \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_z'} = M_z' \quad (20.51)$$

Koristeći pojam parcijalnog gradijenta, ove jednačine možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} = \vec{M} \quad (20.52)$$

Ovaj obrazac daje nam vezu između kinetičke energije i momenta impulsa krutog tela sa jednom nepomičnom tačkom. Ako znamo kinetičku energiju kao funkciju ugaone brzine, pomoću ovog obrasca možemo neposredno naći moment impulsa krutog tela u posmatranom slučaju.

20.7. Tenzor inercije

Ispitajmo sad detaljnije karakter zavisnosti momenta impulsa krutog tela od njegove ugaone brzine. Kao što je poznato (v. na pr. Đ. Mušicki i B. Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, odeljak 4.1 i 4.2), svaki tenzor se može napisati u dijadskom obliku kao operator

$$\mathcal{G} = \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k \}, \quad (20.53)$$

gde simbol $\{ \}$ predstavlja dijadski proizvod i ako komponente vektora $\mathbf{T}_k$ označimo sa T_{ki} ($i=1,2,3$), on je potpuno određen matricom ovih komponenta

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Ako se ovako definisani tenzor primeni na ma koji vektor $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, dobiće se drugi vektor $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$$\mathbf{B} = \mathcal{G} \cdot \mathbf{A} \quad (20.54)$$

i to takav da su njegove komponente linearne homogene funkcije komponenta vektora $\mathbf{A}$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= T_{11} A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3 \\ B_2 &= T_{12} A_1 + T_{22} A_2 + T_{23} A_3 \\ B_3 &= T_{13} A_1 + T_{23} A_2 + T_{33} A_3 \end{aligned} \right\} \quad (20.55)$$

Pri tome su koeficijenti T_{ij} poredani u istom redosledu kako su poredani u matrici posmatranog tenzora i kadgod imamo relacije oblika (20.55), zavisnost između odgovarajućih vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ data je u tenzorskom obliku (20.54).

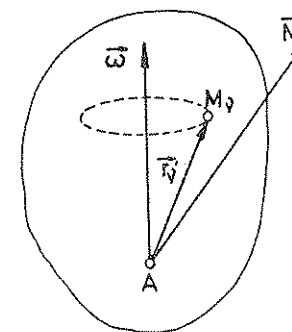
Na osnovu toga vidimo da se relacije (20.49) između momenta impulsa $\vec{M}$ i ugaone brzine $\vec{\omega}$ krutog tela mogu napisati u tenzorskoj notaciji

$$\vec{M} = \mathcal{G} \cdot \vec{\omega}, \quad (20.56)$$

gde je $\mathcal{G}$ tenzor inercije, određen shemom koeficijenata

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (20.57)$$

za čije komponente smo već pokazali da se pri rotaciji koordinatnih osa transformišu po zakonu transformacije tenzora (20.24). Dakle, moment impulsa krutog tela u odnosu na nepomičnu tačku predstavlja rezultat primene tenzora inercije na ugaonu brzinu. To znači da primena tenzora inercije na vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ daje vektor momenta impulsa $\vec{M}$, određen jednačinama (20.49), koji u opštem slučaju nije kolinearan sa vektorom $\vec{\omega}$ (sl. 20.8), već su samo njegove komponente linearne homogene funkcije komponenta vektora $\vec{\omega}$. Od prirode tenzora inercije, tj. od skupa svih momenata i proizvoda inercije u odnosu na izabrane koordinatne ose, zavisi kakav će biti moment impulsa za datu ugaonu brzinu krutog tela.



Sl. 20.8

Pomoću tenzora inercije $\mathcal{G}$ možemo neke prethodne obrasce prikazati i u simboličkom, tenzorskom obliku. Naime, ako izraz za moment inercije krutog tela (20.11) napišemo kao

$$I = \alpha (I_{xx} \alpha + I_{xy} \beta + I_{xz} \gamma) + \beta (I_{xy} \alpha + I_{yy} \beta + I_{yz} \gamma) + \gamma (I_{xz} \alpha + I_{yz} \beta + I_{zz} \gamma)$$

i uočimo da su prema obrascu (20.11) izrazi u zagradama komponente vektora $\mathcal{G} \cdot \vec{\omega}_0$, imaćemo

$$I = \alpha (\mathcal{G} \cdot \vec{\omega}_0)_x + \beta (\mathcal{G} \cdot \vec{\omega}_0)_y + \gamma (\mathcal{G} \cdot \vec{\omega}_0)_z,$$

a to je skalarni proizvod vektora $\vec{\omega}_0$ i $\vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{\omega}_0$

$$I = \vec{\omega}_0 \cdot (\vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{\omega}_0) \quad (20.58)$$

Na sličan način, ako izraz za kinetičku energiju krutog tela sa jednom nepomičnom tačkom (20.46) napišemo u vidu

$$T = \frac{1}{2} \left[\omega_x' (I_{xx} \omega_x' + I_{xy} \omega_y' + I_{xz} \omega_z') + \omega_y' (I_{xy} \omega_x' + I_{yy} \omega_y' + I_{yz} \omega_z') + \omega_z' (I_{xz} \omega_x' + I_{yz} \omega_y' + I_{zz} \omega_z') \right],$$

dobićemo skalarni proizvod vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{\omega}$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{\omega}) \quad (20.59)$$

Glavne ose inercije

Potražimo sad one pravce ugaone brzine $\vec{\omega}$ pri kojima će moment impulsa $\vec{M}$ biti kolinearan sa ugaonom brzinom $\vec{\omega}$

$$\vec{M} = \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega}. \quad (20.60)$$

To je tzv. *svojstveni problem tenzora* (v. isti udžbenik, odeljak 5.3) i u ovom slučaju svojstveni pravci tenzora $\vec{\mathcal{G}}$, tj. pravci u kojima su vektori $\vec{M}$ i $\vec{\omega}$ kolinearni, nazivaju se *glavne ose inercije*, a odgovarajuće svojstvene vrednosti λ *glavni momenti inercije*. Ako napišemo odgovarajuće skalarnе jednačine, prema obrascima (20.49) imamo

$$\begin{aligned} M_x' &= I_{xx} \omega_x' + I_{xy} \omega_y' + I_{xz} \omega_z' = \lambda \omega_x' \\ M_y' &= I_{xy} \omega_x' + I_{yy} \omega_y' + I_{yz} \omega_z' = \lambda \omega_y' \\ M_z' &= I_{xz} \omega_x' + I_{yz} \omega_y' + I_{zz} \omega_z' = \lambda \omega_z', \end{aligned}$$

a otuda dobijamo sledeći sistem jednačina za određivanje traženih komponenta ω_x' , ω_y' i ω_z'

$$\left. \begin{aligned} (I_{xx} - \lambda) \omega_x' + I_{xy} \omega_y' + I_{xz} \omega_z' &= 0, \\ I_{xy} \omega_x' + (I_{yy} - \lambda) \omega_y' + I_{yz} \omega_z' &= 0, \\ I_{xz} \omega_x' + I_{yz} \omega_y' + (I_{zz} - \lambda) \omega_z' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.61)$$

Da bi ovaj sistem homogenih jednačina imao netrivialna rešenja različita od nule, determinanta njihovih koeficijenata mora biti jednaka nuli

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (20.62)$$

To je tzv. *karakteristična jednačina*, koja predstavlja algebarsku jednačinu trećeg stepena za određivanje vrednosti λ . Za svaki koren ove jednačine λ_i ($i=1,2,3$) sistem jednačina (20.61) određuje odgovarajuće odnose komponenta ugaone brzine, čime su određeni traženi pravci vektora $\vec{\omega}$ pri kojima su vektori $\vec{M}$ i $\vec{\omega}$ kolinearni.

Za ma kakav *simetričan tenzor* $\vec{\mathcal{G}}$, tj. takav kod koga je $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$, može se pokazati da su sva tri korena karakteristične jednačine *realna* i ako su oni različiti, odgovarajuća tri svojstvena

pravca tenzora su međusobno *ortogonalna*, a njegova matrica u sistemu čije su koordinatne ose svojstveni pravci je *dijagonalna*. Ako pak karakteristična jednačina ima jednakih korena, postoji familija beskonačno mnogo svojstvenih pravaca u okviru koje se uvek mogu odabrati tri međusobno ortogonalna pravca. U našem slučaju, pošto je tenzor inercije prema shemi (20.57) simetričan, zaključujemo da karakteristična jednačina (20.62) ima uvek tri realna korena λ_i i da uvek postoje *bar tri svojstvena pravca, glavne ose inercije koje su međusobno ortogonalne*

$$\vec{\omega}(i) \cdot \vec{\omega}(j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (20.63)$$

Sem toga u sistemu glavnih osa inercije matrica tenzora inercije ima *dijagonalni oblik*

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (20.64)$$

gde I_1 , I_2 i I_3 predstavljaju *glavne momente inercije*.

U ovom sistemu niz relacija dobija prostiji vid. Pre svega, poređenjem matrica (20.57) i (20.64) vidimo da su *proizvodi inercije u odnosu na glavne ose inercije jednaki nuli*

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0 \quad (20.65)$$

Uслед toga kinetička energija kao funkcija komponenta ugaone brzine, određena obrascem (20.46), u ovom sistemu svodi se na čisto kvadratne članove

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2), \quad (20.66)$$

gde su indeksima 1, 2, 3 označene komponente vektora u odnosu na glavne ose inercije, a relacije (20.49) između komponenta momenta impulsa i ugaone brzine prelaze u

$$M_1 = I_1 \omega_1, \quad M_2 = I_2 \omega_2, \quad M_3 = I_3 \omega_3 \quad (20.67)$$

Ukoliko se još *osa rotacije poklapa sa jednom od glavnih osa inercije*, možemo je uzeti za Z' -osu i u tom slučaju biće $\omega_1 = \omega_2 = 0$, pa se poslednja dva obrasca svode na

$$T = \frac{1}{2} I_3 \omega^2 \quad (20.68)$$

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = M = I_3 \omega, \quad (20.69)$$

odakle neposredno vidimo da su moment impulsa i ugaona brzina u ovom slučaju zaista kolinearni.

21. ZAKONI KRETANJA KRUTOG TELA

21.1. Metod opštih zakona dinamike

Proučimo sad opšte zakone dinamike i diferencijalne jednačine kretanja krutog tela. U tom cilju posmatrajmo ma kakvo kretanje krutog tela i izaberimo ma koju njegovu tačku A za pol. U nepokretnom koordinatnom sistemu zakoni impulsa i momenta impulsa prema obrascima (6.18) i (6.28) imaju oblik

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ef}} \quad \frac{d\vec{M}^{(0)}}{dt} = \vec{L}_{\text{ef}}^{(0)}, \quad (21.1)$$

gde je $\mathbf{p}$ ukupni impuls, $\mathbf{M}^{(A)}$ ukupni moment impulsa krutog tela, $\mathbf{F}_{\text{ef}}$ rezultanta svih efektivnih sila, tj. aktivnih sila i sila reakcije, a $\mathbf{L}_{\text{ef}}^{(A)}$ rezultanta momenata svih efektivnih sila koje dejstvuju na kruto telo, pri čemu se momenti impulsa i sila odnose na *nepomični koordinatni početak*. Međutim, ako ove momente računamo u odnosu na *pokretni pol A krutog tela* (sl. 21.1) tj. ako uzmemo

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^{(A)} &= \sum \mathbf{r}_v' \times m_v \mathbf{v}_v \\ \mathbf{L}_{\text{ef}}^{(A)} &= \sum \mathbf{r}_v' \times \mathbf{F}_{v\text{ef}} \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

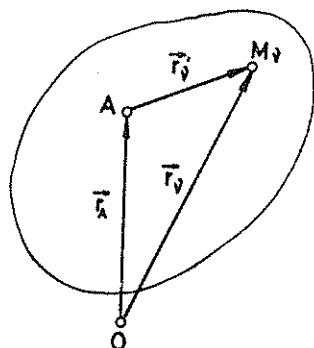
pri čemu se *sve ostale veličine i dalje odnose na nepokretni sistem*, ispitajmo kako će izgledati navedeni zakoni.

Pošto prvi zakon (21.1) ne zavisi od izbora pola A, on će ostati neizmenjen, međutim, drugi zakon će promeniti oblik. Ovde je

$$\mathbf{r}_v' = \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_A, \quad \dot{\mathbf{r}}_v' = \mathbf{v}_v - \mathbf{v}_A,$$

pa vremenski izvod momenta impulsa, s obzirom na definicije (21.2) iznosi

$$\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}_v' \times m_v \mathbf{v}_v = \sum (\mathbf{v}_v - \mathbf{v}_A) \times m_v \mathbf{v}_v + \sum \mathbf{r}_v' \times m_v \frac{d\mathbf{v}_v}{dt},$$



Sl. 21.1

a zbog kolinearnosti vektora prvi član u prvoj sumi otpada, te će biti

$$\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} = -\mathbf{v}_A \times \sum m_v \mathbf{v}_v + \sum \mathbf{r}_v' \times \mathbf{F}_{v\text{ef}} = \mathbf{L}^{(A)} - \mathbf{v}_A \times \mathbf{p}$$

Tako, imajući u vidu definiciju centra mase (20.1), dobijamo navedene zakone u obliku

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_{\text{ef}}, \quad \frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} = \mathbf{L}_{\text{ef}}^{(A)} - \mathbf{v}_A \times \mathbf{p} \quad (21.3)$$

Ovi obrasci izražavaju *zakone impulsa i momenta impulsa krutog tela sa pokretnim polom A* i predstavljaju generalizaciju zakona (21.1). Pošto je prema obrascu (6.5)

$$\mathbf{p} = \sum m_v \mathbf{v}_v = \frac{d}{dt} \sum m_v \mathbf{r}_v = \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_c) = m \mathbf{v}_c,$$

drugi zakon (21.3) možemo napisati i u obliku

$$\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} = \mathbf{L}_{\text{ef}}^{(A)} - m \mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_c \quad (21.4)$$

Oдавде vidimo da *ako pol krutog tela miruje ili ako se za pol uzme centar mase, zakon momenta impulsa ima isti oblik kao u nepokretnom koordinatnom sistemu*.

Ovim dvema vektorskim jednačinama (21.3) odgovaraju šest skalarних jednačina, tačno toliko koliko ima i stepeni slobode. Sem toga, pošto se ukupni impuls i momenti impulsa mogu izraziti kao linearne funkcije vremenskih izvoda generalisanih koordinata krutog tela, u gornjim jednačinama figurišu najviše drugi izvodi generalisanih koordinata po vremenu. Stoga se jednačine (21.3) mogu smatrati i kao *diferencijalne jednačine kretanja krutog tela*.

Iz ovih jednačina lako možemo naći i uslove ravnoteže krutog tela. Tada sve čestice krutog tela miruju, tj. za sve čestice je $\mathbf{v}_v = 0$, pa je $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{M}^{(A)} = 0$, te iz gornjih jednačina sleduje

$$\mathbf{F}_{\text{ef}} = \sum \mathbf{F}_{v\text{ef}} = 0, \quad \mathbf{L}_{\text{ef}}^{(A)} = \sum \mathbf{r}_v' \times \mathbf{F}_{v\text{ef}} = 0 \quad (21.5)$$

Prema tome, *ako je kruto telo u ravnoteži, rezultanta svih sila i svih momenata sila u odnosu na pol moraju biti jednake nuli*.

21.2. Lagrange-ev metod za kruta tela

Za rešavanje problema kretanja krutog tela prvenstveno se koriste dva metoda: *Lagrange-ev metod* i *Euler-ov metod*. Prvi metod se zasniva na poznatim Lagrange-ovim jednačinama (10.27), koje važe za ma kakve holonomne sisteme. Ako za generalisane koordinate krutog tela uzmemo koordinate pola x_A, y_A i z_A i Eulerove uglove ψ, θ i ϕ *Lagrange-ove jednačine za kruto telo* imaju oblik

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial T}{\partial x_A} &= Q_{x_A}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial T}{\partial y_A} &= Q_{y_A} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} - \frac{\partial T}{\partial z_A} &= Q_{z_A}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_{\psi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_{\theta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

Pri tome treba kinetičku energiju T izraziti pomoću navedenih generalisanih koordinata i njihovih vremenskih izvoda, a to se može realizovati na pr. na taj način što se kinetička energija napiše pomoću komponenata ugaone brzine u odnosu na glavne ose inercije u obliku (20.66), a ove komponente izraze pomoću Eulerovih uglova kao (19.35). Generalisane sile prema obrascima (10.12) i (20.38) imaju vrednosti

$$\left. \begin{aligned} Q_{x_A} &= F_x, & Q_{y_A} &= F_y, & Q_{z_A} &= F_z, \\ Q_{\psi} &= L^{(A)} \cos(L, e_3), & Q_{\theta} &= L^{(A)} \cos(L, n_0); & Q_{\phi} &= L^{(A)} \cos(L, e_3') \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

i one se mogu neposredno dobiti nalaženjem rezultujućeg momenta impulsa $\mathbf{L}^{(A)}$ i njegovim projiciranjem na navedene pravce. Ako su sve sile koje dejstvuju na kruto telo *potencijalne*, mogu se primeniti i uprošćene Lagrange-eve jednačine u obliku (10.30)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial L}{\partial x_A} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial L}{\partial y_A} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_A} - \frac{\partial L}{\partial z_A} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

Ovde treba naći samo Lagrange-ovu funkciju $L = T - U$ i izraziti je pomoću navedenih generalisanih koordinata i njihovih vremenskih izvoda.

Pri primeni ovog metoda treba imati u vidu da se *Lagrange-eve jednačine odnose na nepokretni koordinatni sistem*, te se sve veličine u njima moraju izraziti u odnosu na taj sistem. Za reša-

vanje Lagrange-evih jednačina potrebno je poznavati generalisane sile odnosno potencijalnu energiju i početne uslove i ove jednačine tada predstavljaju *sistem diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama* $x_A, y_A, z_A, \psi, \vartheta$ i φ . Rešavanjem ovih jednačina dobićemo ove generalisane koordinate krutog tela kao funkcije vremena. Metod je naročito pogodan ako su sile konzervativne i neke od generalisanih koordinata ciklične, tj. ako ne figurišu u Lagrange-ovoj funkciji. Tada Lagrange-eve jednačine neposredno daju odgovarajuće prve integrale kretanja.

21.3. Euler-ov metod za kruta tela

Dok se Lagrange-ev metod odnosi na nepokretni sistem, Euler-ov metod se odnosi na sistem za kruto telo čiji je početak u polu A i čije su ose glavne ose inercije za taj pol. Odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja možemo dobiti na sledeći način.

Podimo od zakona momenta impulsa u obliku (21.4) i posmatrajmo takav slučaj kada je zadnji član jednak nuli

$$\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_e = 0 \quad (21.9)$$

Tada zakon momenta impulsa dobija oblik

$$\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} = \mathbf{L}_{ef}^{(A)}, \quad (21.10)$$

u kome se izvod na levoj strani jednačine odnosi na nepokretni sistem, te predstavlja apsolutni izvod. Da bismo prešli u navedeni sistem vezan za kruto telo, moramo sa apsolutnog izvoda preći na relativni pomoću obrasca (19.29)

$$\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} \right)_{\text{rel}} = \left(\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \mathbf{M}^{(A)},$$

pa prethodna jednačina dobija oblik

$$\left(\frac{d\mathbf{M}^{(A)}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{L}_{ef}^{(A)} \quad (21.11)$$

Ova jednačina naziva se *Euler-ova jednačina u vektorskom obliku*. Ako komponente svih vektorskih veličina u ovom sistemu, tj. njihove projekcije na glavne ose inercije označimo indeksima 1, 2 i 3, odgovarajuće skalarne jednačine glase, izostavljajući oznaku za pol A

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dM_1}{dt} \right)_{\text{rel}} + \omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 &= L_{1ef}, & \left(\frac{dM_2}{dt} \right)_{\text{rel}} + \\ + \omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 &= L_{2ef}, & \left(\frac{dM_3}{dt} \right)_{\text{rel}} + \omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 &= L_{3ef} \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

a pošto je prema obrascima (20.67)

$$M_1 = I_1 \omega_1, \quad M_2 = I_2 \omega_2, \quad M_3 = I_3 \omega_3,$$

prethodne jednačine možemo konačno napisati u obliku

$$\left. \begin{aligned} I_1 \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)_{\text{rel}} - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= L_{1ef} \\ I_2 \left(\frac{d\omega_2}{dt} \right)_{\text{rel}} - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= L_{2ef} \\ I_3 \left(\frac{d\omega_3}{dt} \right)_{\text{rel}} - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= L_{3ef} \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

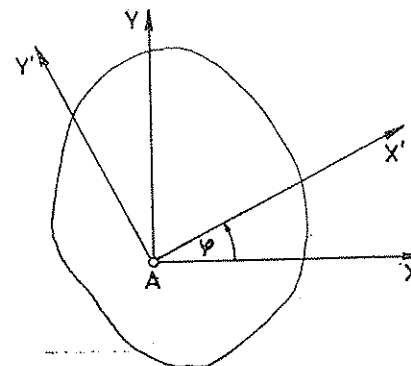
To su Euler-ove jednačine u skalarom obliku. Pri tom podvucimo da se Euler-ove jednačine odnose na koordinatni sistem vezan za kruto telo sa početkom u polu A i sa osama koje su glavne ose inercije i važe samo pod pretpostavkom da je ispunjen uslov (21.9). Za rešavanje ovih jednačina potrebno je poznavati 1) glavne momente inercije I_1, I_2 i I_3 , koji se mogu naći iz rasporeda masu krutog tela u odnosu na ovaj sistem, 2) komponente rezultujućeg momenta sila u pravcu glavnih osa inercije L_1, L_2 i L_3 , koje možemo naći iz datih aktivnih sila i sila reakcija, određivanjem rezultante momenta svih ovih sila i potom projiciranjem na glavne ose inercije, i 3) početne uslove krutog tela iz kojih možemo naći početne vrednosti komponenta ugaone brzine. Tada gornje jednačine predstavljaju *sistem diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama* ω_1, ω_2 i ω_3 , a rešavanjem ovih jednačina dobićemo komponente ugaone brzine u ovom sistemu ω_1, ω_2 i ω_3 kao funkcije vremena. Da bismo našli Euler-ove uglove ψ, ϑ i φ , primenimo obrasce (19.26) na ovaj sistem

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (21.14)$$

i uvrstimo u njih nađene funkcije $\omega_1(t), \omega_2(t)$ i $\omega_3(t)$. Tada ove jednačine predstavljaju *nov sistem diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama* ψ, ϑ i φ , čijim rešavanjem nalazimo Euler-ove uglove kao funkcije vremena. Ovaj metod je naročito pogodan ako su dva glavna momenta inercije međusobno jednaka, a odgovarajuća komponenta rezultujućeg momenta sila jednaka nuli; tada se neposredno može dobiti jedan prvi integral kretanja. Mi smo Euler-ove jednačine (21.13) izveli pod uslovom (21.9), a ovaj uslov je uvek ispunjen ako pol A miruje ili ako se za pol uzme centar masa. U prvom slučaju imamo samo tri stepena slobode i Euler-ove jednačine (21.13) zajedno sa jednačinama (21.14) dovoljne su za rešavanje problema kretanja. U drugom slučaju imamo šest stepeni slobode i tada pored navedenih jednačina moramo uzeti i skalarne jednačine koje odgovaraju prvoj jednačini (21.3) i koje određuju translatorno kretanje centra masa krutog tela.

21.4. Ravno kretanje krutog tela

Posmatrajmo prvo ravno kretanje krutog tela, kad se sve njegove tačke kreću u ravni paralelnoj nekoj nepokretnoj ravni (sl. 21.2). Ovakvo kretanje ima tri stepena slobode, jer je njegovo



Sl. 21.2

translatorno kretanje određeno sa dve koordinate pola, a rotaciono sa jednim Euler-ovim uglom. U ovom slučaju ugaona brzina će biti oblika

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3, \quad (21.15)$$

a kinetička energija krutog tela određena je formulom (20.44)

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\varphi}^2, \quad (21.16)$$

jer je $\omega = \omega_z = \dot{\varphi}$. Moment impulsa krutog tela u opštem slučaju neće biti kolinearan sa ugaonom brzinom i prema relacijama (20.49) imaće komponente

$$M_x^{(A)} = I_{xz} \dot{\varphi}, \quad M_y^{(A)} = I_{yz} \dot{\varphi}, \quad M_z^{(A)} = I_{zz} \dot{\varphi} \quad (21.17)$$

Diferencijalne jednačine ravnog kretanja mogu se neposredno dobiti iz zakona impulsa i momenta impulsa (21.3) i (21.4). Naime, ako za pol uzmemo centar mase, otpašće poslednji član u drugoj jednačini (21.4), pa imamo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_{ef}, \quad \frac{d\mathbf{M}^{(c)}}{dt} = \mathbf{L}_{ef}^{(c)}.$$

Pošto ovde rezultujući moment sila takođe ima samo Z' -komponentu, a $M_z^{(c)} = I_c \dot{\varphi}$, odgovarajuće skalarne jednačine glase

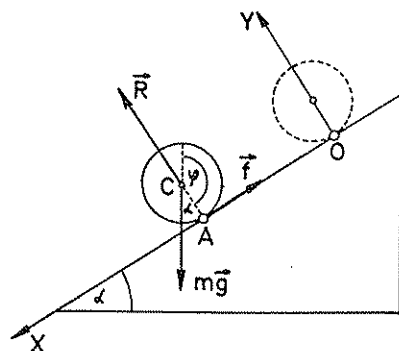
$$m\ddot{x}_c = F_{x\,ef}, \quad m\ddot{y}_c = F_{y\,ef}, \quad I_c \ddot{\varphi} = L_{z\,ef}^{(c)} \quad (21.18)$$

Ove tri diferencijalne jednačine pri datim silama, početnim uslovima i poznatim momentom inercije potpuno određuju nepoznate veličine x_c , y_c i φ kao funkcije vremena.

Primer

Posmatrajmo kao primer kotrljanje bez klizanja homogenog kružnog cilindra poluprečnika a niz strmu ravan (sl. 21.3). Pretpostavimo da je u početku cilindar bio u tački O u kontaktu sa strmom ravni i da se posle vremena t obrnuo za ugao φ . Sile koje deluju na ovaj cilindar su sledeće: sila Zemljine teže mg , idealna reakcija $\mathbf{R}$, koja deluje normalno na strmu ravan i sila trenja $\mathbf{f}$ koja deluje u tački dodira A suprotno kretanju. Ako uzmemo koordinatni sistem kao na slici, zakon impulsa daje

$$m\ddot{\mathbf{r}}_c = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{f}, \quad (21.19)$$



Sl. 21.3

a odgovarajuće skalarne jednačine, tj. prve dve jednačine (21.18) glase

$$m\ddot{x}_c = mg \sin \alpha - f, \quad m\ddot{y}_c = -mg \cos \alpha + R \quad (21.20)$$

Rezultanta momenata svih sila koje deluju na posmatrani cilindar u odnosu na centar mase je

$$\mathbf{L}^{(c)} = \mathbf{O} \times m\mathbf{g} + \mathbf{O} \times \mathbf{R} + \mathbf{CA} \times \mathbf{f} = \mathbf{CA} \times \mathbf{f} = (-a\mathbf{e}_2) \times (-f\mathbf{e}_1),$$

tj.

$$\mathbf{L}^{(c)} = -af\mathbf{e}_3, \quad (21.21)$$

a moment impulsa cilindra biće

$$\mathbf{M}^{(c)} = I_c \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 = -I_c \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \quad (21.22)$$

Tada zakon momenta impulsa daje

$$\frac{d}{dt} (-I_c \dot{\varphi} \mathbf{e}_3) = -af\mathbf{e}_3,$$

a odgovarajuća skalarne jednačina, tj. treća jednačina (21.18) ima oblik

$$I_c \ddot{\varphi} = af \quad (21.23)$$

Pošto se cilindar po pretpostavci kotrlja bez klizanja niz strmu ravan, mora biti $dx_c = a d\varphi$, čime se φ može svesti na x . S druge strane, pošto cilindar stalno ostaje na strmoj ravni, biće $\ddot{y}_c = 0$, pa iz druge jednačine (21.20) zaključujemo da je sila reakcije

$$R = mg \cos \alpha \quad (21.24)$$

Iz uslova $dx_c = a d\varphi$ proizlazi da je $\ddot{\varphi} = \frac{1}{a} \ddot{x}_c$, pa iz jednačine (21.23) imamo

$$f = I_c \frac{\ddot{x}_c}{a^2},$$

a za homogeni cilindar se može pokazati da je moment inercije u odnosu na njegovu osu $I_c = \frac{1}{2} ma^2$, pa gornji izraz prelazi u

$$f = \frac{1}{2} m \ddot{x}_c \quad (21.25)$$

Uvrštavanjem ovog izraza za f u prvu jednačinu (21.20) dobijamo

$$m\ddot{x}_c = mg \sin \alpha - \frac{1}{2} m \ddot{x}_c,$$

a otuda

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad (21.26)$$

To je ubrzanje centra cilindra niz strmu ravan, a obrzac (21.25) tada određuje i silu trenja

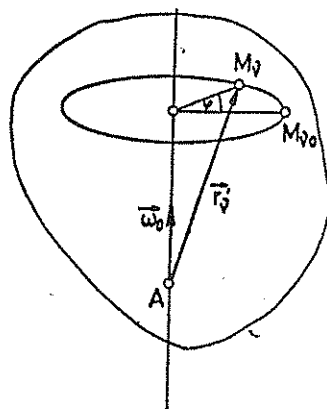
$$f = \frac{1}{3} mg \sin \alpha \quad (21.27)$$

Imajući u vidu da je $\ddot{y}_c = 0$ i $\ddot{\varphi} = \frac{1}{a} \ddot{x}_c$, neposrednom integracijom gornjih jednačina mogu se naći i konačne jednačine kretanja, tj. x_c , y_c i φ kao funkcije vremena.

21.5. Obrtanje krutog tela oko nepomične ose

U slučaju obrtanja krutog tela oko nepomične ose (sl. 21.4) imamo samo *jedan stepen slobode* i položaj krutog tela u svakom trenutku potpuno je određen Euler-ovim uglom φ , dok su druga dva Euler-ova ugla jednaka nuli. Tada šesta Lagrange-ova jednačina (21.6), gde je Q_φ određeno poslednjim obrascem (21.7),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = L \cos(L, e_3) \quad (21.28)$$



Sl. 21.4

potpuno određuje ovo kretanje krutog tela. U ovom slučaju prema obrascu (19.31) je

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} e_3 = \dot{\varphi} \omega_0,$$

te je kinetička energija

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \quad (21.29)$$

Oдавде imamo

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi} \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

pa gornja jednačina dobija oblik

$$I \ddot{\varphi} = L_{\omega_0} \quad (21.30)$$

gde smo stavili

$$L_{\omega_0} = L \cos(L, \omega_0) \quad (21.31)$$

Jednačina (21.30) predstavlja *diferencijalnu jednačinu kretanja krutog tela oko nepomične ose*. Pri tome I predstavlja moment inercije krutog tela u odnosu na tu osu, a L_{ω_0} tzv. *moment sile u odnosu na osu rotacije*, projekciju vektora L na osu rotacije, pri čemu se za pol može uzeti bilo koja tačka na osi rotacije. Poređenjem jednačine (21.30) sa osnovnom jednačinom dinamike za kretanje jedne čestice po pravoj liniji

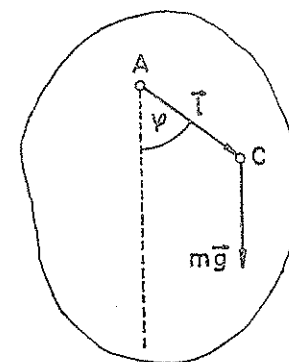
$$m\ddot{x} = F$$

vidimo da *masi pri translacionom kretanju odgovara moment inercije pri rotacionom kretanju, te moment inercije predstavlja meru otpora koji kruto telo pruža svakoj promeni stanja svoga kretanja pri rotacionom kretanju*. Istovremeno vidimo da *sili pri translacionom kretanju odgovara moment sile u odnosu na osu rotacije pri rotacionom kretanju*.

Fizičko klatno

Pod *fizičkim klatnom* podrazumeva se ma kakvo teško telo koje može da osciluje oko horizontalne ose rotacije pod uticajem svoje sopstvene težine (sl. 21.5). Ako uzmemo da je osa rotacije normalna na ravan crteža i da je prodire u tački A i ako sa l označimo vektor položaja centra masa C u odnosu na pol A, moment sile $\vec{F} = l \times mg$ normalan je na ravni crteža i uperen je od nas, dok je jedinični vektor ugaone brzine $\vec{\omega}_0$ normalan na ravni crteža i uperen ka nama. Tada je

$$L = l mg \sin \varphi, \quad \cos(L, \omega_0) = \cos \pi = -1,$$



Sl. 21.5

pa je moment sile u odnosu na osu rotacije

$$L_{\omega_0} = -l mg \sin \varphi \quad (21.32)$$

Stavljanjem ovog izraza u jednačinu (21.30) dobijamo

$$I \ddot{\varphi} = -l mg \sin \varphi,$$

što možemo napisati kraće u obliku

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R'} \sin \varphi = 0, \quad (21.33)$$

gde smo stavili

$$R' = \frac{I}{ml} \quad (21.34)$$

To je diferencijalna jednačina fizičkog klatna i ona ima isti oblik kao i diferencijalna jednačina matematičkog klatna (15.37). Veličina R' , tzv. *redukovana dužina fizičkog klatna*, predstavlja *dužinu ekvivalentnog matematičkog klatna*, tj. onog matematičkog klatna koje osciluje na isti način kao i posmatrano fizičko klatno. U slučaju oscilatornog kretanja konačna jednačina kretanja fizičkog klatna prema obrascu (15.49) ima oblik

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R'}} t \right) \quad \left(k = \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

tj.

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \left(\sqrt{\frac{mgl}{I}} t \right) \quad (21.35)$$

Period oscilacija fizičkog klatna određen je tada obrascem (15.54)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R'}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots \right],$$

tj.

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots \right] \quad (21.36)$$

U slučaju vrlo malih oscilacija eliptička sinusna funkcija sn svodi se na sinusnu funkciju, a u redu za periodu možemo se zaustaviti na prvom članu, kao i kod matematičkog klatna.

Slobodne ose

Proučimo još tzv. *slobodne ose*. U tom cilju pretpostavimo da je rezultujući moment svih sila u odnosu na centar masa jednak nuli, da se centar masa nalazi na osi rotacije i da je osa rotacije jedna od glavnih osa inercije. Neka je to Z_1' osa, pa je tada $L_1 = L_2 = L_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$ i $\omega_3 = \omega$, te prve dve Euler-ove jednačine (21.13) daju samo identitete, a treća daje

$$I_3 \left(\frac{d\omega_3}{dt} \right)_{rel} = 0,$$

pa dobijamo

$$\omega_3 = a = \text{const} \quad (21.37)$$

Jednačine (21.14) tada su zadovoljene ako stavimo

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_3 = a,$$

a otuda

$$\psi = C_1, \quad \vartheta = C_2, \quad \varphi = at + C_3 \quad (21.38)$$

Zbog druge pretpostavke ovaj rezultat ostaje na snazi i ako ni jedna tačka na osi rotacije nije utvrđena, stoga se ovakva osa i zove slobodna.

Prema tome, ako je rezultujući moment svih sila u odnosu na centar masa jednak nuli, ako se centar masa nalazi na osi rotacije i ako je osa rotacije jedna od glavnih osa inercije, osa rotacije je slobodna osa i kruto telo tada rotira po inerciji sa stalnom ugaonom brzinom zadržavajući stalno pravac svoje ose rotacije u prostoru.

21.6 Kretanje krutog tela oko nepomične tačke

Ako se kruto telo kreće oko nepomične tačke, imamo tri stepena slobode i položaj krutog tela potpuno je određen Euler-ovim uglovima ψ , ϑ i φ . Tada tri poslednje Lagrange-eve jednačine (21.6) ili Euler-ove jednačine (21.13) potpuno određuju ovo kretanje krutog tela

Ovde postoje samo tri integrabilna slučaja, pri čemu se pod integrabilnim slučajevima podrazumevaju takvi koji se pri proizvoljnim početnim uslovima mogu svesti na kvadrature, i ovi slučajevi su sledeći:

1. *Euler-ove slučaj*, kad je rezultujući moment sila u odnosu na utvrđenu tačku jednak nuli tj. kad je $L_1 = L_2 = L_3 = 0$. Ovakav slučaj imamo na pr. kod teškog krutog tela čiji je centar masa utvrđen.

2. *Lagrange-ev slučaj*, kad je jedina sila Zemljina teža, dva glavna momenta inercije jednaka, a centar masa na osi simetrije elipsoida inercije. Ovakav slučaj imamo npr. kod teške simetrične čigre sa utvrđenim vrhom.

3. *Slučaj Sonje Kovalevski*, kad je jedina sila Zemljina teža, dva glavna momenta inercije jednaka i dva puta veća od trećeg, a centar masa u ekvatorijalnoj ravni elipsoida inercije.

Ako su dva glavna momenta inercije jednaka, kao u drugom i trećem slučaju, kažemo da je kruto telo *dinamički simetrično*, što može ali ne mora da se svede na geometrijsku simetriju. Npr. ako je $I_1 = I_2$, kruto telo je dinamički simetrično u odnosu na Z_1' osu.

Pored navedenih integrabilnih slučajeva, koji važe pri ma kakvim početnim uslovima, postoji i nekoliko partikularnih integrabilnih slučajeva, koji važe samo pri specijalnom rasporedu masa i početnim uslovima.

Euler-ov slučaj

Zadržaćemo se samo na uprošćenom prvom i drugom slučaju. Proučimo prvo specijalni Euler-ov slučaj kad je kruto telo dinamički simetrično u odnosu na Z_1' osu, tj. kad je $I_1 = I_2$. Euler-ove jednačine (21.13) tada glase, izostavljajući oznake za relativne izvode

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (21.39)$$

a iz treće jednačine neposredno dobijamo jedan integral kretanja

$$\omega_3 = c = \text{const} \quad (21.40)$$

Tada diferenciranjem prve jednačine nalazimo

$$I_1 \ddot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) c \dot{\omega}_2 = 0,$$

a eliminacijom ω_2 pomoću druge jednačine dobijamo

$$\ddot{\omega}_1 - \frac{I_1 - I_3}{I_1} c \frac{I_3 - I_1}{I_1} c \omega_1 = 0,$$

tj.

$$\ddot{\omega}_1 + k^2 \omega_1 = 0, \quad k = c \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad (21.41)$$

Jedan partikularni integral ove jednačine je

$$\omega_1 = a \cos kt, \quad (21.42)$$

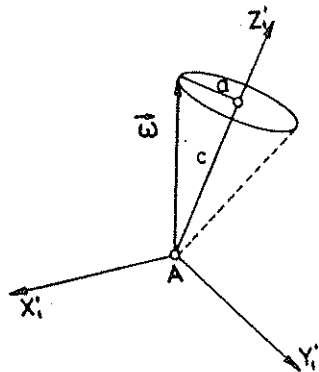
a iz prve jednačine tada dobijamo

$$\omega_2 = \frac{I_1 \dot{\omega}_1}{c(I_1 - I_3)} = -\frac{1}{k} (-a k \sin kt),$$

tj.

$$\omega_2 = a \sin kt \quad (21.43)$$

Iz dobijenih rezultata zaključujemo da projekcija ugaone brzine na Z_1' osu predstavlja stalnu veličinu (sl. 21.6), dok projekcija na $X_1'AY_1'$ ravan opisuje krug poluprečnika a sa kružnom frekvencijom k . Prema tome, kretanje u ovom slučaju je takve prirode da ugaona brzina



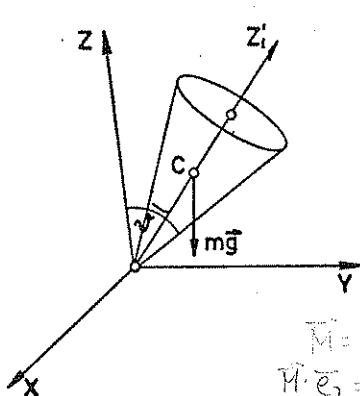
Sl. 21.6

ravnomerno rotira oko ose simetrije krutog tela i takvo kretanje naziva se *regularna precesija*. Približno takav slučaj imamo pri rotaciji Zemlje ako se dejstvo drugih sila zanemari, jer se ugaona brzina Zemlje ne poklapa sa njenom osom simetrije, već rotira oko nje.

Lagrange-ev slučaj

Proučimo sad u opštim crtama Lagrange-ev slučaj, u kome je jedina sila Zemljina teža (sl. 21.7). U tom slučaju podesnije je upotrebiti metod prvih integrala u Lagrange-evom formalizmu. Lagrange-eve jednačine (21.6) za Euler-ove uglove glase

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.44)$$



Sl. 21.7

Zbog pretpostavke $I_1 = I_2$ prema obrascu (20.66) imamo

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

pa prema obrascima (21.14) dobijamo

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})^2. \quad (21.45)$$

Potencijalna energija u odnosu na najniži položaj ima vrednost

$$U = mgz = mgl \cos \vartheta, \quad (21.46)$$

gde je l rastojanje centra masa C od nepomične tačke A , pa Lagrange-eve funkcija glasi

$$L = T - U = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})^2 - mgl \cos \vartheta. \quad (21.47)$$

U ovom slučaju neposredno možemo dobiti tri integrala kretanja. Prvi integral je zakon o održanju mehaničke energije, a druga dva dobijamo iz prve i treće Lagrange-eve jednačine (21.44), imajući u vidu da Lagrange-eve funkcija (21.47) ne zavisi eksplicitno od ψ i ϕ , te se ove jednačine svode na

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0.$$

Tako dobijamo

$$T + U = E = \text{const}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A = \text{const}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = B = \text{const}, \quad (21.48)$$

što u eksplicitnom obliku možemo napisati u vidu jednačina

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} I_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi})^2 + mgl \cos \vartheta &= E \\ I_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) &= A \\ I_1 \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + I_3 \cos \vartheta (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}) &= B \end{aligned} \right\} \quad (21.49)$$

Eliminacijom $\dot{\phi}$ iz zadnjih dveju jednačina dobijamo

$$I_1 \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + A \cos \vartheta = B,$$

a otuda

$$\dot{\psi} = \frac{B - A \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta}, \quad (21.50)$$

pa ako se eliminiše $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$ pomoću gornjih obrazaca, prva jednačina (21.49) dobija oblik

$$\frac{1}{2} I_1 \sin^2 \vartheta \frac{(B - A \cos \vartheta)^2}{I_1^2 \sin^4 \vartheta} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_3 A^2 + mgl \cos \vartheta = E,$$

tj.

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{(B - A \cos \vartheta)^2}{2 I_1 \sin^2 \vartheta} + \frac{A^2}{2 I_3} + mgl \cos \vartheta = E. \quad (21.51)$$

Time smo problem sveli na rešavanje jedne diferencijalne jednačine sa jednom nepoznatom funkcijom ϑ . Pošto se rešavanje ove jednačine svodi na eliptičke funkcije, zadržimo se samo na izvesnim kvalitativnim zaključcima. Gornju jednačinu (21.51) možemo protumačiti i kao zakon o održanju energije pri jednom zamišljenom ekvivalentnom rotacionom kretanju krutog tela oko stalne ose rotacije, koja prolazi kroz tačku A normalno na osu simetrije, sa istom energijom E . Tada prvi član predstavlja odgovarajuću kinetičku energiju, a pošto je po

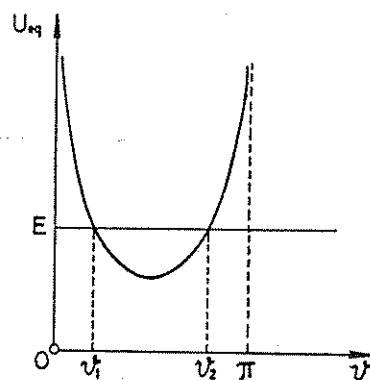
$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{B^2}{2 I_1 \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta = E$$

pretpostavci ukupna energija pri ovom zamišljenom kretanju E , zbir sledeća tri člana predstavlja odgovarajuću potencijalnu energiju, koju ćemo označiti sa U_{eq}

$$U_{eq} = \frac{B - A \cos \vartheta}{2 I \sin^2 \vartheta} + \frac{A^2}{2 I_3} + mgl \cos \vartheta. \quad (21.52)$$

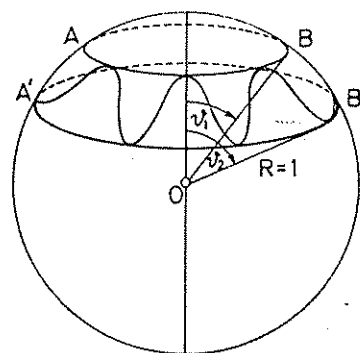
Diskusijom ovog obrasca možemo dobiti kvalitativnu sliku kretanja u ovom slučaju. Iz gornjeg obrasca vidimo da U_{eq} postaje beskonačno pri $\vartheta=0$ i $\vartheta=\pi$, a pošto je između ovih vrednosti gornja funkcija neprekidna, u tom intervalu mora postojati bar jedan minimum funkcije (sl. 21.8). Pri ovom zamišljenom kretanju moguće su samo one vrednosti ugla ϑ pri kojima je $U_{eq} \leq E$ i ako nivo energije E seče ovu krivu, moguće vrednosti ϑ leže između dveju graničnih vrednosti ϑ_1 i ϑ_2 , koje odgovaraju presečnim tačkama nivoa energije E i ove krive

$$\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2 \quad (21.53)$$



Sl. 21.8

Prema tome, u ovom slučaju ugao između ose simetrije krutog tela i vertikale osciluje između dveju graničnih vrednosti ϑ_1 i ϑ_2 , te osa simetrije na jediničnoj sferi opisuje izvesnu liniju koja leži u pojasu između ϑ_1 i ϑ_2 , kao što je prikazano na sl. 21.9. Ovakvo oscilovanje ose simetrije naziva se *nutacija*, a ukupno kretanje krutog tela *pseudoregularna precesija*. Takav slučaj imamo ako tešku simetričnu čigru jako zavrtimo oko izvesne ose koja sa njenom osom simetrije zaklapa mali ugao. Ako se pak granični uglovi ϑ_1 i ϑ_2 poklope, pseudoregularna precesija svodi se na regularnu precesiju.



Sl. 21.9

GLAVA VII RELATIVNO KRETANJE

22. KINEMATIKA RELATIVNOG KRETANJA

22.1. Apsolutno, relativno i prenosno kretanje

Pri kretanju sistema čestica može se odrediti njegov položaj kako u odnosu na neki nepokretni tako i u odnosu na neki pokretni koordinatni sistem. Pri tome se uvek zamišlja da je *pokretni sistem vezan za neko kruto telo kao nosioca ovog sistema*. Ovde se mogu razlikovati ove vrste kretanja:

1. *apsolutno kretanje*, koje predstavlja kretanje sistema čestica u odnosu na nepokretni sistem OXYZ,
2. *relativno kretanje*, koje predstavlja kretanje sistema čestica u odnosu na pokretni sistem AX'Y'Z',
3. *prenosno kretanje*, koje predstavlja kretanje pokretnog sistema AX'Y'Z' u odnosu na nepokretni OXYZ.

Razmotrimo kao primer kretanje planete Marsa. Ako uzmemo da se koordinatni sistem čiji je početak u centru Sunca i čije ose zadržavaju svoju orijentaciju u prostoru u odnosu na „nepokretne“ zvezde može smatrati kao nepokretni sistem, kretanje Marsa u odnosu na taj sistem predstavlja njegovo apsolutno kretanje. Ako pak ovo kretanje posmatramo sa Zemlje, tj. iz sistema vezanog za Zemlju, kretanje Marsa u odnosu na ovaj sistem predstavljaće njegovo relativno kretanje, dok će kretanje ovog sistema u odnosu na navedeni nepokretni sistem predstavljati prenosno kretanje.

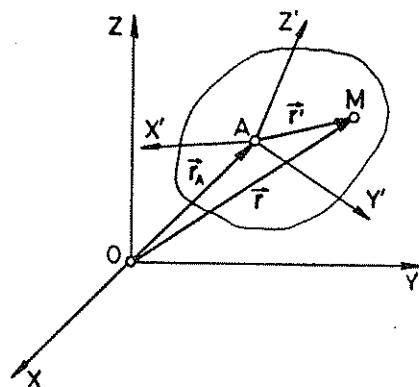
U daljem izlaganju ograničićemo se samo na kretanje jedne čestice.

22.2. Brzina čestice pri relativnom kretanju

Posmatrajmo sad kretanje neke čestice M (sl. 22.1) kako u odnosu na nepokretni sistem OXYZ tako i u odnosu na pokretni AX'Y'Z'. Označimo crtom sve veličine koje se odnose na pokretni sistem. Tada su relativni vektor položaja, relativna brzina i relativno ubrzanje

definisani obrascima

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{rel}} &\equiv \mathbf{r}' = \mathbf{AM} \\ \mathbf{v}_{\text{rel}} &\equiv \mathbf{v}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\text{rel}} \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &\equiv \mathbf{a}' = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_{\text{rel}} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{\text{rel}} \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$



Sl. 22.1

gde indeks kod izvoda označava da je reč o relativnom izvodu. Ove relativne izvode možemo povezati sa apsolutnim pomoću obrasca (19.29)

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_{\text{aps}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \mathbf{G}, \quad (22.2)$$

pri čemu treba imati u vidu da svi izvodi bez ikakvog indeksa predstavljaju apsolutne izvode.

Pošto je prema slici

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}', \quad (22.3)$$

apsolutnu brzinu čestice dobićemo diferenciranjem ovog izraza po vremenu

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (22.4)$$

Prvi član predstavlja apsolutnu brzinu $\mathbf{v}_A$ tačke A, a drugi član, koji predstavlja apsolutni izvod relativnog vektora položaja, prema obrascu (22.2) možemo napisati u obliku

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (22.5)$$

pa dobijamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (22.6)$$

Ovaj obrazac određuje vezu između apsolutne i relativne brzine čestice. Zbir zadnja dva člana prema obrascu (19.38) predstavlja brzinu one tačke krutog tela koja se u posmatranom trenutku t poklapa sa posmatranom česticom i naziva se prenosna brzina

$$\mathbf{v}_{\text{pr}} = \mathbf{v}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (22.7)$$

pa obrazac (22.6) možemo napisati u obliku

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{pr}} \quad (22.8)$$

Prema tome, apsolutna brzina čestice jednaka je zbiru relativne i prenosne brzine.

22.3. Ubrzanje čestice pri relativnom kretanju

Da bismo našli apsolutno ubrzanje čestice, diferenciramo izraz (22.6) po vremenu

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (22.9)$$

Ovde prvi član možemo transformisati pomoću obrasca (22.2)

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \mathbf{v}' = \mathbf{a}' + \vec{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (22.10)$$

Drugi član predstavlja apsolutno ubrzanje tačke A, a u zadnjem članu $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ je određeno obrascem (22.5), pa dobijamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'),$$

tj.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (22.11)$$

Ovaj obrazac određuje vezu između apsolutnog i relativnog ubrzanja. Zbir drugog, trećeg i četvrtog člana prema obrascu (19.43) predstavlja ubrzanje one tačke krutog tela koja se u posmatranom trenutku t poklapa sa posmatranom česticom i naziva se prenosno ubrzanje

$$\mathbf{a}_{\text{pr}} = \mathbf{a}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (22.12)$$

Međutim, pored relativnog i prenosnog ubrzanja u obrascu (22.11) figuriše još jedan, zadnji član, koji predstavlja dopunsku komponentu ubrzanja usled istovremenog dejstva relativnog kretanja čestice i kretanja samog sistema $AX'Y'Z'$ i naziva se Coriolisovo ubrzanje

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}', \quad (22.13)$$

pa obrazac (22.11) možemo napisati u obliku

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{pr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} \quad (22.14)$$

Prema tome, apsolutno ubrzanje čestice jednako je zbiru relativnog, prenosnog i Coriolis-ovog ubrzanja.

23. DINAMIKA RELATIVNOG KRETANJA

23.1. Diferencijalna jednačina relativnog kretanja

Kretanje čestice u odnosu na pokretni sistem $AX'Y'Z'$ potpuno je određeno ako znamo kako se njen relativni vektor položaja menja u toku vremena

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t) \quad (23.1)$$

i ova jednačina predstavlja *konačnu jednačinu relativnog kretanja*. Potražimo sad diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja čestice, koja određuje ovaj relativni vektor položaja. U tom cilju podimo od osnovne jednačine dinamike

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{ef}, \quad (23.2)$$

pri čemu se efektivna sila $\mathbf{F}_{ef}$, tj. zbir aktivne sile i sile reakcije, može izraziti i pomoću relativnog vektora položaja, relativne brzine i vremena

$$\mathbf{F}_{ef} = \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \quad (23.3)$$

Ako apsolutno ubrzanje $\mathbf{a}$ zamenimo izrazom (22.14), dobijamo

$$m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_{pr} + \mathbf{a}_{cor}) = \mathbf{F}_{ef},$$

a otuda

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{ef} - m\mathbf{a}_{pr} - m\mathbf{a}_{cor} \quad (23.4)$$

Označimo li drugi i treći član s desne strane sa $\mathbf{F}_{pr}$ i $\mathbf{F}_{cor}$, imajući u vidu poslednji obrazac (22.1) ovu jednačinu možemo napisati konciznije u obliku

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{rel} = \mathbf{F}_{ef} + \mathbf{F}_{pr} + \mathbf{F}_{cor}, \quad (23.5)$$

gde je, prema obrascima (22.12) i (22.13)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{pr} &= -m\mathbf{a}_{pr} = -m\mathbf{a}_A - m\vec{\omega} \times \mathbf{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') \\ \mathbf{F}_{cor} &= -m\mathbf{a}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' \end{aligned} \right\} \quad (23.6)$$

U eksplicitnom obliku gornja jednačina (23.5) glasi

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{rel} = \mathbf{F}_{ef} - m\mathbf{a}_A - m\vec{\omega} \times \mathbf{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (23.7)$$

Pošto s leve strane ove jednačine figuriše proizvod mase i relativnog ubrzanja, a sve veličine na desnoj strani predstavljaju uzroke relativnog ubrzanja, te prema opštoj definiciji pojma sile (4.3) imaju karakter sile, ova jednačina predstavlja osnovnu jednačinu relativnog kretanja. Ako znamo silu $\mathbf{F}_{ef}$ koja dejstvuje na česticu, početne uslove čestice i prenosno kretanje sistema $AX'Y'Z'$, to je *diferencijalna jednačina drugog reda sa nepoznatom funkcijom $\mathbf{r}'$* , te rešavanjem ove jednačine dobijamo relativni vektor položaja $\mathbf{r}'$, kao funkciju vremena t , tj. konačnu jednačinu kretanja u obliku (23.1).

23.2. Inercijalne sile

Analizirajmo sad diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja (23.7). Prvi član s desne strane $\mathbf{F}_{ef}$, koji se sastoji iz aktivne sile i sile reakcije, predstavlja *pravu silu*, tj. silu koja ima uzrok u *uzajamnom dejstvu posmatrane čestice sa nekim drugim telima*. Međutim, druga dva člana $\mathbf{F}_{pr}$ i $\mathbf{F}_{cor}$, ma da imaju dimenziju sile, ne predstavljaju sile u ovom smislu reči, jer se za njih ne može naći uzrok u nekom uzajamnom dejstvu. *Takve sile potiču samo od ubrzanja samog koordinatnog sistema iz koga se vrši posmatranje kretanja uočene čestice, a za posmatrača u ovom sistemu one pokazuju realno dejstvo na posmatranu česticu, koje se može i izmeriti dinamometrom*. Ova poslednja osobina i opravdava nazivanje veličina $\mathbf{F}_{pr}$ i $\mathbf{F}_{cor}$ silama i takve sile nazivaju se *inercijalne sile*, a sistemi u kojima se one pojavljuju *neinercijalni sistemi*.

Prva sila $\mathbf{F}_{pr}$, definisana prvim obrascem (23.6) naziva se *prenosna sila* i ona potiče samo od kretanja sistema $AX'Y'Z'$, a njen zadnji član $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}')$ zove se *centrifugalna sila* i, prema sl. 19.8 *uvek je uperena od ose rotacije krutog tela, za koje je vezan sistem $AX'Y'Z'$* ,

otkuda i potiče njeno ime. Međutim, u izvesnim slučajevima i ostali članovi u odnosu na izabrani sistem referencije mogu imati tu osobinu, a *suma svih inercijalnih sila koje su uperene od ose rotacije normalno na nju može se zvati centrifugalna sila u širem smislu*. Ovu osobinu u praksi najčešće ima prvi član prenosne sile $-m\mathbf{a}_A$, pri čemu podvucimo da od izbora sistema referencije bitno zavisi koji će član igrati ulogu ovako šire shvaćene centrifugalne sile. Druga sila $\mathbf{F}_{cor}$, definisana drugim obrascem (23.6) naziva se *Coriolis-ova sila*, ona potiče od *istovremenog ubrzanja sistema $AX'Y'Z'$ i relativnog kretanja čestice i uvek je normalna na osu rotacije odgovarajućeg krutog tela, kao i na relativnu brzinu čestice*. Ona je jednaka nuli u tri slučaja: 1) ako je trenutna ugaona brzina jednaka nuli, 2) ako je relativna brzina čestice jednaka nuli ili 3) ako su obe ove brzine kolinearne.

Napomenimo ovde da u literaturi, naročito u elementarnim udžbenicima, često postoji prilična zbrka oko upotrebe pojma centrifugalne sile. Naime, sve sile koje se nazivaju tim imenom nisu centrifugalne sile u gornjem smislu reči i pogrešno se nazivaju tim imenom. Neke od njih su obične *prave sile* i to centralne, koje imaju uzrok u uzajamnom dejstvu između tela (npr. sile koje dejstvuju kad kamen vezan za konopac vrtimo u ruci, centrifugalna sila ovde dejstvuje na ruku), dok su druge stvarno *inercijalne sile* (na pr. sile koje dejstvuju na ploči koja rotira ili sile koje zapaža putnik u automobilu na krivini). Pri tome se istim imenom nazivaju kako one inercijalne sile koje odgovaraju pojmu centrifugalne sile u užem smislu (prvi primer) tako i u širem (drugi primer), jer one u suštini deluju na isti način.

23.3. Kretanje na Zemlji koja rotira

Pošto mi sva posmatranja vršimo sa Zemlje koja rotira, poseban značaj ima relativno kretanje u odnosu na koordinatni sistem vezan za Zemlju (sl. 23.1). Pretpostavimo da je Zemlja savršena sfera poluprečnika R i za pokretni sistem $AX'Y'Z'$ izaberimo takav sistem čiji je početak u izabranoj tački A na površini Zemlje i čija se $AX'AY'$ ravan poklapa sa tangencijalnom ravni

u ovoj tački. Ako ugaonu brzinu Zemlje označimo sa $\vec{\Omega}$ i imamo u vidu da je ona stalna, diferencijalna jednačina relativnog kretanja čestice (23.7) u ovom slučaju glasi

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{rel} = \mathbf{F}_{ef} - m\mathbf{a}_A - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}') + 2m\mathbf{v}' \times \vec{\Omega}, \quad (23.8)$$

pri čemu napominjemo da se ovi izvodi odnose na izabrani pokretni sistem $AX'Y'Z'$.

Ovu jednačinu možemo transformirati i uprostiti na sledeći način. U pravoj sili $\mathbf{F}_{ef}$ izdvojimo silu Zemljine teže kao njen najvažniji deo, a ostali deo označimo sa $\mathbf{F}_{ef}'$

$$\mathbf{F}_{ef} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ef}' \quad (23.9)$$

Ubrzanje tačke A možemo naći smatrajući je tačkom Zemlje kao krutog tela i uzimajući za odgovarajući pol tačku A_0 . Prema obrascu (19.43) tada imamo

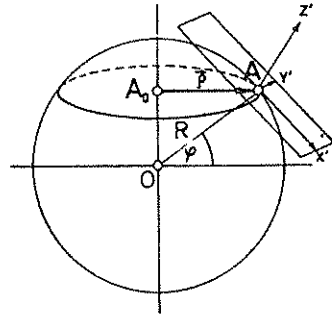
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{A_0} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) = \mathbf{a}_{A_0} + \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}),$$

a pošto možemo smatrati da se u malim vremenskim intervalima tačka A_0 kreće uniformno, tj. da je $\mathbf{a}_{A_0} = 0$, imajući u vidu da je $\vec{\Omega} \cdot \vec{\rho} = 0$, dobijamo

$$\mathbf{a}_A = -\vec{\Omega}^2 \vec{\rho} \quad (23.10)$$

Tada diferencijalna jednačina relativnog kretanja u odnosu na Zemlju (23.8) dobija oblik

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\text{rel}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{ef}} + m\Omega^2 \rho - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}') + 2m\mathbf{v}' \times \vec{\Omega} \quad (23.11)$$



Sl. 23.1

Ovde je

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ sec},$$

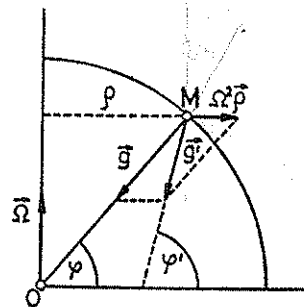
dakle vrlo mala veličina, pa možemo zanemariti članove sa Ω^2 ali pod uslovom da se ne množe veličinom reda Zemljinog poluprečnika. Stoga u prvoj aproksimaciji možemo zanemariti član $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}')$, pa ako još uvedemo veličinu

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \Omega^2 \rho, \quad (23.12)$$

prethodnu jednačinu (23.11) možemo konačno napisati u obliku

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{\text{rel}} = m\mathbf{g}' + \mathbf{F}_{\text{ef}} + 2m\mathbf{v}' \times \vec{\Omega} \quad (23.13)$$

To je diferencijalna jednačina relativnog kretanja čestice u odnosu na sistem vezan za Zemlju. Odavde vidimo da u prvoj aproksimaciji posmatrač vezan za Zemlju zapaža tri vrste sila: ko-rigovanu silu Zemljine teže $m\mathbf{g}'$, pravu negravitacionu silu $\mathbf{F}_{\text{ef}}$ i Coriolis-ovu silu $2m\mathbf{v}' \times \vec{\Omega}$.



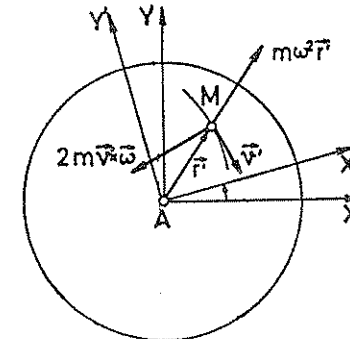
Sl. 23.2

Pri tome prema obrascu (23.12) ubrzanje $\mathbf{g}'$ potiče kako od Zemljine teže tako i od rotacije Zemlje i ono određuje pravac vertikale na posmatranom mestu Zemlje, (tzv. lokalna vertikala), kao što je prikazano na (sl. 23.2).

23.4. Primeri

1. Posmatrajmo kretanje neke čestice M po ploči koja ravnomerno rotira oko svoje vertikalne osovine (sl. 23.3) iz sistema AX'Y'Z' vezanog za ovu ploču, koji je tako izabran da se koordinatni počeci kao i Z-ose oba sistema poklapaju. U ovom slučaju je

$$\mathbf{a}_A = 0, \quad \vec{\omega} = \text{const},$$



Sl. 23.3

pa diferencijalna jednačina relativnog kretanja (23.7), izostavljajući oznaku za relativni izvod, ima oblik

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{ef}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (23.14)$$

Zbog ortogonalnosti vektora $\vec{\omega}$ i $\mathbf{r}'$ biće

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}' (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \mathbf{r}',$$

te dobijamo, stavljajući eksplicitno $\mathbf{F}_{\text{ef}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + m\omega^2 \mathbf{r}' + 2m\mathbf{v}' \times \vec{\omega} \quad (23.15)$$

Prodiskutujemo razne moguće slučajeve koji ovde mogu nastupiti. Pre svega, ako se čestica nalazi van polja pravih sila, tj. ako je $\mathbf{F} = \mathbf{R} = 0$, u odnosu na nepokretni sistem kretanje se uniformno, međutim u odnosu na posmatrani rotirajući sistem AX'Y'Z' imaće izvesno relativno ubrzanje, te za posmatrača na ploči ovo kretanje više neće biti uniformno. Drugim rečima, u posmatranom neinercijalnom sistemu ne važi više princip inercije. Isto tako, kretanje čestice koje bi za posmatrača na ploči bilo uniformno ne bi bilo uniformno za posmatrača u nepokretnom sistemu, jer u ovom slučaju mora postojati prava sila koja se uravnotežava sa nercijalnim.

Ako se pak čestica nalazi u polju Zemljine teže, biće $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, a $\mathbf{R}$ sila reakcije od strane ploče uperena naviše, koja drži ravnotežu sili $m\mathbf{g}$. Tada preostaju samo centrifugalna sila $m\omega^2 \mathbf{r}'$,

uperena radijalno od ose rotacije i Coriolis-ova sila $2m\mathbf{v}' \times \vec{\omega}$, normalna na relativnoj brzini čestice u ravni ploče

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = m\omega^2 \mathbf{r}' + 2m\mathbf{v}' \times \vec{\omega} \quad (23.16)$$

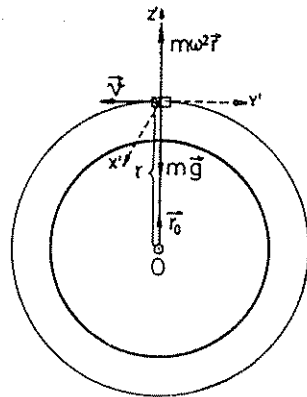
i ove dve sile određuju kretanje posmatrane čestice u odnosu na ploču. Ukoliko je čestica vezana elastičnom oprugom za neku utvrđenu tačku na ploči, tako da je u ravnotežnom stanju u položaju $\mathbf{r}_0'$, u aktivnu silu $\mathbf{F}$ ulazi i elastična sila kojom opruga deluje na posmatranu česticu, srazmerna istezanju opruge, tj. biće $\mathbf{F} = m\mathbf{g} - k(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0')$. Međutim, tada zbog odsustva relativnog kretanja otpada Coriolis-ova sila kao i relativno ubrzanje, te zbog uravnotežavanja sila $m\mathbf{g}$ i $\mathbf{R}$ imamo

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = 0 = -k(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0') + m \omega^2 \mathbf{r}' \quad (23.17)$$

U ovom slučaju, dakle, centrifugalna sila $m \omega^2 \mathbf{r}'$, drži ravnotežu elastičnoj sili opruge $-k(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0')$

2. Kao drugi primer uzmimo kretanje kosmičkog broda po kružnoj putanji oko Zemlje (sl. 23.4), kad se javlja tzv. bestežinsko stanje. Ako pokretni sistem $AX'Y'Z'$ vezemo za kosmički brod sa koordinatnim početkom u posmatraču u brodu, ubrzanje pola A biće čisto normalno ubrzanje, upereno ka centru Zemlje, a prema obrascu (3.23) iznosi

$$\mathbf{a}_A = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}_0 = -\frac{v^2}{r} \mathbf{r}_0 \quad (23.18)$$



Sl. 23.4

Pošto je ovde

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \quad \vec{\omega} = \text{const}, \quad \mathbf{r}' = 0,$$

a zbog odsustva kretanja posmatrača u odnosu na brod

$$\mathbf{v}' = 0, \quad \mathbf{a}' = 0,$$

diferencijalna jednačina relativnog kretanja (23.7) svodi se na

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = 0 = m\mathbf{g} + \frac{mv^2}{r} \mathbf{r}_0 \quad (23.19)$$

Prema tome, u kosmičkom brodu se uravnotežavaju sila Zemljine teže $m\mathbf{g}$ i inercijalna sila $\frac{mv^2}{r} \mathbf{r}_0$, što proizvodi bestežinsko stanje.

U ovom slučaju interesantno je uporediti ovu jednačinu relativnog kretanja sa jednačinom apsolutnog kretanja u odnosu na nepokretni sistem. Za posmatrača u ovom sistemu postoji

samo prava sila, sila Zemljine teže $m\mathbf{g}$, koja deluje na putnika u kosmičkom brodu, ali on ima apsolutno ubrzanje jednako normalnom ubrzanju (23.18). Stoga diferencijalna jednačina kretanja u nepokretnom sistemu glasi

$$m\mathbf{a} = m \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}_0 = m\mathbf{g} \quad (23.20)$$

što se poklapa sa jednačinom (23.19), ali sa različitom interpretacijom.

3. Primenimo još diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja (23.13) na slobodan pad na Zemlji. Tada je $\mathbf{F}_{ef}' = 0$, pa gornja jednačina posle deljenja sa m dobija oblik, pišući eksplisito $\mathbf{v}' = (d\mathbf{r}'/dt)_{rel}$ i izostavljajući opet oznaku za relativni izvod

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{g}' + 2 \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \times \vec{\Omega} \quad (23.21)$$

Smatrajući $\mathbf{g}'$ konstantnim, možemo naći približno rešenje gornje jednačine na sledeći način. Neposrednom integracijom nalazimo prvi integral, pri čemu moramo imati u vidu da je početna relativna brzina čestice jednaka nuli, čime dobijamo

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{g}'t + 2 \mathbf{r}' \times \vec{\Omega} \quad (23.22)$$

Ako ovaj izraz uvrstimo u jednačinu (23.21), imamo

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{g}' + 2 \mathbf{g}'t \times \vec{\Omega} + 4 (\mathbf{r}' \times \vec{\Omega}) \times \vec{\Omega},$$

a pošto je zadnji član srazmeran sa Ω^2 , možemo ga zanemariti

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{g}' + 2 (\mathbf{g}' \times \vec{\Omega}) t \quad (23.23)$$

Ovu jednačinu možemo neposredno integrirati, čime dobijamo

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{g}'t + (\mathbf{g}' \times \vec{\Omega}) t^2,$$

a ponovnom integracijom, uzimajući početni položaj čestice za koordinatni početak, konačno nalazimo približno rešenje u obliku

$$\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \mathbf{g}' t^2 + \frac{1}{3} (\mathbf{g}' \times \vec{\Omega}) t^3 \quad (23.24)$$

Izaberimo sad koordinatni sistem $AX'Y'Z'$ (sl. 23.5) tako da X' osa bude uperena duž meridijana ka jugu, Y' osa duž uporednika ka istoku, a Z' osa duž vertikale naviše. Pošto vektori $\mathbf{g}'$ i $\vec{\Omega}$ leže u meridijanskoj ravni, a u ovom sistemu imaju komponente

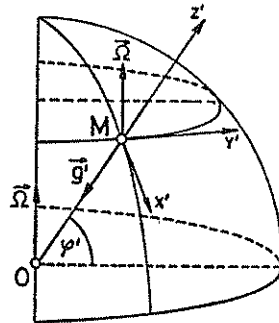
$$\mathbf{g}' = (0, 0, -g'), \quad \vec{\Omega} = (-\Omega \cos \varphi', 0, \Omega \sin \varphi'),$$

njihov vektorski proizvod biće

$$\mathbf{g}' \times \vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3' \\ 0 & 0 & -g' \\ -\Omega \cos \varphi' & 0 & \Omega \sin \varphi' \end{vmatrix} = g' \Omega \cos \varphi' \mathbf{e}_2',$$

te jednačina (23,24) dobija oblik

$$\mathbf{r}' = -\frac{1}{2} g' t^2 \mathbf{e}_3' + \frac{1}{3} g' \Omega \cos \varphi' t^3 \mathbf{e}_2' \quad (23.25)$$



Sl. 23.5

To je konačna jednačina relativnog kretanja čestice pri slobodnom padu na Zemlji, a odavde neposredno dobijamo i odgovarajuće skalarne jednačine

$$x' = 0, \quad y' = \frac{1}{3} g' \Omega \cos \varphi' t^3, \quad z' = -\frac{1}{2} g' t^2 \quad (23.26)$$

Pošto je uvek $y' > 0$, vidimo da čestica pri slobodnom padu na Zemlji skreće ka istoku i ovo skretanje je maksimalno na ekvatoru, a jednako nuli na polovima.

Glava VIII

KRETANJE SA PROMENLJIVOM MASOM

24. JEDNAČINA MEŠČERSKOG

24.1. Slučaj promenljive mase

U izvesnim problemima mehanike pri kretanju tela menja se njegova masa. Npr. pri padanju kapljice vode kroz atmosferu zasićenu vodenom parom nove kapljice se spajaju sa prvobitnom i masa ove kapljice postaje sve veća i veća do izvesne granice. Pri kretanju rakete ona se ubrzava izbacivanjem gasova, usled čega dobija ubrzanje u suprotnom smeru od smera izbacivanja gasova i pri tome se njena masa smanjuje. Postanak Sunčevog sistema objašnjava se odvajanjem izvesnih delova Sunca pri njegovoj rotaciji, što je bilo praćeno smanjivanjem mase Sunca.

U opštem slučaju može se vršiti i pripajanje i odvajanje čestica. Telo promenljive mase kome se pripajaju ili od koga se odvajaju ove čestice nazivaćemo *osnovno telo*. Sve čestice koje u posmatranom trenutku nemaju relativnu brzinu u odnosu na sistem vezan za jezgro osnovnog tela pripadaju osnovnom telu u tom trenutku. Pri tome ćemo pretpostaviti da se *osnovno telo može smatrati česticom, čime zanemarujemo njegovo unutrašnje kretanje, i da se proces pripajanja i odvajanja čestica vrši kontinuirano.*

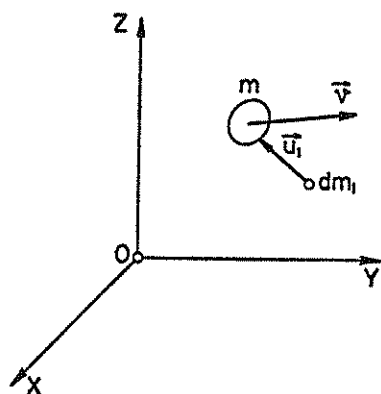
U ovom slučaju od interesa je ispitivanje kretanja osnovnog tela. Međutim, zbog promenljivosti mase za osnovno telo ne važi osnovna jednačina dinamike u obliku (4.13). Ali se na celokupni sistem, sastavljen od osnovnog tela i čestica koje se pripajaju ili odvajaju, može primeniti zakon o održanju impulsa (5.42). Tim putem može se pristupiti proučavanju kretanja ove vrste, što ćemo i mi učiniti.

24.2. Jednačina Meščerskog

Potražimo sad diferencijalnu jednačinu kretanja osnovnog tela sa promenljivom masom. Neka osnovno telo u trenutku t ima masu m i brzinu $\mathbf{v}$ i neka mu se u toku sledećeg vremenskog intervala $(t, t+dt)$ pripaja čestica mase dm_1 sa brzinom $\mathbf{u}_1$ (sl. 24.1). Posle spajanja u trenutku $t+dt$ osnovno telo imaće masu $m+dm_1$ i kretaće se izvesnom brzinom $\mathbf{v}+d\mathbf{v}_1$, pri čemu $d\mathbf{v}_1$ predstavlja promenu brzine osnovnog tela usled pripajanja posmatrane čestice. Osnovno telo i ova čestica zajedno u posmatranom vremenskom intervalu predstavljaju izo-

lovan sistem, te za njega važi zakon o održavanju impulsa (5.42). U trenutku t impuls ovog sistema je

$$\mathbf{p}(t) = m \mathbf{v} + dm_1 \mathbf{u}_1 \quad (24.1)$$



Sl. 24.1

a u trenutku $t+dt$

$$\mathbf{p}(t+dt) = (m + dm_1) (\mathbf{v} + d\mathbf{v}_1), \quad (24.2)$$

pa zakon o održanju impulsa daje

$$(m + dm_1) (\mathbf{v} + d\mathbf{v}_1) = m \mathbf{v} + dm_1 \mathbf{u}_1 \quad (24.3)$$

Odavde imamo

$$m d\mathbf{v}_1 + dm_1 \mathbf{v} + dm_1 d\mathbf{v}_1 = dm_1 \mathbf{u}_1,$$

a zanemarujući beskonačno malu veličinu drugog reda $dm_1 d\mathbf{v}_1$, dobijamo promenu brzine osnovnog tela usled pripajanja posmatrane čestice

$$d\mathbf{v}_1 = \frac{dm_1}{m} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}). \quad (24.4)$$

Pretpostavimo da paralelno sa ovim pripajanjem imamo i odvajanje čestica i neka se od osnovnog tela u toku vremenskog intervala $(t, t+dt)$ odvaja od njega čestica mase $|dm_2| = -dm_2$ sa brzinom $\mathbf{u}_2$ (sl. 24.2). Posle odvajanja u trenutku $t+dt$ osnovno telo će imati masu $m - |dm_2|$ i kretaće se izvesnom brzinom $\mathbf{v} + d\mathbf{v}_2$, dok će se izdvojena čestica kretati brzinom $\mathbf{u}_2$. Tada je impuls ovog sistema u trenutku: t

$$\mathbf{p}'(t) = m \mathbf{v} \quad (24.5)$$

a u trenutku $t+dt$

$$\mathbf{p}'(t+dt) = (m - |dm_2|) (\mathbf{v} + d\mathbf{v}_2) + |dm_2| \mathbf{u}_2, \quad (24.6)$$

pa zakon o održavanju impulsa daje

$$(m - |dm_2|) (\mathbf{v} + d\mathbf{v}_2) + |dm_2| \mathbf{u}_2 = m \mathbf{v} \quad (24.7)$$

Odavde je

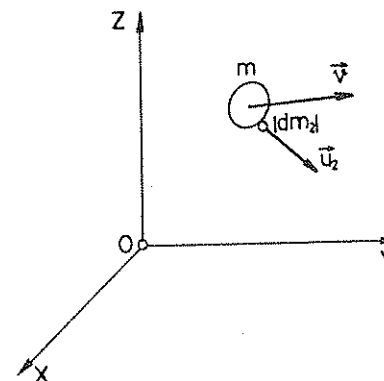
$$m d\mathbf{v}_2 - |dm_2| \mathbf{v} - |dm_2| d\mathbf{v}_2 + |dm_2| \mathbf{u}_2 = 0,$$

a zanemarujući $|dm_2| d\mathbf{v}_2$, dobijamo promenu brzine osnovnog tela usled odvajanja posmatrane čestice

$$d\mathbf{v}_2 = -\frac{|dm_2|}{m} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) = \frac{dm_2}{m} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) \quad (24.8)$$

Najzad, ako na osnovno telo deluje i izvesna efektivna sila $\mathbf{F}_{ef}$, ona će mu dati izvesno ubrzanje $\mathbf{a}$. Ako zanemarimo uticaj promene mase osnovnog tela u intervalu vremena $(t, t+dt)$ na ovo ubrzanje, ono je određeno osnovnom jednačinom dinamike s tačnošću do beskonačno malih veličina drugog reda i iznosi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{ef}}{m}, \quad (24.9)$$



Sl. 24.2

te je promena brzine osnovnog tela usled dejstva ove sile

$$d\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{F}_{ef}}{m} dt \quad (24.10)$$

Ukupna promena brzine osnovnog tela jednaka je zbiru veličina, (24.4), (24.8) i (24.10)

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_3,$$

tj.

$$d\mathbf{v} = \frac{dm_1}{m} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2}{m} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{F}_{ef}}{m} dt \quad (24.11)$$

Množenjem ove jednačine sa $\frac{m}{dt}$ dobijamo traženu diferencijalnu jednačinu kretanja

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{ef} + \frac{dm_1}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2}{dt} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}) \quad (24.12)$$

Imajući u vidu da su relativne brzine posmatranih čestica koje se pripajaju i odvajaju u odnosu na osnovno telo

$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}, \quad (24.13)$$

prethodnu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{ef} + \frac{dm_1}{dt} \mathbf{u}_1' + \frac{dm_2}{dt} \mathbf{u}_2', \quad (24.14)$$

Jednačina (24.12) odnosno (24.14) je *diferencijalna jednačina kretanja osnovnog tela* i naziva se *jednačina Meščerskog*. Pri tome je promena mase osnovnog tela po jedinici vremena

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}, \quad (24.15)$$

pa integracijom dobijamo

$$m(t) = m(0) + \int_0^t \left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} \right) dt \quad (24.16)$$

Ako imamo samo jedan od procesa pripajanja i odvajanja, u jednačini Meščerskog otpada jedan od zadnja dva člana. Tada ovu jednačinu možemo napisati u obliku

$$m \frac{dv}{dt} = F_{et} + \frac{dm}{dt} u_r, \quad (24.17)$$

pri čemu je $dm > 0$ ako se radi o pripajanju, a $dm < 0$ ako se radi o odvajanju čestica.

24.3. Analiza jednačine Meščerskog

Jednačina Meščerskog (24.14) razlikuje se od jednačine kretanja sa stalnom masom po tome što sem sile F_{et} figurišu još dva dopunska člana, koje označimo sa R

$$R = \frac{dm_1}{dt} u_r' + \frac{dm_2}{dt} u_r'', \quad (24.18)$$

pa jednačinu (24.14) možemo napisati u konciznom obliku

$$m \frac{dv}{dt} = F_{et} + R \quad (24.19)$$

Veličina R naziva se *reaktivna ili propulziona sila* i ona karakteriše uticaj pripajanja i odvajanja čestica na kretanje osnovnog tela, pri čemu reaktivnu silu ne treba brkati sa silom reakcije.

Ako nema ni pripajanja ni odvajanja čestica, biće $\frac{dm_1}{dt} = 0$ i $\frac{dm_2}{dt} = 0$, pa je i reaktivna sila jednaka nuli, a jednačina Meščerskog svodi se na jednačinu kretanja sa stalnom masom.

Za poznavanje reaktivne sile (24.18) potrebno je znati veličine $\frac{dm_1}{dt}$ i $\frac{dm_2}{dt}$ kao i veličine u_r' i u_r'' . Odavde vidimo da je pri rešavanju problema kretanja sa promenljivom masom potrebno unapred znati 1) efektivnu silu F_{et} , 2) početne uslove r_0 i v_0 , 3) promene mase po jedinici vremena $\frac{dm_1}{dt}$ i $\frac{dm_2}{dt}$ i 4) relativne brzine čestica u_r' i u_r'' . Tada rešavanjem jednačine Meščerskog dobijamo konačne jednačine kretanja osnovnog tela.

Ispitajmo sada kako reaktivna sila kao dopunska sila zbog pripajanja i odvajanja čestica utiče na kretanje osnovnog tela. Pretpostavimo da relativne brzine čestica u_r' i u_r'' imaju pravac kretanja osnovnog tela, što je najčešći slučaj. Pošto je $\frac{dm_1}{dt} > 0$, smer prve komponente reaktivne sile $\frac{dm_1}{dt} u_r'$ isti je kao i smer relativne brzine u_r' , pa ako relativna brzina u_r' ima smer kretanja osnovnog tela, ova komponenta će takode imati taj smer i izazivaće povećanje brzine osnovnog tela u smeru kretanja. S obzirom da je $\frac{dm_2}{dt} < 0$, smer druge

komponente $\frac{dm_2}{dt} u_r''$ suprotan je smeru relativne brzine u_r'' , pa će ova komponenta ubrzavati osnovno telo u slučaju kad relativna brzina ima suprotan smer od smera kretanja. Stoga pripajanje čestica ubrzava osnovno telo ako se ove čestice uvlače u smeru kretanja, dok ga odvajanje čestica ubrzava ako se čestice izbacuju u suprotnom smeru od smera kretanja.

Posmatrajmo još neke specijalne slučajeve, koji ukazuju na karakteristične razlike između ovog kretanja i kretanja sa stalnom masom. Ako je povećanje mase osnovnog tela zbog spajanja jednako smanjenju njegove mase zbog odvajanja čestica, tj. ako je prema obrascu (24.16)

$$\frac{dm_2}{dt} = -\frac{dm_1}{dt}, \quad (24.20)$$

jednačina Meščerskog (24.14) svodi se na

$$m \frac{dv}{dt} = F + \frac{dm_1}{dt} (u_r' - u_r'') \quad (24.21)$$

Odavde vidimo da i u slučaju kad se ukupna masa osnovnog tela ne menja u toku vremena jednačina kretanja osnovnog tela razlikuje se od jednačine kretanja sa stalnom masom.

Drugi zanimljiv slučaj imamo kad su relativne brzine čestica koje se pripajaju i odvajaju jednake nuli

$$u_r' = 0, \quad u_r'' = 0, \quad (24.22)$$

tada u jednačini Meščerskog (24.14) otpada reaktivna sila, pa ona dobija oblik

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (24.23)$$

U slučaju kad se vrši pripajanje ili odvajanje čestica bez relativne brzine jednačina kretanja osnovnog tela ima oblik jednačine kretanja sa stalnom masom, međutim, pri tome treba imati u vidu da je ovde masa funkcija vremena.

24.4. Problem rakete

Kao primer kretanja sa promenljivom masom uzmimo *problem rakete*, koji se naziva i *problem Ciolkovskog*. Neka se raketa izbacila vertikalno uvis sa površine Zemlje (sl. 24.3) sa početnom brzinom v_0 i neka se po poznatom zakonu izmene mase $m = m_0 f(t)$ iz nje izbacuju gasovi sa stalnom relativnom brzinom u_0' uperenom nadole. Pretpostavimo da se kretanje rakete vrši u blizini Zemljine površine, tako da možemo smatrati da je sila Zemljine teže mg stalna i uzmimo da se može zanemariti otpor vazduha. Ako pravac kretanja rakete uzmemo za X osu, a njen početni položaj za koordinatni početak, jednačina kretanja rakete kao čestice prema jednačini Meščerskog (24.17) ima oblik

$$m \frac{dv}{dt} = mg + \frac{dm}{dt} u_0'. \quad (24.24)$$

a odgovarajuća skalarna jednačina, koja odgovara X osi, glasi

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} u_0' \quad (24.25)$$

Odavde imamo

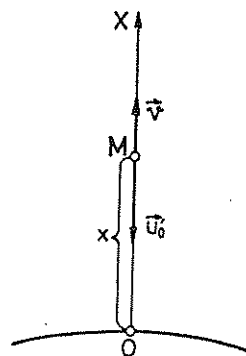
$$\frac{dv}{dt} = -g - u_0' \frac{d \ln m}{dt},$$

pa za brzinu rakete dobijamo

$$v = -gt - u_0' \ln m + C \quad (24.26)$$

Konstantu C određujemo iz početnih uslova da za $t=0$ bude $v=v_0$ i $m=m_0$, odakle nalazimo

$$C = v_0 + u_0' \ln m_0,$$



Sl. 24.3

pa prethodni obrazac dobija oblik

$$v = v_0 - gt + u_0' \ln \frac{m_0}{m} \quad (24.27)$$

Ovaj obrazac određuje brzinu rakete kao funkciju vremena. Odavde vidimo da je brzina rakete srazmerna relativnoj brzini izbacivanja gasova i zavisi samo od odnosa masa u početnom i posmatranom trenutku, a ne i od zakona promene mase.

Ponovnom integracijom, imajući u vidu da je za $t=0$ i $x=0$, dobijamo

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + u_0' \int_0^t \ln \frac{m_0}{m(t)} dt \quad (24.28)$$

Time smo dobili pređeni put rakete kao funkciju vremena, tj. konačnu jednačinu njenog kretanja. Pošto ovde izraz $\ln \frac{m_0}{m}(t)$ treba integraliti po vremenu, pređeni put rakete takođe je srazmeran relativnoj brzini gasova, ali zavisi od zakona promene mase.

Neka masa rakete opada eksponencijalno po zakonu

$$m = m_0 e^{-\alpha t} \quad (24.29)$$

Tada je

$$\ln \frac{m_0}{m} = \ln e^{\alpha t} = \alpha t,$$

pa gornji integral ima vrednost

$$\int_0^t \ln \frac{m_0}{m} dt = \int_0^t \alpha t dt = \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

te dobijamo

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} u_0' \alpha t^2,$$

tj.

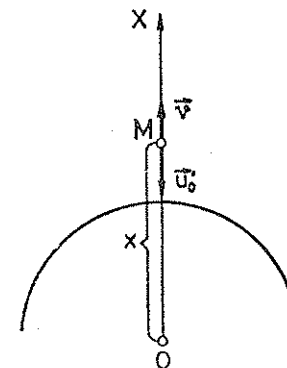
$$x = v_0 t + \frac{1}{2} (\alpha u_0' - g) t^2 \quad (24.30)$$

Odavde vidimo da je pri navedenom zakonu promene mase kretanje rakete jednako ubrzano ako je $\alpha u_0' > g$, jednako usporeno ako je $\alpha u_0' < g$, a uniformno ako je $\alpha u_0' = g$. Pošto je prema obrascu (24.29) $\frac{dm}{dt} = -\alpha m$, u prvom slučaju ubrzavanje rakete biće utoliko veće ukoliko je veće $\alpha u_0'$, tj. ukoliko je veća relativna brzina izbacivanja gasova i relativna promena njihove mase po jedinici vremena.

Svi navedeni zaključci važe pod pretpostavkom da se kretanje rakete vrši u blizini Zemljine površine i da se otpor vazduha može zanemariti. U opštem slučaju (sl. 24.4) silu Zemljine teže mg treba zameniti Newton-ovom silom gravitacije $-G \frac{mM}{r^2}$, gde je M masa

Zemlje, i uzeti u obzir otpornu silu vazduha, koja je približno oblika $-k v^2 \frac{v}{v}$, gde k zavisi od gustine vazduha, dakle od x . Tada umesto jednačine (24.24) imamo

$$m \frac{dv}{dt} = -G \frac{mM}{r^2} r_0 - k v^2 \frac{v}{v} + \frac{dm}{dt} u_0', \quad (24.31)$$



Sl. 24.4

a odgovarajuća skalarna jednačina glasi

$$m \frac{dv}{dt} = -G \frac{mM}{x^2} - k v^2 - \frac{dm}{dt} u_0'. \quad (24.32)$$

Ova jednačina rešava se u principu na sličan način kao u prethodnom slučaju, međutim njeno rešenje ne može se izraziti pomoću elementarnih funkcija i račun se može sprovesti samo aproksimativno, odnosno numerički pomoću računskih mašina.

Glava IX

OPŠTE JEDNAČINE MEHANIKE KONTINUUMA

25. OSNOVNE IDEJE MEHANIKE KONTINUUMA

25.1. Metod proučavanja kretanja deformabilnih tela

Pri dosadašnjem proučavanju kretanja sistema čestica imali smo samo takve slučajeve gde smo tačno poznavali sile koje dejstvuju na čestice i početne položaje i brzine svih čestica. U slučaju krutog tela, kada su međusobna rastojanja između čestica stalna, nismo se morali baviti proučavanjem kretanja svih pojedinačnih čestica, već samo proučavanjem kretanja krutog tela kao celine, a u tu svrhu bilo nam je potrebno da poznamo sile koje dejstvuju na kruto telo i njegovo početno kinematičko stanje. Pri tome, mada broj čestica krutog tela može biti proizvoljno veliki, broj stepeni slobode slobodnog krutog tela je uvek šest, a u slučaju izvesnog ograničenja slobode kretanja još je manji. Međutim, idealno kruta tela u prirodi ne postoje, sva realna tela mogu se pod dejstvom sila više ili manje deformisati, tj. promeniti svoj oblik i zapreminu. Ukoliko je promena oblika i zapremine zanemarljiva, takva tela možemo smatrati krutim telima i za proučavanje njihovog kretanja možemo primeniti ranije opisane metode za kruto telo. U protivnom slučaju tela ne možemo smatrati krutim i takva tela nazivaju se *deformabilna tela*. Pri tome i jedno isto telo pod izvesnim uslovima može se ponašati kao približno kruto, a pod drugim uslovima kao deformabilno.

Kod deformabilnih tela rastojanja između pojedinačnih čestica menjaju se u toku vremena, te je pri vrlo velikom broju čestica i broj stepeni slobode veoma veliki. Npr. jedan molgram tela ima oko $6 \cdot 10^{23}$ molekula, te je broj stepeni slobode oko $3 \cdot 6 \cdot 10^{23}$, tj. $1,8 \cdot 10^{24}$. Stoga je proučavanje kretanja deformabilnih tela mnogo složenije nego u ranijim slučajevima. Ako hoćemo da primenimo metode koji se upotrebljavaju za sisteme čestica, moramo posmatrati kretanja svih pojedinačnih čestica deformabilnih tela. Tada je za rešavanje problema kretanja neophodno poznavati sve sile koje dejstvuju na čestice i početne položaje i brzine svih čestica. Na taj način pri ovakvom proučavanju kretanja deformabilnih tela problem se svodi na proučavanje kretanja njihovih čestica.

Međutim, ovakav način proučavanja kretanja deformabilnih tela nailazi na nesavladljive teškoće, kako principijelne tako i praktične. Pre svega, mi nemamo nikakvih mogućnosti da odredimo početne položaje i brzine pojedinačnih čestica realnih tela, a sem toga još ni do danas ne znamo potpuno prirodu sila koje dejstvuju između elementarnih čestica. Čak i kada bismo znali tačno prirodu ovih sila i početne položaje i brzine čestica, ovaj metod bi

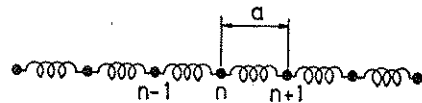
bio veoma komplikovan i praktično neizvodljiv zbog ogromnog broja čestica. Stoga se mora mo zadovoljiti izvesnim *aproksimativnim metodom*, koji bi se pri makrofizičkom posmatranju kretanja deformabilnih tela pokazao zadovoljavajućim. Takav metod sastoji se u tome da se umesto čestica posmatraju *vrlo mali delovi tela i to takvi koji su još dovoljno veliki u odnosu na rastojanja između susednih čestica*. Ovakvi vrlo mali delovi tela zauzimaju vrlo male elemente zapremine, za koje možemo reći da su beskonačno mali u fizičkom, a ne u matematičkom smislu.

Pri izloženom načinu posmatranja deformabilnih tela svaki ovakav element zapremine sadrži vrlo veliki broj čestica. Stoga u prvoj aproksimaciji možemo uzeti da je *u svakom ovom elementu zapremine materija raspoređena neprekidno* i u tom smislu se govori o *neprekidnoj sredini — kontinuumu*, a mehanika deformabilnih tela postaje *mehanika kontinuumna*. Ovaj prelaz sa diskontinuum na kontinuum odgovara prelazu sa veoma velikog na beskonačno veliki broj čestica, te i broj stepeni slobode postaje beskonačno veliki. Tada čestice ne možemo više numerisati indeksom, već prostornim koordinatama koje se menjaju kontinuirano, čime pored vremena uvodimo i prostorne koordinate kao nezavisno promenljive.

Na ovaj način izbegavaju se sile koje deluju na pojedinačne čestice kao i početna kinematička stanja svih čestica. Umesto sila koje deluju na čestice uvode se *makrofizičke sile* koje deluju na uočene elemente tela, pri čemu postoje dve vrste ovakvih sila: *zapreminske sile i površinske sile*. Zapreminske sile deluju podjednako na sve čestice u unutrašnjosti uočenog elementa zapremine i srazmerne su masi tog elementa zapremine; primer takve sile je sila Zemljine teže. Površinske sile deluju samo na one čestice koje se nalaze u blizini površine koja opkoljava uočeni element zapremine i one potiču od dejstva čestica iz susednih elemenata zapremine, kao na pr. sila pritiska. Umesto početnih kinematičkih stanja raspored položaja i brzina svih čestica u početnom trenutku, a granični uslovi karakterišu kinematičko stanje čestica duž granice posmatranog tela. Pored toga, ovim metodom proučavanja kretanja deformabilnih tela, koji se zasniva na prelazu na kontinuum, omogućena je i *primena infinitezimalnog računa*, što znatno olakšava analizu kretanja deformabilnih tela.

25.2. Prelaz sa diskontinuum na kontinuum

Pošto se mehanika kontinuum zasniva na prelazu sa diskontinuum na kontinuum, pokažimo na jednom primeru kako se vrši takav prelaz. Posmatrajmo niz malih kuglica poredanih u jednom pravcu na jednakim vrlo malim rastojanjima i uzajamno spojenih pomoću malih elastičnih opruga (sl. 25.1) i uzmimo taj pravac za X osu. Ako prva kuglica pod uti-



Sl. 25.1

cajem izvesne spoljne sile bude pomerena iz svog ravnotežnog položaja u tom pravcu, taj poremećaj će se posredstvom elastičnih opruga preneti i na ostale kuglice i one će sve početi da osciluju longitudinalno oko svojih ravnotežnih položaja. Sile koje izazivaju ove oscilacije su elastične prirode i iskustvo pokazuje da su one srazmerne promenama dužina spiralnih opruga, tj. promenama međusobnih rastojanja kuglica. Ako sa u_i označimo elongaciju i -te kuglice, osnovna jednačina dinamike za n -tu kuglicu glasi

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1}). \quad (25.1)$$

Označavajući sa a rastojanje između dveju uzastopnih kuglica i deleći gornju jednačinu sa a^2 , dobijenu jednačinu možemo napisati u obliku

$$m \frac{d^2 u_n}{a^2 dt^2} = k \frac{u_{n+1} - u_n}{a} - k \frac{u_n - u_{n-1}}{a}. \quad (25.2)$$

Pretpostavimo da je a vrlo malo u odnosu na dužinu tog niza kuglica. Ako položaj n -te kuglice na X osi označimo sa x , možemo a u prvoj aproksimaciji smatrati diferencijalom dx , što je ekvivalentno aproksimaciji diskretnog niza kuglica kontinuiranim nizom. U tom aproksimativnom prelazu sa diskontinuum na kontinuum imamo

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{a} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x, \quad \frac{u_n - u_{n-1}}{a} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x-dx} \quad (25.3)$$

kao i

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{a} - \frac{u_n - u_{n-1}}{a} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x-dx} \approx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x \quad (25.4)$$

a pored toga na određenom mestu x je

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_x. \quad (25.5)$$

Tada gornja jednačina (25.2) dobija oblik

$$\frac{m}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_x = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x,$$

a izostavljajući indeks x , ovu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{ka^2}{m}. \quad (25.6)$$

Na taj način dobili smo parcijalnu diferencijalnu jednačinu, koja određuje elongaciju u kao funkciju položaja x i vremena t .

26. KINEMATIKA KONTINUUMA

26.1. Dva načina proučavanja

Pri proučavanju kretanja deformabilnih tela, koja ćemo u smislu izloženih ideja aproksimirati kontinuiranom sredinom, može se postupiti na dva načina. Prvi od njih sastoji se u tome što se individualizacija, označavanje delića kontinuum vrši *zađavanjem početnih koordinata uočenog delića u nekom trenutku t_0* . Ako sa (a, b, c) označimo početne koordinate nekog posmatranog delića, njegove konačne jednačine kretanja imaju oblik

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t) \quad (26.1)$$

Ovde se promenljive a, b, c , po kojima se delići međusobno razlikuju, mogu menjati kontinuirano, te igraju ulogu nezavisno promenljivih, kojih sad ukupno ima četiri. Ako su a, b, c , fiksirani, gornje funkcije daju nam zakon kretanja jednog fiksiranog delića kontinuum u toku vremena. Ako pak fiksiramo t , ove funkcije daju nam raspodelu delića kontinuum u prostoru u uočenom trenutku. Stoga ove jednačine možemo smatrati *zakonom kretanja kontinuum* u kinematičkom smislu reći.

Ovaj metod, koji pokazuje neposrednu analogiju sa mehanikom sistema, naziva se *Lagrange-ev ili supstancijalni metod*, a same promenljive a, b, c *Lagrange-ove promenljive*. Ako još posmatramo elementarno pomeranje uočenog delića u nekom malom intervalu vremena $t-t_0$, koje označimo sa u , njegove komponente možemo takođe izraziti pomoću navedenih promenljivih

$$u_i = u_i(a, b, c, t) \quad (i=1, 2, 3), \quad (26.2)$$

čime je određeno tzv. polje elementarnih pomeranja. Pri tome ćemo pretpostaviti da su sve navedene funkcije neprekidne i da imaju neprekidne parcijalne izvode po svim argumentima.

Drugi način proučavanja kretanja deformabilnih tela bazira na tome da se individualizacija delića kontinuuma vrši *zadavanjem prostornih koordinata tačke u kojoj se uočeni delić nalazi u datom trenutku*. Drugim rečima, ovde nas ne interesuje praćenje kretanja pojedinačnih delića kontinuuma, već šta se dešava u datoj geometrijskoj tački u toku vremena. Posmatramo li opet elementarno pomeranje u delića koji se u trenutku t nalazi u tački (x, y, z) , njegove komponente mogu se izraziti u obliku

$$u_i = u_i(x, y, z, t) \quad (i=1, 2, 3), \quad (26.3)$$

a komponente brzine istog delića dobićemo diferenciranjem gornjih funkcija po vremenu

$$v_i = v_i(x, y, z, t) \quad (i=1, 2, 3) \quad (26.4)$$

Ovde takođe imamo četiri nezavisno promenljive, ali u gornjim jednačinama x, y, z predstavljaju *prostorne koordinate i igraju ulogu nezavisno promenljivih, dok su u prethodnom metodi x, y, z predstavljali koordinate delića i bile nepoznate funkcije*. Pri fiksiranim vrednostima x, y, z gornje funkcije određuju kako se u toku vremena menja elementarno pomeranje odnosno brzina raznih delića koji jedan za drugim dolaze u uočenu tačku prostora. Ako pak fiksiramo t , ove funkcije će određivati raspodelu elementarnih pomeranja odnosno brzina raznih delića u prostoru u uočenom trenutku.

Ovaj drugi metod, koji je od većeg praktičnog interesa, naziva se *Euler-ov ili lokalni metod*, a same promenljive x, y, z *Euler-ove promenljive*. Pri tome je za rešavanje problema kretanja fluida, kad se za konačni interval vremena izvrši konačno pomeranje masa, dovoljno naći samo polje brzina (26.4), dok je za probleme kretanja elastičnih tela važno znati polje elementarnih pomeranja.

Prelaz sa jednog metoda na drugi

Ako je zakon kretanja kontinuuma dat u Lagrange-evom vidu (26.1), rešavanjem ovog sistema jednačina po promenljivima a, b, c dobićemo jednačine oblika

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t), \quad (26.5)$$

čime smo prešli na Euler-ove promenljive. Pri fiksiranim x, y, z ove jednačine određuju one deliće kontinuuma (a, b, c) koje u raznim trenucima prolaze kroz datu tačku prostora. Stavljajući ove funkcije umesto a, b, c u jednačine (26.2), nalazimo i elementarna pomeranja u funkciji Euler-ovih promenljivih

$$u_i = u_i[a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), t], \quad (26.6)$$

a njihovim diferenciranjem po vremenu i brzine delića kontinuuma, tj. funkcije (26.4).

Ako je pak zakon kretanja kontinuuma dat u Euler-ovom obliku (26.4), da bismo prešli na Lagrange-ove promenljive, napišimo ove jednačine u obliku

$$\frac{dx}{dt} = v_1(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_2(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_3(x, y, z, t). \quad (26.7)$$

Ove jednačine možemo smatrati kao sistem od triju simultanih običnih diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama x, y i z . Rešavajući ovaj sistem, dobićemo ove veličine kao funkcije od t i triju integracionih konstanti

$$x = x(t, c_1, c_2, c_3), \quad y = y(t, c_1, c_2, c_3), \quad z = z(t, c_1, c_2, c_3), \quad (26.8)$$

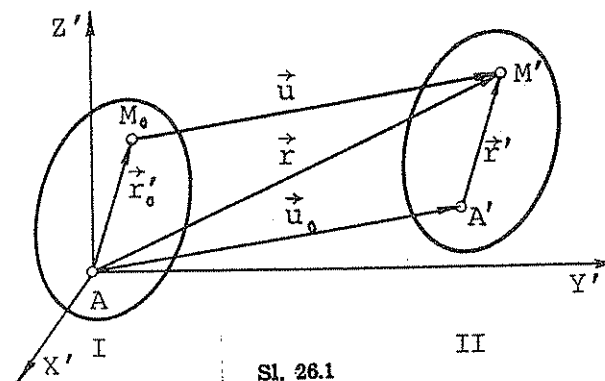
pri čemu su ove konstante određene vrednostima (x, y, z) u nekom trenutku t_0 , tj. Lagrange-evim promenljivima a, b, c . Na taj način dobijamo jednačine oblika (26.1), posle čega možemo izraziti i elementarna pomeranja u funkciji ovih promenljivih.

Sem navedenih veličina, u daljem izlaganju imaćemo posla i sa drugim, kao što su na pr. pritisak ili temperatura, koje možemo izraziti bilo pomoću Lagrange-evih bilo pomoću Euler-ovih promenljivih.

26.2. Lagrange-ev prilaz. Polje elementarnih pomeranja

U kinematici kontinuuma javlja se, sem translacije i rotacije, kao bitna nova forma kretanja — *deformacija sredine*. Da bismo je matematički opisali, posmatrajmo neki delić kontinuuma (sl. 26.1) i neka se on u trenutku t_0 nalazi u položaju I, a u trenutku t u položaju II. Neka se pri tome tačka A , koju smo izabrali za koordinatni početak pomoćnog koordinatnog sistema, pomeri za $u_0 = AA'$, a ma koja tačka M_0 u njenoj okolini, čiji je relativni vektor položaja r_0' u odnosu na A , neka se pomeri za $u = M_0M'$. Pri tome ova elementarna pomeranja u nekom malom ali konačnom intervalu vremena $t-t_0$ mogu biti kako beskonačno mala (kod elastičnih tela) tako i konačna (kod fluida). Označimo ovde radi konciznijeg pisanja, koordinate tačke M' sa x_1 , a njene početne koordinate — koordinate tačke M_0 sa a_i ($i=1, 2, 3$). Napišimo sad jednačine (26.1) u vektorskom obliku

$$r = r(a_1, a_2, a_3, t) \quad (26.9)$$



Sl. 26.1

i ispitajmo kako zavise koordinate x_1 tačke M' u trenutku t od njenih početnih a_i . Kao što je poznato iz matematike, ako je neka funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna u tački $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i ako znamo njenu vrednost i vrednost svih njenih parcijalnih izvoda u toj tački, *Taylor-ov red* nam omogućava da nademo vrednost ove funkcije u bilo kojoj bliskoj tački $(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n)$ u vidu beskonačnog stepenog reda po veličinama $h_1, h_2, \dots, h_n$

$$f_1(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h_i h_k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 + \dots,$$

gde su indeksom nula označene vrednosti ovih parcijalnih izvoda u tački $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ako ovaj obrazac primenimo na našu vektorsku funkciju $\mathbf{r}(a_1, a_2, a_3)$ za fiksirano t i razvijemo je u Taylor-ov red u tački $(0, 0, 0)$, zaustavljajući se na drugom članu, dobićemo

$$\mathbf{r}(a_1, a_2, a_3) = \mathbf{r}(0, 0, 0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} \right)_0 a_i + \dots,$$

tj.

$$\mathbf{r}(a_1, a_2, a_3) \approx \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} \right)_0 a_i. \quad (26.10)$$

Razlika vektora $\mathbf{r} - \mathbf{u}_0 = \mathbf{r}'$ karakteriše raspodelu čestica kontinuuma oko uočene tačke posle deformacije i ona je jednaka

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} \right)_0 a_i. \quad (26.11)$$

Deformacije kod kojih se pri razvijanju u Taylor-ov red možemo zaustaviti na linearnim članovima a_i nazivaju se *linearne deformacije*.

Potražimo sad elementarno pomeranje tačke M_0 za vreme Δt , tj. vektor $\mathbf{u} = M_0 M'$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0' = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} \right)_0 a_i - \mathbf{r}_0'$$

a otuda

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} \right)_0 a_i - \mathbf{r}_0' \quad (26.12)$$

Pošto je prema slici $\mathbf{r}_0' + \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{r}'$, ovu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0' = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_i} \right)_0 a_i - \mathbf{r}_0', \quad (26.13)$$

čime je određena promena vektora $\mathbf{r}_0' = A M_0$ u toku vremena $t - t_0$. Odgovarajuće skalarne jednačine glase, imajući u vidu da vektor $\mathbf{r}_0'$ ima komponente (a_1, a_2, a_3)

$$\Delta u_1 = \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} \right)_0 - 1 \right] a_1 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_2} \right)_0 a_2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_3} \right)_0 a_3$$

$$\Delta u_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_1} \right)_0 a_1 + \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial a_2} \right)_0 - 1 \right] a_2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_3} \right)_0 a_3$$

$$\Delta u_3 = \left(\frac{\partial x_3}{\partial a_1} \right)_0 a_1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial a_2} \right)_0 a_2 + \left[\left(\frac{\partial x_3}{\partial a_3} \right)_0 - 1 \right] a_3,$$

a uvodeći oznake

$$\varepsilon_{ik} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \right)_0 - \delta_{ik}, \quad (26.14)$$

gde je δ_{ik} Kronecker-ov simbol, prethodne jednačine možemo napisati u konciznijem obliku

$$\Delta u_i = u_i - u_{0i} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} a_k \quad (i=1, 2, 3). \quad (26.15)$$

Odatle vidimo da su komponente vektora *relativnog elementarnog pomeranja* tačke M_0 u odnosu na translacionu komponentu, odnosno promene vektora $\mathbf{r}_0' = A M_0$ u toku odgovarajućeg vremena $t - t_0$, *linearne homogene funkcije komponenta početnog vektora položaja ove tačke*. Stoga ove jednačine možemo prema definiciji pojma tenzora, koju smo naveli i u odeljku o tenzoru inercije [obraci (20.48)–(20.51)], napisati i u simboličkom obliku

$$\Delta \mathbf{u} = \mathcal{G} \cdot \mathbf{r}_0', \quad (26.16)$$

gde je $\mathcal{G}$ tenzor određen matricom svojih koeficijenata

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (26.17)$$

To je tzv. *tenzor elementarnog pomeranja*, čije su komponente definisane obrascem (26.14).

26.3. Osnovna Helmholtz-ova teorema

U opštem slučaju komponente tenzora $\mathcal{G}$, tj. veličine (26.14) mogu biti kako konačne tako i beskonačno male. U daljem izlaganju ograničićemo se na *beskonačno male deformacije*, pod kojima ćemo podrazumevati takve pri kojima su *sve komponente* *tenzora elementarnog pomeranja beskonačno male veličine prvog reda u odnosu na konačna pomeranja*. Razložimo ovaj tenzor na antisimetričan i simetričan deo

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ki}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ki}) = \varphi_{ik} + c_{ik} \quad (26.18)$$

gde smo prvi član označili sa φ_{ik} , a drugi sa c_{ik} . Time se vektor relativnog elementarnog pomeranja takođe razlaže na dva dela što, možemo napisati simbolički u obliku

$$\Delta \mathbf{u} = \mathcal{G}^{(a)} \cdot \mathbf{r}_0' + \mathcal{G}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_0' \quad (26.19)$$

Antisimetrični tenzor $\mathcal{G}^{(a)}$, zbog uslova $\varphi_{ik} = -\varphi_{ki}$, ima samo tri nezavisne komponente, a nule na glavnoj dijagonali, dok simetrični tenzor $\mathcal{G}^{(s)}$, zbog $c_{ik} = c_{ki}$, ima šest nezavisnih komponenti.

Relacije (26.15) tada dobijaju vid

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^3 \varphi_{ik} a_k + \sum_{k=1}^3 c_{ik} a_k$$

i zadržimo se na delu relativnog pomeranja Δu_i koji potiče od antisimetričnog tenzora sa komponentama φ_{ik}

$$\Delta u_i^{(a)} = \sum_{k=1}^3 \varphi_{ik} a_k \quad (26.20)$$

U eksplicitnom obliku ove jednačine glase

$$\Delta u_1^{(a)} = 0 + \varphi_{12} a_2 + \varphi_{13} a_3$$

$$\Delta u_2^{(a)} = \varphi_{21} a_1 + 0 + \varphi_{23} a_3$$

$$\Delta u_3^{(a)} = \varphi_{31} a_1 + \varphi_{32} a_2 + 0,$$

a ako uvedemo oznake

$$\Delta a_1 = -\varphi_{23}, \quad \Delta a_2 = -\varphi_{31}, \quad \Delta a_3 = -\varphi_{12} \quad (26.21)$$

gornje relacije dobijaju vid

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_1^{(a)} &= \Delta \alpha_2 a_3 - \Delta \alpha_3 a_2 \\ \Delta u_2^{(a)} &= \Delta \alpha_3 a_1 - \Delta \alpha_1 a_3 \\ \Delta u_3^{(a)} &= \Delta \alpha_1 a_2 - \Delta \alpha_2 a_1 \end{aligned} \right\} \quad (26.22)$$

Ove veličine (26.21) predstavljaju komponente vektora dualnog tenzora $\mathcal{G}^{(a)}$ sa komponentama φ_{ik} , a pomoću njih jednačine (26.22) možemo napisati i u obliku vektorskog proizvoda

$$\Delta \mathbf{u}^{(a)} = \vec{\Delta \alpha} \times \mathbf{r}_0' \quad (26.23)$$

Ovaj izraz prema obrascu (19.24) iz kinematike krutog tela predstavlja elementarno pomeranje tačke M_0 pri rotaciji krutog tela za ugao $\Delta \alpha$, oko ose određene pravcem vektora $\vec{\Delta \alpha}$. Odavde vidimo da antisimetrični deo tenzora ε_{ik} određuje beskonačno malu rotaciju posmatranog delića kontinuuma kao krutog tela. Tada relacije (26.15), na osnovu obrazaca (26.18) i (26.23), možemo napisati u obliku

$$u_i = u_{0i} + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} a_k = u_{0i} + \sum_{k=1}^3 \varphi_{ik} a_k + \sum_{k=1}^3 e_{ik} a_k,$$

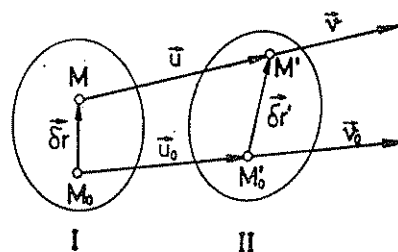
odnosno

$$u_i = u_{0i} + (\vec{\Delta \alpha} \times \mathbf{r}_0')_i + \sum_{k=1}^3 e_{ik} a_k \quad (26.24)$$

Prema tome, elementarno pomeranje ma koje tačke deformabilne sredine može se razložiti na translaciju, rotaciju i čistu deformaciju. Ovaj stav poznat je pod imenom osnovna Helmholtz-ova teorema.

26.4. Euler-ov prilaz. Tenzor deformacije

Proučimo sad detaljnije onaj deo elementarnih pomeranja koji potiče od čiste deformacije i izrazimo ga u pogodnijim i uobičajenim Euler-ovim promenljivama. U tom cilju posmatrajmo opet neki delić kontinuuma (sl. 26.2) i neka se on u trenutku t nalazi u položaju I,



Sl. 26.2

a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju II, pa ispitajmo kinematičko stanje kontinuuma u neposrednoj okolini neke tačke M_0 . Neka je $\mathbf{u}$, kao i ranije, odgovarajuće elementarno pomeranje neke vrlo bliske tačke M , čiji relativni vektor položaja u odnosu na M_0 je $\delta \mathbf{r}$. Prema malo pre dokazanoj osnovnoj Helmholtz-ovoj teoremi (26.24) elementarno pomeranje tačke M može se razložiti na translaciju, rotaciju i čistu deformaciju

$$\mathbf{u} = \mathbf{MM}' = (\Delta \mathbf{r})_{\text{trans}} + (\Delta \mathbf{r})_{\text{rot}} + (\Delta \mathbf{r})_{\text{def}} \quad (26.25)$$

Ovde je $(\Delta \mathbf{r})_{\text{trans}}$ elementarno pomeranje tačke M_0 , a $(\Delta \mathbf{r})_{\text{rot}}$ možemo izraziti prema obrascu (19.24)

$$(\Delta \mathbf{r})_{\text{trans}} = \mathbf{u}_0, \quad (\Delta \mathbf{r})_{\text{rot}} = \vec{\Delta \alpha} \times \delta \mathbf{r},$$

tako da gornji obrazac možemo napisati u obliku

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \vec{\Delta \alpha} \times \delta \mathbf{r} + (\Delta \mathbf{r})_{\text{def}} \quad (26.26)$$

Ispitajmo sad kako ovaj deo elementarnog pomeranja, koji zavisi od čiste deformacije i koji označimo sa $\mathbf{u}^{(d)}$, zavisi od položaja tačke M , tj. od njenog relativnog vektora položaja $\delta \mathbf{r}$. Iz gornjeg obrasca imamo

$$\mathbf{u}^{(d)} = (\Delta \mathbf{r})_{\text{def}} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \vec{\Delta \alpha} \times \delta \mathbf{r} \quad (26.27)$$

Pošto je tačka M vrlo blizu tački M_0 , prvi član predstavlja elementarnu promenu vektora $\mathbf{u}$ kad se iz tačke M_0 pomerimo za $\delta \mathbf{r}$, te je

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \delta \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \delta z = \left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u}$$

Operator u zagradi jednak je skalarnom proizvodu vektora $\delta \mathbf{r}$ i Hamilton-ovog operatora ∇ , pa imamo

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (26.28)$$

Drugi član, koji karakteriše rotaciju kontinuuma, možemo takođe izraziti pomoću elementarnog pomeranja $\mathbf{u}$. Pošto prema načinu uvođenja $(\Delta \mathbf{r})_{\text{def}}$ ne zavisi od rotacije delića, relaciju (19.41) iz kinematike krutog tela možemo primeniti i na ukupnu brzinu delića

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2 \vec{\omega}, \quad (26.29)$$

a množenjem sa Δt dobijamo, imajući u vidu da je $\mathbf{v} \Delta t \approx \mathbf{u}$, a $\vec{\omega} \Delta t \approx \vec{\Delta \alpha}$

$$\text{rot } \mathbf{u} = 2 \vec{\Delta \alpha} \quad (26.30)$$

Ova relacija ekvivalentna je obrascu (26.23), i na osnovu nje drugi član se može napisati u obliku

$$\delta \mathbf{r} \times \vec{\Delta \alpha} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{u}),$$

pa zamenom nadenih izraza u obrascu (26.27) dobijamo

$$\mathbf{u}^{(d)} = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{u} \quad (26.31)$$

Ovaj obrazac određuje deformacioni deo elementarnog pomeranja $\mathbf{u}^{(d)}$ kao funkciju od relativnog vektora položaja $\delta \mathbf{r}$ tačke M . Da bismo jasnije videli karakter ove veze, napišimo i odgovarajuće skalarne jednačine. Prva od njih glasi

$$\begin{aligned} u_x^{(d)} &= \left(\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x + \frac{1}{2} \delta y (\text{rot } \mathbf{u})_z - \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta z (\text{rot } \mathbf{u})_y = \delta x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \delta y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \delta z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta y \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \delta z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

pa posle grupisanja dobijamo $u_x^{(d)}$, a na sličan način i $u_y^{(d)}$ kao i $u_z^{(d)}$ u obliku

$$\left. \begin{aligned} u_x^{(d)} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \delta z \\ u_y^{(d)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \delta x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \delta z \\ u_z^{(d)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \delta y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \delta z \end{aligned} \right\} \quad (26.32)$$

Označavajući komponente vektora indeksima 1, 2, 3 i uvodeći oznake

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (26.33)$$

ove relacije možemo napisati i u konciznom obliku

$$u_i^{(d)} = \sum_{k=1}^3 e_{ik} \delta x_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (26.34)$$

Prema tome, komponente vektora elementarnog pomeranja tačke M usled čiste deformacije su linearne homogene funkcije komponenta relativnog vektora položaja ove tačke u odnosu na tačku M_0 . Odavde dalje vidimo da kinematičko stanje kontinuuma usled čiste deformacije u okolini neke tačke zavisi ne samo od rastojanja od te tačke već i od pravca u kome se pomeramo iz nje. Ova osobina, kao i osobina izražena relacijama (26.15), karakteristična je za sva deformabilna tela u slučaju linearnih deformacija i ne zavisi od prirode sredine.

Gornje relacije (26.32), možemo takođe izraziti i u simboličkom obliku, uvodeći tenzor sa matricom koeficijenata

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (26.35)$$

i tada ove jednačine dobijaju vid

$$u^{(d)} = \mathcal{D} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (26.36)$$

Ovako uveden tenzor $\mathcal{D}$, koji je ekvivalentan drugom tenzoru (26.19) sa komponentama e_{ik} naziva se *tenzor deformacije* i on karakteriše deformaciju kontinuuma u okolini uočene tačke M_0 , u kojoj treba uzeti gornje parcijalne izvode. Ako znamo ukupna elementarna pomeranja kao funkcije položaja i vremena

$$u_x = u_x(x, y, z, t), \quad u_y = u_y(x, y, z, t), \quad u_z = u_z(x, y, z, t),$$

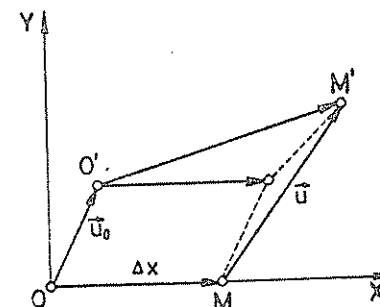
neposredno možemo naći sve komponente ovog tenzora, a tada prema obrascima (26.32) svakom položaju neke okolne tačke M možemo pridružiti komponente elementarnog pomeranja ove tačke usled čiste deformacije.

26.5. Mehanički smisao komponentata e_{ik}

Ispitajmo sad kakav smisao imaju komponente tenzora deformacije u bilo kom pravouglom koordinatnom sistemu. U tom cilju posmatrajmo vektor $\mathbf{OM} = \Delta x \mathbf{e}_1$ dužine Δx u pravcu

X-ose (sl. 26.3) i neka se on za vreme Δt deformiše u vektor $\mathbf{O'M'}$. Promena ovog vektora usled deformacije biće

$$\delta \mathbf{l} = \mathbf{O'M'} - \mathbf{OM},$$



SL. 26.3

a pošto je prema slici $\mathbf{OM} + \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{O'M'}$, gde su $\mathbf{u}_0$ i $\mathbf{u}$ elementarna pomeranja tačaka O i M, gornja promena može se izraziti kao

$$\delta \mathbf{l} = \mathbf{O'M'} - \mathbf{OM} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (26.37)$$

Razvijajući funkciju $u(\Delta x, 0, 0)$ u Taylor-ov red i zanemarujući više članove dobićemo

$$u(\Delta x, 0, 0) = u(0, 0, 0) + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + \dots \approx u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \Delta x,$$

tako da imamo

$$\delta \mathbf{l} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)_0 \Delta x,$$

a ako još vektor elementarnog pomeranja rastavimo na komponente $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i$ gornji izraz dobija oblik

$$\delta \mathbf{l} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_0 \Delta x \mathbf{e}_i \quad (26.38)$$

Transformisani vektor $\mathbf{O'M'}$ prema obrascu (26.37) tada će biti

$$\mathbf{O'M'} = \mathbf{OM} + \delta \mathbf{l} = \Delta x \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_0 \Delta x \mathbf{e}_i,$$

tj., izostavljajući indeks nula

$$\mathbf{O'M'} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Delta x \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \Delta x \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} \Delta x \mathbf{e}_3 \quad (26.39)$$

Pošto posmatramo samo beskonačno male deformacije, komponente tenzora deformacije su beskonačno male, tako da u prvoj aproksimaciji imamo

$$|\mathbf{O'M'}| \approx \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Delta x \quad (26.40)$$

Odgovarajuća relativna promena dužine vektora $\mathbf{OM}$ iznosiće

$$\frac{|\mathbf{O'M'}| - |\mathbf{OM}|}{|\mathbf{OM}|} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

a to je prema šemi (26.35) komponenta e_{11}

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{|\mathbf{O'M'}| - |\mathbf{OM}|}{|\mathbf{OM}|} \quad (26.41)$$

Na sličan način možemo dobiti analoge formule i za slučajeve kad vektor $\mathbf{OM}$ leži u pravcu Y odnosno Z-ose.

Komponente tenzora deformacije na glavnoj dijagonali predstavljaju relativnu linearnu dilataciju (ili kontrakciju) duži postavljenih u pravcu odgovarajućih koordinatnih osa.

Ako zamislimo elementarni paralelepiped konstruisan nad trima takvim dužima duž koordinatnih osa, njegova zapremina pre deformacije biće

$$\Delta V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (26.42)$$

Posle deformacije dužina vektora $\mathbf{O'M'}$, koji ima približno pravac X-ose, prema obrascu (26.41) biće

$$|\mathbf{O'M'}| = e_{11} |\mathbf{OM}| + |\mathbf{OM}| = (1 + e_{11}) \Delta x,$$

a dužine drugih dveju duži duž Y i Z-ose

$$(1 + e_{22}) \Delta y, \quad (1 + e_{33}) \Delta z$$

tako da je zapremina deformisanog paralelepipeda

$$\Delta V = (1 + e_{11}) (1 + e_{22}) (1 + e_{33}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (26.43)$$

Zanemarujući proizvode tenzora deformacije kao beskonačno male veličine višeg reda, imamo

$$\Delta V \approx (1 + e_{11} + e_{22} + e_{33}) \Delta V_0,$$

a otuda

$$e = \sum_{i=1}^3 e_{ii} = \frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta V_0} \quad (26.44)$$

Zbir elemenata na glavnoj dijagonali tenzora deformacije predstavlja relativnu zapreminsku dilataciju paralelepipeda konstruisanog nad koordinatnim osama. To je prva invarijanta tenzora deformacije.

Da bismo dobili i smisao komponenta e_{ik} van glavne dijagonale, posmatrajmo dva vektora $\mathbf{OM}$ i $\mathbf{ON}$ duž X i Y-ose (sl. 26.4). Neka se oni za vreme Δt deformišu u $\mathbf{O'M'}$ odnosno $\mathbf{O'N'}$, gradeći izvesne uglove γ_1 i γ_2 sa prvobitnim pravcima. Ako se zanemari odstupanje tačke M' od XOY ravni, prema slici i obrascu (26.39) imamo

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{(\mathbf{O'M'})_y}{(\mathbf{O'M'})_x} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x} \Delta x}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \Delta x} \quad (26.45)$$

Pošto se ovde radi samo o beskonačno malim deformacijama, ugao iskošenja γ_1 je vrlo mali, tako da možemo približno staviti $\operatorname{tg} \gamma_1 \approx \gamma_1$, a član $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ u imenitelju možemo zanemariti prema jedinici

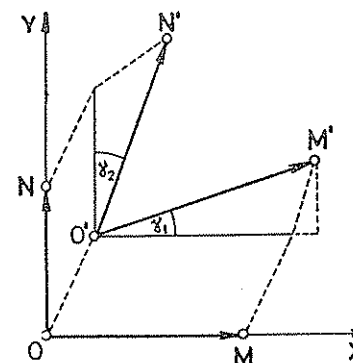
$$\gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (26.46)$$

Na sličan način, posmatrajući deformaciju vektora $\mathbf{ON}$ u vektor $\mathbf{O'N'}$, dolazimo do zaključka da je

$$\gamma_2 \approx \operatorname{tg} \gamma_2 \approx \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (26.47)$$

Njihov zbir tada će biti

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}$$



Sl. 26.4

a to je prema šemi (26.35) upravo dvostruka vrednost komponente e_{12} , dakle

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma \quad (26.48)$$

Istim putem možemo doći do analognih rezultata i za slučajeve kad vektori $\mathbf{OM}$ i $\mathbf{ON}$ leže i duž drugih koordinatnih osa.

Komponente tenzora deformacije van glavne dijagonale predstavljaju polovine ugla iskošenja (promene ugla) između dveju duži postavljenih duž odgovarajućih koordinatnih osa.

26.6. Tenzor brzine deformacije

Elementarno pomeranje ma koje tačke M može se prema obrascu (26.26) napisati u obliku

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \alpha \times \delta \mathbf{r} + \mathbf{u}^{(d)},$$

a njegove komponente, na osnovu relacija (26.34)

$$u_i = u_{0i} + (\Delta \alpha \times \delta \mathbf{r})_i + \sum_{k=1}^3 e_{ik} \delta x_k \quad (26.49)$$

Ako nas interesuje polje brzina, podelimo gornju jednačinu sa Δt i pređimo na granične vrednosti kad $\Delta t \rightarrow 0$, čime dobijamo

$$\mathbf{v}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_i}{\Delta t} = v_{0i} + (\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r})_i + \sum_{k=1}^3 \dot{e}_{ik} \delta x_k \quad (26.50)$$

Ovde smo sa $\dot{e}_{ik}$ označili komponente tenzora koje dobijamo iz tenzora (26.33) ovim graničnim prelazom

$$\dot{e}_{ik} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e_{ik}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{u_i}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{u_k}{\Delta t} \right),$$

tj.

$$\dot{e}_{ik} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (26.51)$$

Dobijeni rezultat (26.50) nam pokazuje da se i brzina ma koje tačke deformabilne sredine može razložiti na članove usled translacije, rotacije i čiste deformacije, pri čemu se za poslednji član, koji označimo sa $\mathbf{v}^{(d)}$, važi

$$\mathbf{v}_1^{(d)} = \sum_{k=1}^3 \dot{e}_{ik} \delta x_k. \quad (26.52)$$

Ove relacije pokazuju da su komponente brzine usled deformacije linearne homogene funkcije komponentata relativnog vektora položaja te tačke, te i njih možemo napisati u simboličkom obliku

$$\mathbf{v} = \hat{\mathcal{D}} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (26.53)$$

gde smo sa $\hat{\mathcal{D}}$ označili tenzor sa komponentama (26.51), tj.

$$\hat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \dot{e}_{11} & \dot{e}_{12} & \dot{e}_{13} \\ \dot{e}_{21} & \dot{e}_{22} & \dot{e}_{23} \\ \dot{e}_{31} & \dot{e}_{32} & \dot{e}_{33} \end{pmatrix} \quad (26.54)$$

i to je tzv. *tenzor brzine deformacije*. Njegove komponente dobijamo neposredno iz šeme (26.35), zamenjujući samo komponente elementarnih pomeranja odgovarajućim komponentama brzine.

Mehanički smisao komponentata ovog tenzora $\hat{\mathcal{D}}$ je analogan smislu komponentata tenzora $\mathcal{D}$, ali obračunatom po jedinici vremena. Tako na pr. prema definiciji tenzora $\dot{e}_{ik}$ imamo

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^3 \dot{e}_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^3 e_{ii}}{\Delta t},$$

pa koristeći obrazac (26.44), dobijamo da je

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^3 \dot{e}_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_0} \frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta t} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad (26.55)$$

tj. zbir elemenata na glavnoj dijagonali tenzora $\hat{\mathcal{D}}$ predstavlja brzinu relativne zapreminske dilatacije po jedinici vremena i jednaka je $\text{div } \mathbf{v}$.

U izvesnim problemima potrebno je preći sa polja elementarnih pomeranja na polja brzina i obrnuto. Iz poznatih beskonačno malih pomeranja u_i u beskonačno malom intervalu vremena dt odgovarajuće brzine dobijamo prostim deljenjem veličina u_i sa dt , a znajući polje brzina v_i u konačnom intervalu vremena možemo dobiti beskonačno mala pomeranja običnim množenjem v_i sa dt . Međutim nalaženje polja elementarnih pomeranja za konačne intervale vremena je složeniji problem i opšta zavisnost između funkcija $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$

i $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ može se uspostaviti polazeći od toga da u_i zavise od t kako direktno tako i preko prostornih koordinata

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_k. \quad (26.56)$$

Ako je dato polje elementarnih pomeranja, odgovarajuće komponente brzina neposredno nalazimo diferenciranjem, a ako je dato polje brzina, problem se svodi na integraciju gornjeg sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina, iz kojih treba naći nepoznate funkcije $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Kod fluida za rešavanje problema obično je dovoljno naći polje brzina, a kod elastičnih tela neophodno je rešiti i ovaj inverzni problem, ali pošto se ovde radi o beskonačno malim pomeranjima, komponente brzine v_i biće takođe beskonačno male, pa se poslednji član u jednačinama (26.56) može zanemariti

$$v_i = \frac{du_i}{dt} \approx \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (26.57)$$

Iz gore izloženoga se može izvući i zaključak o generalisanim koordinatama deformabilnog tela. Naime, prema obrascu (26.49) vidimo da će polje elementarnih pomeranja biti potpuno određeno ako znamo vektor elementarnog pomeranja u_0 neke tačke M_0 , koju možemo nazvati polom, vektor beskonačno male rotacije $\Delta \alpha$ oko ose koja prolazi kroz pol i šest nezavisnih komponentata e_{ik} tenzora deformacije $\mathcal{D}$, koje određuju njegovo stanje deformacije i omogućavaju da za svaku tačku M u okolini pola nađemo odgovarajuća elementarna pomeranja usled čiste deformacije. Stoga skup veličina

$$u_{0i}, (\Delta \alpha)_i, e_{ik} \quad (26.58)$$

možemo smatrati generalisanim koordinatama vrlo malog deformabilnog tela, koje prema tome ima dvanaest stepeni slobode.

27. DINAMIKA KONTINUUMA

27.1. Dve vrste sila

U mehanici sistema posmatrali smo sile koje dejstvuju na pojedinačne čestice sistema i takve sile karakterišu se time da su *koncentrisane* kao konačne sile koje dejstvuju u nekoj geometrijskoj tački. Međutim, u mehanici deformabilnih tela susrećemo se sa drugim tipom sila, ove sile su *rasporedene* po posmatranom telu u tom smislu da dejstvuju u svakom elementu zapremine ili na svakom elementu površi i to tako da kad oni teže nuli i same sile takođe teže nuli. Ako uočimo neki mali delić sredine, koji još sadrži vrlo veliki broj molekula, sve ove sile mogu se podeliti na dve osnovne kategorije: zapreminske i površinske. *Zapreminske sile su one koje dejstvuju na sve čestice delića i srazmerne su masi uočenog elementa zapremine*. Ako sa ΔF označimo rezultantu svih takvih sila koje dejstvuju na element zapremine ΔV , *masena gustina zapreminskih sila u tački M* definiše se kao sila po jedinici mase delića u kojoj se nalazi ova tačka

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta m} = \frac{d\mathbf{F}}{dm}, \quad (27.1)$$

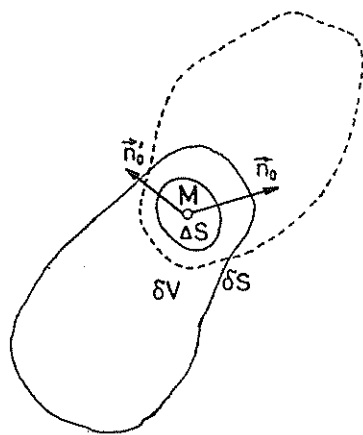
te je ukupna sila na delić u posmatranom elementu zapremine, gde je gustina ρ

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f} dm = \mathbf{f} \rho dV \quad (27.2)$$

Tipičan primer ovakvih sila je sila Zemljine teže i u ovom slučaju sila na neki delić sredine mase m biće $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}_3$, a gustina ove sile $\mathbf{f} = -\mathbf{g}_3$.

Površinske sile su one koje djeluju samo na čestice delića na njegovoj površi i srazmerne su površini uočenog elementa. One su bitne u mehanici deformabilnih tela, potiču od čestica susjednih delića i svojstvene su sredinama čiji molekuli međusobno deluju silama kratkog dometa. Da bismo definisali pojam napona, posmatrajmo neki delić sredine zapremine δV , oivičen površi δS (sl. 27.1) pa uočimo na njoj tačku M i jedan element površi ΔS oko nje. Neka je $\mathbf{n}_0$ jedinični vektor normale na ΔS u tački M, a $\Delta \mathbf{F}$ rezultanta svih površinskih sila, tj. sila uzajamnog dejstva uočenog delića sa susjednim koje djeluju na element površi ΔS ovog delića. Obrazujemo li količnik $\Delta \mathbf{F} / \Delta S$, dobićemo srednju vrednost gustine površinskih sila na delu ΔS . Napon u tački M definiše se tada kao granična vrednost gustine površinskih sila kad $\Delta S \rightarrow 0$ sažimajući se u tačku M pri da toj orijentaciji $\mathbf{n}_0$ ovog elementa površi

$$\mathbf{P}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (27.3)$$



Sl. 27.1

Ako bismo uočili neki drugi delić takav da tačka M leži i na njegovoj graničnoj površi (na slici prikazan tačkastom linijom), ali da je jedinični vektor normale na njoj $\mathbf{n}_0'$, iskustvo pokazuje da bi srednja vrednost gustine površinskih sila $\Delta \mathbf{F} / \Delta S$ u gore opisanom graničnom prelazu u opštem slučaju težila nekoj drugoj graničnoj vrednosti $\mathbf{P}_n'$.

Prema tome, napon zavisi ne samo od položaja tačke M već i od orijentacije uočenog elementa površi, tako da svakom pravcu $\mathbf{n}_0$ odgovara određen vektor napona $\mathbf{P}$, što smo i naznačili indeksom n. Ukupna sila na posmatrani element površi biće tada

$$d\mathbf{F} = \mathbf{P}_n dS \quad (27.4)$$

i ona u opštem slučaju nema pravac normale, već gradi sa njom izvestan ugao. Kao primere ovakvih sila navedimo naponske sile kod elastičnih tela i silu pritiska kod fluida.

Sem toga, sve sile možemo podeliti, kao i u mehanici sistema, na unutrašnje i spoljašnje. Pod prvim silama podrazumevamo takve koje potiču od čestica posmatranog tela ili njegovog dela i one se zbog zakona akcije i reakcije uzajamno poništavaju, ostale sile su spoljašnje. Ukoliko posmatramo površinske sile, sve sile uzajamnog dejstva između susjednih delića su unutrašnje i one pri kretanju tela kao celine ne dolaze do izražaja, međutim pri proučavanju naponskog stanja one su od bitnog značaja.

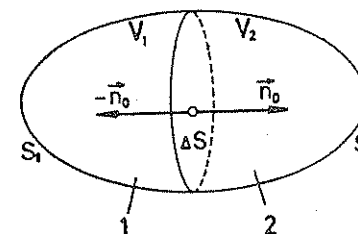
Zadržimo se još na silama unutrašnjih napona. U tom cilju zamislimo izdvojenu iz posmatranog tela neku vrlo malu zapreminu V (sl. 27.2) i podelimo je presekom ΔS na dva dela

zapremina V_1 i V_2 . Ako nas interesuje kretanje elementa 1 zapremine V_1 , na njega pored ostalih djeluje i element 2 preko površi ΔS silom $\mathbf{P}_n \Delta S$. Međutim, prema zakonu akcije i reakcije tada će i element 1 djelovati na element 2 silom $\mathbf{P}_{-n} \Delta S$, jer je sad jedinični vektor spoljne normale elementa 2 na površi ΔS jednak $-\mathbf{n}_0$, i to tako da je

$$\mathbf{P}_{-n} \Delta S = -\mathbf{P}_n \Delta S,$$

odakle proizlazi da je

$$\mathbf{P}_{-n} = -\mathbf{P}_n \quad (27.5)$$



Sl. 27.2

To znači da se u svakoj tački u unutrašnjosti deformabilnog tela javljaju u parovima suprotno usmereni naponi istog intenziteta, kojima djeluju susjedni delići jedan na drugi preko zajedničke granične površi. To stvara pri određenim spoljašnjim silama stanje ravnoteže unutrašnjih naponskih sila. Ukoliko bismo uklonili jedan od ovih delova, na pr. element 2, ovo stanje ravnoteže bilo bi poremećeno i ako želimo da element 1 ostane u prvobitnoj ravnoteži, morali bismo djelovati na njega spoljnom silom $\mathbf{P}_n \Delta S$ na površi ΔS .

27.2. Naponsko stanje. Tenzor napona

Površinske sile unutrašnjih napona stvaraju u unutrašnjosti deformabilnog tela izvesno naponsko stanje, koje je određeno silama u svakoj tački tela koje djeluju na uočeni element površi ΔS kroz tu tačku. Ispitajmo sad kako napon $\mathbf{P}$ u nekoj tački zavisi od orijentacije elementa površi ΔS , tj. od jediničnog vektora njegove spoljne normale $\mathbf{n}_0$. Uočimo neku tačku M (sl. 27.3) i posmatrajmo beskonačno mali element zapremine u obliku tetraedra sa temenom u tački M, čije su tri površi paralelne koordinatnim ravnima. Neka je $\mathbf{P}_n$ napon na površi $dS = ABC$, čiji je jedinični vektor normale $\mathbf{n}_0$ sa kosinusima pravca α, β, γ . Označimo sa $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z$ napone na površima MBC, MAC, i MAB, normalnim na koordinatnim osama i to za orijentacije normale u pozitivnom smeru ovih osa, a sa dS_x, dS_y, dS_z površine navedenih strana ovog tetraedra. One predstavljaju projekcije površine dS na odgovarajuće koordinatne ravni, te iznose

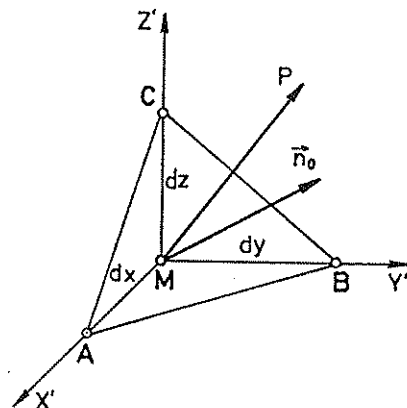
$$\left. \begin{aligned} dS_x &= dS \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_1) = dS \alpha \\ dS_y &= dS \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_2) = dS \beta \\ dS_z &= dS \cos(\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_3) = dS \gamma \end{aligned} \right\} \quad (27.6)$$

Na uočeni element zapremine djeluju tada zapreminska sila $\mathbf{f} \rho dV$ i sledeće površinske sile: na stranu ABC djeluje $\mathbf{P}_n dS$, a na ostale strane $\mathbf{P}_{-x} dS_x, \mathbf{P}_{-y} dS_y$ i $\mathbf{P}_{-z} dS_z$. Prema osnovnoj jednačini dinamike, zbir svih ovih sila mora biti jednak proizvodu mase uočenog delića i njegovog ubrzanja

$$\mathbf{f} \rho dV + \mathbf{P}_n dS + \mathbf{P}_{-x} dS_x + \mathbf{P}_{-y} dS_y + \mathbf{P}_{-z} dS_z = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (27.7)$$

Ovu jednačinu na osnovu obrazaca (27.5) i (27.6) možemo napisati i u obliku

$$f \rho dV + P_n dS - P_x dS \alpha - P_y dS \beta - P_z dS \gamma = \rho dV \cdot \frac{dv}{dt},$$



Sl. 27.3

pri čemu iskustvo pokazuje da su u većini slučajeva gustina zapreminskih sila f i naponi P_n, P_x, P_y, P_z istog reda veličine. Stoga prvi član s leve strane i član s desne strane možemo zanemariti kao beskonačno male veličine višeg reda, pa dobijamo

$$P_n = P_x \alpha + P_y \beta + P_z \gamma \quad (27.8)$$

Ovaj obrazac izražava napon P_n na površi dS u funkciji kosinusa pravca normale, pri čemu P_x, P_y i P_z karakterišu samo naponsko stanje. Da bismo napisali i odgovarajuće skalarne jednačine, označimo sa p_{ik} komponente napona P_i , gde indeks i može biti x, y ili z , tj. stavimo

$$\left. \begin{aligned} P_x &= (p_{11}, p_{12}, p_{13}), & P_y &= (p_{21}, p_{22}, p_{23}) \\ P_z &= (p_{31}, p_{32}, p_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

Tada projektovanjem jednačine (27.8) na koordinatne ose, dolazimo do sledećih relacija

$$\left. \begin{aligned} P_{nx} &= p_{11} \alpha + p_{21} \beta + p_{31} \gamma \\ P_{ny} &= p_{12} \alpha + p_{22} \beta + p_{32} \gamma \\ P_{nz} &= p_{13} \alpha + p_{23} \beta + p_{33} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (27.10)$$

Ove relacije možemo napisati i u konciznom obliku, zamenjujući indekse x, y, z indeksima $1, 2, 3$ i označavajući kosinuse pravca normale sa α_i ($i=1, 2, 3$)

$$P_{ni} = \sum_{k=1}^3 p_{ki} \alpha_k \quad (i=1, 2, 3). \quad (27.11)$$

Prema tome, komponente napona P_n u nekoj tački za ravan određenu jediničnim vektorom n_0 su linearne homogene funkcije komponenta ovog vektora n_0 , tj. kosinusa pravca spoljne normale. Da bismo znali naponsko stanje deformabilnog tela u svakoj njegovoj tački, tj. da bismo mogli odrediti napon P za svaku orijentaciju ravni n_0 , prema gornjim obrascima neophodno je znati tri vektora napona

$$P_x, P_y, P_z$$

ili devet njihovih komponentata

$$p_{ik} \quad (i, k=1, 2, 3)$$

kao funkcije položaja.

Gornje relacije (27.10) na osnovu definicije tenzora možemo napisati i u operatorskom obliku

$$P_n = \mathcal{N} \cdot n_0, \quad (27.12)$$

gde je $\mathcal{N}$ tenzor sa matricom koeficijenata

$$N = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}. \quad (27.13)$$

Ovako definisan tenzor naziva se *tenzor napona* i on u potpunosti određuje naponsko stanje u okolini svake tačke. Naponsko stanje definisano tenzorom napona je bitna karakteristika svake vrste deformabilnog tela i po njemu se jedna sredina razlikuje od druge. Na pr. ako je $p_{ik} = -p \delta_{ik}$, gde je δ_{ik} Kronecker-ov simbol, matrica tenzora napona će imati oblik

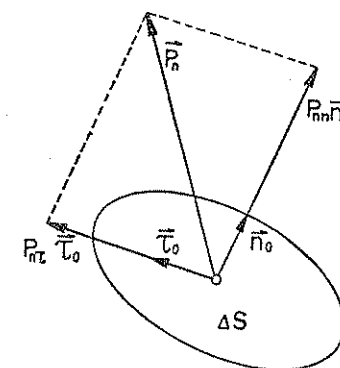
$$N = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$$

pa relacije (27.10) za komponente napona daju

$$P_{nx} = -p \alpha, \quad P_{ny} = -p \beta, \quad P_{nz} = -p \gamma,$$

što možemo napisati i vektorski

$$P = -p n_0 \quad (27.14)$$



Sl. 27.4

U ovom slučaju napon uvek deluje u pravcu normale na površi, što je karakteristika idealnih fluida.

U opštem slučaju napon na nekom elementu površi ΔS (sl. 27.4) može se razložiti na dva komponentna vektora: duž normale n_0 na ΔS i tangente τ_0 u tangentnoj ravni

$$P_n = P_{nn} n_0 + P_{n\tau} \tau_0 \quad (27.15)$$

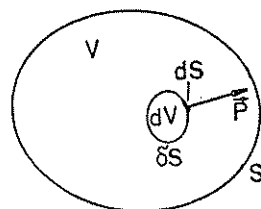
Komponenta u pravcu normale naziva se *normalni napon* i on izaziva zatezanje ili pritisak, a komponenta u pravcu tangente zove se *tangentni napon* i on izaziva smicanje ili klizanje po tangentnoj ravni.

27.3. Opšta jednačina kretanja

Potražimo sad diferencijalnu jednačinu kretanja ma kakve deformabilne sredine, čiji je tenzor napona $\mathcal{N}$. Uočimo neki vrlo mali delić zapremina dV , ograničen površi δS (sl. 27.5) i neka se njegov centar masa u trenutku t kreće brzinom $\mathbf{v}$. Zapreminska sila koja deluje na ovaj delić iznosi $\mathbf{f} \rho dV$, a površinska sila na neki element dS je $\mathbf{P}_n dS$, te je rezultanta svih površinskih sila na ovaj delić $\oint_{\delta S} \mathbf{P}_n dS$. Tada osnovna jednačina dinamike, koju dobijamo

izjednačavanjem proizvoda mase i ubrzanja sa rezultantom svih sila, za posmatrani delić glasi

$$\rho dV \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \rho dV + \oint_{\delta S} \mathbf{P}_n dS. \quad (27.16)$$



SL. 27.5

Napišimo sad ovu jednačinu za svaki delić sredine i saberimo sve tako dobijene jednačine po oblasti V . Na levoj strani i u prvom članu s desne strane dobićemo tada odgovarajuće zapreminske integrale, a u poslednjem članu pri integraciji po svim unutrašnjim graničnim površinama δS pojavljivaće se u parovima članovi $\mathbf{P}_n dS$ i $\mathbf{P}_{-n} dS$, koji se prema obrascu (27.5) potiru. Tako dobijamo

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{f} \rho dV + \oint_S \mathbf{P}_n dS. \quad (27.17)$$

gde se integracija u poslednjem članu vrši samo po spoljnoj površi S . Pri tome se poslednji član može izraziti i pomoću tenzora napona, na osnovu obrasca (27.12)

$$\oint_S \mathbf{P}_n dS = \oint_S \mathcal{N} \cdot \mathbf{n}_0 dS = \oint_S \mathcal{N} \cdot d\mathbf{S}. \quad (27.18)$$

Da bismo odavde dobili traženu diferencijalnu jednačinu kretanja, moramo ovaj površinski integral transformisati u zapreminski. Kao što je poznato (v. na pr. Đ. Mušicki i B. Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, odeljci 4.2 i 4.5), svaki tenzor može se prikazati u dija-dskom obliku

$$\mathcal{G} = \sum_{k=1}^3 \{\mathbf{T}_k, \mathbf{e}_k\} \quad (27.19)$$

i ako komponente vektora $\mathbf{T}_k$ označimo sa T_{ki} ($i=1, 2, 3$), on je potpuno određen matricom

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix},$$

u kojoj elementi k -te kolone predstavljaju komponente vektora $\mathbf{T}_k$. Za tenzore važi *Gauss-ova teorema o pretvaranju površinskih integrala u zapreminske*, analoga Gauss-ovoj teoremi za vektore

$$\oint_S \mathbf{dS} \cdot \mathcal{G} = \int_V (\nabla \cdot \mathcal{G}) dV. \quad (27.20)$$

gde je tzv. divergencija tenzora

$$\nabla \cdot \mathcal{G} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \operatorname{div} \mathbf{T}_k. \quad (27.21)$$

Gauss-ova teorema može se pisati i u ekvivalentnom obliku, uvodeći konjugovani tenzor $\mathcal{G}^*$, koji se dobija iz tenzora $\mathcal{G}$ zamenom komponenta T_{ki} sa T_{ik}

$$\oint_S \mathcal{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathcal{G}^*) dV. \quad (27.22)$$

Da bismo ovu integralnu teoremu primenili na površinski integral (27.18), napišimo konjugovani tenzor napona u dija-dskom obliku

$$\mathcal{N}^* = \{\mathbf{P}_x^*, \mathbf{e}_1\} + \{\mathbf{P}_y^*, \mathbf{e}_2\} + \{\mathbf{P}_z^*, \mathbf{e}_3\}, \quad (27.23)$$

gde smo sa $\mathbf{P}_x^*$, $\mathbf{P}_y^*$ i $\mathbf{P}_z^*$ označili odgovarajuće vektore koji ga određuju. Iz matrice ovog tenzora, koju dobijamo transponovanjem matrice (27.13)

$$\mathbf{N}^* = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

vidimo da su komponente gornjih vektora, koje su jednake elementima odgovarajuće kolone ove matrice

$$\mathbf{P}_x^* = (p_{11}, p_{21}, p_{31}), \quad \mathbf{P}_y^* = (p_{12}, p_{22}, p_{32}), \quad \mathbf{P}_z^* = (p_{13}, p_{23}, p_{33}) \quad (27.24)$$

i one se razlikuju od komponenta vektora (27.9) samo po tome što su elementi p_{ik} zamenjeni sa p_{ki} . Tada površinski integral (27.18) možemo prema Gauss-ovoj teoremi (27.22) neposredno pretvoriti u zapreminski

$$\oint_S \mathcal{N} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathcal{N}^*) dV, \quad (27.25)$$

gde je divergencija konjugovanog tenzora napona prema obrascu (27.21)

$$\nabla \cdot \mathcal{N}^* = \mathbf{e}_1 \operatorname{div} \mathbf{P}_x^* + \mathbf{e}_2 \operatorname{div} \mathbf{P}_y^* + \mathbf{e}_3 \operatorname{div} \mathbf{P}_z^* \quad (27.26)$$

Do istog rezultata možemo doći rastavljajući posmatrani površinski integral u vektorskom obliku na komponente i primenjujući na svaki od njih Gauss-ovu teoremu za vektore.

Uvrštavanjem ovog transformisanog površinskog integrala u jednačinu (27.17) dobijamo

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V [\rho \mathbf{f} + (\nabla \cdot \mathcal{P}^*)] dV. \quad (27.27)$$

Da bi ova jednakost važila za bilo koju oblast V , podintegralni izrazi u svakoj tački moraju biti međusobno jednaki

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathcal{P}^*.$$

a otuda, posle deobe sa ρ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{P}^*). \quad (27.28)$$

Analiza

Ova jednačina predstavlja opštu jednačinu kretanja ma kakve deformabilne sredine, u kojoj se naponsko stanje može opisati određenim tenzorom napona $\mathcal{P}$, koji karakteriše posmatranu sredinu. Iz same jednačine vidimo da ubrzanje delića potiče kako od zapreminskih tako i od površinskih sila, međutim ove poslednje mogu izazvati ubrzanje samo ako se menjaju od tačke do tačke. Pri tome su površinske sile određene konjugovanim tenzorom napona $\mathcal{P}^*$, koji je pak određen transponovanom matricom tenzora napona.

Iz daljeg izlaganja ćemo videti da gornja jednačina u razvijenom obliku nakon ubacivanja datog tenzora napona postaje diferencijalna jednačina kretanja posmatrane sredine, u kojoj su nepoznate funkcije (26.58), ali za razliku od mehanike sistema ona nije dovoljna za njihovo određivanje, jer ovde ima više nepoznatih funkcija nego skalarnih jednačina. Pošto se delić sredine može okarakterisati bilo Lagrange-evim bilo Euler-ovim promenljivama, koje igraju ulogu nezavisno promenljivih, to je ustvari parcijalna diferencijalna jednačina, za čije rešavanje je potrebno da unapred budu dati početni i granični uslovi, tj. početni raspored položaja i brzina i uslovi na granici posmatrane oblasti.

Eksplisitan oblik ovih jednačina možemo dobiti izračunavajući divergenciju tenzora $\Delta \cdot \mathcal{P}^*$ prema obrascima (27.26) i (27.24)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{P}^* &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{32}}{\partial z} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (p_{11} \mathbf{e}_1 + p_{12} \mathbf{e}_2 + p_{13} \mathbf{e}_3) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (p_{21} \mathbf{e}_1 + p_{22} \mathbf{e}_2 + p_{23} \mathbf{e}_3) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{31} \mathbf{e}_1 + p_{32} \mathbf{e}_2 + p_{33} \mathbf{e}_3), \end{aligned}$$

odnosno, prema oznakama (27.9)

$$\nabla \cdot \mathcal{P}^* = \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}, \quad (27.29)$$

što pokazuje tesnu formalnu analogiju sa divergencijom vektora. Tada opšta jednačina kretanja (27.28), posle uvrštavanja gornjeg izraza za $\Delta \cdot \mathcal{P}^*$, dobija oblik

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right), \quad (27.30)$$

a odgovarajuće skalarne jednačine glase

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= f_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\partial p_{31}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv_y}{dt} &= f_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{32}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv_z}{dt} &= f_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27.31)$$

Ove jednačine nazivaju se *Navier-ove jednačine* i možemo ih zajedno napisati i u kondenzovanom obliku, zamenjujući indekse x, y, z brojevima 1, 2, 3

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \quad (i=1, 2, 3). \quad (27.32)$$

Pri tome leve strane ovih jednačina predstavljaju tzv. *supstancijalne izvode* i ako uzmemo Euler-ove promenljive, oni izražavaju kako direktnu zavisnost od vremena tako i posrednu preko x_1, x_2, x_3

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \dot{x}_k = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_i,$$

čime dobijamo

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i. \quad (27.33)$$

27.4. Simetričnost tenzora napona

Pokažimo sad da je tenzor napon $\mathcal{P}$ simetričan i u tom cilju podimo od zakona momenta impulsa (5.50), prema kome je izvod ukupnog momenta impulsa sistema jednak rezultanti svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem

$$\frac{d\mathbf{M}^{(0)}}{dt} = \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_v \text{ ext.} \quad (27.34)$$

Ovde je moment impulsa posmatrane sredine zapremine V u odnosu na neki pol O , koji uzmimo za koordinatni početak dat integralom po svim elementima dm

$$\mathbf{M}^{(0)} = \int_V (\mathbf{r} \times dm \mathbf{v}),$$

a rezultanta svih spoljašnjih sila mora se uzeti po svim elementima zapremine odnosno spoljne površi, tako da navedeni zakon u eksplisitanom obliku glasi

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f} \rho dV) + \oint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n dS). \quad (27.35)$$

Na levoj strani može se promeniti red operacija diferenciranja po vremenu i integracije po zapremini

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm = \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dm + \int_V \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right) dm = \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \rho dV,$$

jer $dm = \rho dV$ ne zavisi od vremena, te prethodna jednačina dobija vid

$$\int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \rho dV = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \rho dV + \oint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n) dS. \quad (27.36)$$

Da bismo uveli eksplicitno komponente tenzora napona, napišimo prvu odgovarajuću skalarnu jednačinu

$$\int_V \left(y \frac{dv_z}{dt} - z \frac{dv_y}{dt} \right) \rho dV = \int_V (y f_z - z f_y) \rho dV + \oint_S (y P_{nz} - z P_{ny}) dS, \quad (27.37)$$

pa transformišimo ovaj površinski integral u zapreminski. Koristeći relacije (27.10), nalazimo

$$\oint_S (y P_{nz} - z P_{ny}) dS = \oint_S [y (p_{13} \alpha + p_{23} \beta + p_{33} \gamma) - z (p_{12} \alpha + p_{22} \beta + p_{32} \gamma)] dS,$$

što prema oznakama (27.24) možemo napisati u obliku

$$\oint_S (y P_{nz} - z P_{ny}) dS = \oint_S (y \mathbf{P}_z^* - z \mathbf{P}_y^*) \cdot d\mathbf{S}. \quad (27.38)$$

Desnu stranu na osnovu Gauss-ove teoreme možemo neposredno transformisati u zapreminski integral

$$\oint_S (y \mathbf{P}_z^* - z \mathbf{P}_y^*) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} (y \mathbf{P}_z^* - z \mathbf{P}_y^*) dV,$$

a pošto je, prema obrascu za divergenciju proizvoda skalara i vektora

$$\operatorname{div} (y \mathbf{P}_z^* - z \mathbf{P}_y^*) = y \operatorname{div} \mathbf{P}_z^* + \mathbf{P}_z^* \cdot \operatorname{grad} y - z \operatorname{div} \mathbf{P}_y^* - \mathbf{P}_y^* \cdot \operatorname{grad} z = y \operatorname{div} \mathbf{P}_z^* - z \operatorname{div} \mathbf{P}_y^* + \mathbf{P}_z^* \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{P}_y^* \cdot \mathbf{e}_3,$$

nalazimo, imajući u vidu da je $\mathbf{P}_z^* \cdot \mathbf{e}_2 = p_{23}$ i $\mathbf{P}_y^* \cdot \mathbf{e}_3 = p_{32}$

$$\oint_S (y P_{nz} - z P_{ny}) dS = \int_V (y \operatorname{div} \mathbf{P}_z^* - z \operatorname{div} \mathbf{P}_y^* + p_{23} - p_{32}) dV \quad (27.39)$$

Stavljajući ovaj izraz u polaznu jednačinu (27.37), dobijamo

$$\int_V \left(y \frac{dv_z}{dt} - z \frac{dv_y}{dt} \right) \rho dV = \int_V (y f_z - z f_y) \rho dV + \int_V (y \operatorname{div} \mathbf{P}_z^* - z \operatorname{div} \mathbf{P}_y^* + p_{23} - p_{32}) dV,$$

odnosno, posle grupisanja srodnih članova

$$\left. \int_V \left[y \left(\frac{dv_z}{dt} - f_z - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{P}_z^* \right) - z \left(\frac{dv_y}{dt} - f_y - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{P}_y^* \right) \right] \rho dV = \int_V (p_{23} - p_{32}) dV. \right\} \quad (27.40)$$

Izrazi u malim zagradama na levoj strani prema drugoj i trećoj skalarnoj jednačini kretanja (27.31) jednaki su nuli, tako da preostaje

$$\int_V (p_{23} - p_{32}) dV = 0.$$

Da bi ovaj uslov bio zadovoljen za bilo koju oblast V , sam integrand mora biti jednak nuli

$$p_{23} = p_{32} \quad (27.41)$$

Sličnim postupkom polazeći od y i z -komponenta zakona momenta impulsa u obliku (27.36), dolazimo do zaključka da za sve nedijagonalne komponente tenzora napona važi

$$p_{ik} = p_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (27.42)$$

Prema tome, tenzor napona ma kakve deformabilne sredine je uvek simetričan, te ima samo šest nezavisnih komponenta. Ova njegova osobina je posledica zakona momenta impulsa i opšte jednačine kretanja, a ako podemo od simetričnosti tenzora napona, zakon momenta impulsa je automatski zadovoljen pri ma kakvim uslovima kretanja.

Svojstveni problem i jednačina kretanja

Navedimo ovde dve najvažnije posledice simetričnosti tenzora napona. Rešimo pre svega svojstveni problem: za ma kakav tenzor napona $\mathcal{N}$ naći takve orijentacije elementa površi pri kojima su vektor napona $\mathbf{P}_n$ i jedinični vektor normale $\mathbf{n}_0$ kolinearni

$$\mathbf{P}_n = \mathcal{N} \cdot \mathbf{n}_0 = \lambda \mathbf{n}_0 \quad (27.43)$$

Iz opšte teorije tenzora sledi, slično kao pri analizi svojstvenog problema tenzora inercije [obraci (20.60)–(20.64)], da zbog navedene osobine $p_{ik} = p_{ki}$ uvek postoje tri realne vrednosti λ i bar tri međusobno ortogonalna pravca $\mathbf{n}_0$ pri kojima napon $\mathbf{P}_n$ ima pravac normale, a matrica tenzora napona u sistemu ovih osa imaće dijagonalni oblik. Takve vrednosti λ_i ($i = 1, 2, 3$) nazivaju se *glavni naponi*, a odgovarajući pravci $\mathbf{n}_0$ *glavne ose tenzora napona*.

Na osnovu simetričnosti tenzora napona opšta jednačina kretanja može se napisati i u drugom, ekvivalentnom obliku. Naime, prema obrascima (27.9) i (27.24) vidimo da je

$$\mathbf{P}_x^* = \mathbf{P}_x, \quad \mathbf{P}_y^* = \mathbf{P}_y, \quad \mathbf{P}_z^* = \mathbf{P}_z, \quad (27.44)$$

tj. vektori koji određuju tenzore $\mathcal{N}^*$ i $\mathcal{N}$ se poklapaju, odakle sledi i da je $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$. Stoga opšta jednačina kretanja (27.28) dobija vid

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{N}), \quad (27.45)$$

u kome neposredno figuriše tenzor napona $\mathcal{N}$ i koji omogućava da se za svaki tenzor napona dobije odgovarajuća diferencijalna jednačina kretanja.

27.5. Održanje mase. Jednačina kontinuiteta

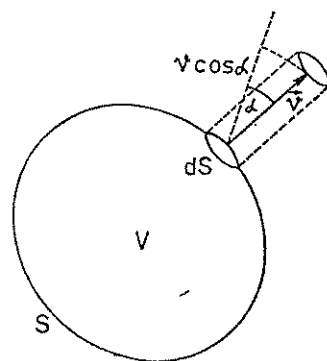
Formulišimo sad zakon o održanju mase deformabilne sredine, prema kome se ukupna masa posmatrane sredine ne menja u toku kretanja. Uočimo izvesnu fiksiranu zapreminu V ograničenu površi S u trenutku t (sl. 27.6) i označimo sa m masu deformabilne sredine u toj zapremini, a sa ϕ masu koja u jedinici vremena prođe kroz površ S . Ako u jedinici vremena veća količina mase izađe iz uočene zapremine nego što uđe u nju, smanjenje mase sredine u zapremini V u intervalu vremena $(t, t + dt)$ jednako je masi ove sredine koja izađe kroz površ S za isto vreme dt

$$-dm = -\frac{dm}{dt} dt = \phi dt. \quad (27.46)$$

U suprotnom slučaju veličina ϕ je negativna, a dm/dt je pozitivno, pa gornja jednakost ostaje i dalje u važnosti.

Izrazimo sad veličine m i ϕ eksplicitno. Element mase u elementu zapremine dV je $dm = \rho dV$, gde je ρ gustina sredine, pa je

$$m = \int_V \rho dV. \quad (27.47)$$



Sl. 27.6

S druge strane, masa posmatrane sredine koja izade kroz element površi dS u jedinici vremena jednaka je onoj masi koja ispunjava elementarni cilindar konstruisan nad elementom površi dS i vektorom $\mathbf{v}$, gde je $\mathbf{v}$ brzina delića na tom mestu. Ako sa α označimo ugao između vektora $\mathbf{v}$ i normale na površi dS , ovaj protok mase kroz dS iznosi

$$d\phi = \rho \cdot dS v \cos \alpha = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ukupni protok mase dobićemo integracijom po površi S

$$\phi = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (27.48)$$

i ova veličina naziva se *fluks mase posmatrane sredine kroz površ S* , a proizvod $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ često se naziva *vektor gustine fluksa mase*.

Zamenom nadenih izraza u jednačini (27.46) dobijamo zakon održanja mase u integralnom obliku

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (27.49)$$

Pošto su operacije diferenciranja po vremenu i integracije po zapremini međusobno nezavisne, na levoj strani možemo izmeniti njihov redosled, a na desnoj strani možemo površinski integral prema Gauss-ovoj teoremi pretvoriti u zapreminski

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (27.50)$$

Da bi ova jednakost važila za ma kakvu proizvoljnu zapreminu, integrandi na obema stranama u svakoj tački moraju biti međusobno jednaki

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}),$$

a otuda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (27.51)$$

Ovoj jednačini možemo dati i drugi oblik, razvijajući drugi član

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0,$$

a pošto je

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \dot{z} = \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho,$$

grupisanjem prvog i trećeg člana dobijamo

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (27.52)$$

To je *matematička formulacija zakona o održanju mase sredine u diferencijalnom obliku* i ona se naziva *jednačina kontinuiteta*. Ona nam daje vezu između gustine i brzine sredine u ma kojoj tački (x, y, z) u trenutku t . U razvijenom obliku jednačina (27.51) glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (27.53)$$

Ako je sredina nestišljiva, jednačina kontinuiteta svodi se na prostiji oblik. Tada je $\rho = \text{const}$, pa dobijamo

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

odnosno

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (27.54)$$

što je u saglasnosti sa obrascem (26.55), prema kome se vidi da ako je relativna zapreminska dilatacija jednaka nuli, mora biti $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Ova jednačina predstavlja *potreban uslov nestišljivosti sredine*. Međutim, ovaj uslov nije i dovoljan, jer iz uslova (27.54) i jednačine kontinuiteta u obliku (27.52) sledi samo da je

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \text{ što znači da se gustina delića duž njihovih putanja ne menja u toku vremena, a}$$

to može da bude i kod stišljive sredine.

Napomenimo na kraju da pri izvođenju jednačine kontinuiteta, kao i pri formulaciji deformacije sredine, ništa nismo pretpostavili o prirodi sredine. Stoga navedene jednačine važe sasvim generalno, za bilo koju sredinu, za razliku od formulacije naponskog stanja, koje je bitna karakteristika same sredine.

27.6. Zakon promene mehaničke energije

Proučimo još promenu kinetičke energije sredine sa vremenom u opštem slučaju, kad je sredina definisana tenzorom napona $\mathcal{N}$. Kinetička energija delića mase Δm je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \Delta m \sum_{i=1}^3 v_i^2,$$

pa obrazujemo njen supstancijalni izvod po vremenu

$$\frac{d}{dt} \Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m \frac{dv^2}{dt} = \rho \Delta V \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dt}. \quad (27.55)$$

Koristeći skalarne diferencijalne jednačine kretanja (27.33), dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \Delta m v^2 \right) = \rho \Delta V \sum_{i=1}^3 v_i \left(f_i + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \right)$$

ili, pošto Δm ne zavisi od vremena

$$\Delta m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \Delta V \left[\rho (f \cdot v) + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 v_i \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \right].$$

Ako ovu jednačinu još podelimo sa ΔV , dolazimo do

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho (f \cdot v) + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 v_i \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k}. \quad (27.56)$$

To je zakon promene kinetičke energije sredine po jedinici zapremine. Prvi član s desne strane predstavlja efekat zapreminskih sila, a drugi potiče od površinskih sila nad jedinicom zapremine posmatrane sredine.

Pretpostavimo sad da su zapreminske sile potencijalne

$$f = -\text{grad } \varepsilon_p, \quad (27.57)$$

gde je ε_p odgovarajuća potencijalna energija po jedinici mase. Pošto je

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \varepsilon_p,$$

efekat zapreminskih sila možemo napisati u obliku

$$f \cdot v = -v \cdot \text{grad } \varepsilon_p = - \left(\frac{d\varepsilon_p}{dt} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} \right), \quad (27.58)$$

pa stavljajući ovaj izraz u gornju jednačinu (27.56), nalazimo

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\rho \left(\frac{d\varepsilon_p}{dt} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 v_i \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k},$$

odnosno

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p \right) = \rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 v_i \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k}. \quad (27.59)$$

Radi dobijanja odgovarajućeg integralnog oblika, transformišimo drugi član stavljajući

$$v_i \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i p_{ki}) - p_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Tada prethodna jednačina dobija vid

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p \right) = \rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i p_{ki}) - \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

pa integralimo obe strane po izvesnoj konačnoj zapremini V , imajući u vidu da je $\rho dV = dm$

$$\left. \begin{aligned} \int_V \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p \right) dm &= \int_V \rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} dV + \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^3 v_i p_{ki} \right) dV - \\ &\quad - \int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV. \end{aligned} \right\} \quad (27.60)$$

Drugi član s desne strane možemo, na osnovu Gauss-ove teoreme i oznaka (27.24), transformisati u površinski integral

$$\begin{aligned} \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^3 v_i p_{ki} \right) dV &= \int_V \text{div} \left(\sum_{i=1}^3 v_i P_i^* \right) dV = \\ &= \oint_S \left(\sum_{i=1}^3 v_i P_i^* \right) \cdot dS = \oint_S \sum_{i=1}^3 v_i \sum_{k=1}^3 p_{ki} dS \alpha_k, \end{aligned}$$

pa koristeći relacije (27.11), dobijamo

$$\int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^3 v_i p_{ki} \right) dV = \oint_S \sum_{i=1}^3 v_i P_{ni} dS = \oint_S P_n \cdot v dS. \quad (27.61)$$

Tada se gornja jednačina (27.60) može konačno napisati u obliku, posle izmene redosleda operacija na levoj strani

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = \int_V \rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} dV + \oint_S P_n \cdot v dS - \int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV, \quad (27.62)$$

gde smo stavili

$$E_k = \int_V \frac{1}{2} v^2 dm, \quad E_p = \int_V \varepsilon_p dm. \quad (27.63)$$

Ovde je $E_k + E_p$ ukupna mehanička energija sredine zapremine V , te gornja relacija predstavlja zakon promene ukupne mehaničke energije sredine u integralnom obliku. Pri tome prvi član s desne strane potiče od nestacionarnosti potencijalnih zapreminskih sila, drugi član predstavlja efekat spoljnih površinskih sila, a za treći član se može pokazati, na osnovu termodinamičkih razmatranja, da potiče od promene unutrašnje energije sredine u posmatranoj oblasti. Istovremeno vidimo da u mehanici deformabilnih tela u opštem slučaju ne važi zakon održanja mehaničke energije i samo ukoliko su svi članovi s desne strane jednačine (27.62) jednaki nuli, ukupna mehanička energija sredine ostaće stalna u toku vremena.

27.7. Potpun sistem jednačina

U mehanici sistema čestica diferencijalne jednačine kretanja u bilo kom obliku bile su dovoljne za rešavanje problema kretanja. Međutim, u mehanici deformabilnih tela diferencijalne jednačine kretanja (27.32) nisu dovoljne, jer one sadrže više nepoznatih funkcija

$$v_i (i=1, 2, 3), \quad p_{ik} (i, k=1, 2, 3) \quad (27.64)$$

Sem toga, nepoznate su nam i kinematičke generalisane koordinate deformabilnog tela (26.58), koje moramo znati u svakoj tački (x, x_2, x_3) u svakom trenutku t

$$u_{0i}, \quad (\Delta \alpha)_i (i=1, 2, 3), \quad e_{ik} (i, k=1, 2, 3), \quad (27.65)$$

a u opštem slučaju i temperatura sredine T . Stoga nam je potreban još niz dopunskih jednačina između ovih promenljivih, od kojih jednu već znamo — jednačinu kontinuiteta (27.51), a ostale možemo dobiti na sledeći način.

Između komponenta tenzora napona i tenzora deformacije postoji izvesna zavisnost, čiji oblik je karakterističan za prirodu sredine. Istovetno pokazuje da su te relacije u opštem slučaju oblika

$$p_{ik} = f_{ik}(e_{j1}, e_{j2}, \rho, T, x_m); \quad (27.66)$$

tj. komponente tenzora napona mogu biti izvesne funkcije od komponenta tenzora deformacije e_{j1} , tenzora brzine deformacije $\dot{e}_{j1}$, gustine ρ , apsolutne temperature T i eventualno izvesnih parametara x_m (kao na pr. koncentracije faza). Jednačine ovakve vrste, koje možemo napisati i u tenzorskom obliku, nazivaju se *konstitucione jednačine* ili *jednačine naponskog stanja*. One karakterišu specifična bitna svojstva sredine i predstavljaju izvesne dopunske relacije između gore navedenih promenljivih, koje karakterišu bitna fizička svojstva sredine. Na pr. za idealni fluid se pokazalo da komponente tenzora napona ne zavise uopšte od tenzora deformacije i imaju vid

$$p_{ik} = -p \delta_{ik}, \quad p = f(T, V), \quad (27.67)$$

pri čemu se poslednja jednačina obično naziva jednačina stanja.

Navedeni zakon promene mehaničke energije u diferencijalnom obliku (27.59) ne može nam služiti kao nezavisna dopunska jednačina, jer ona je dobijena kao posledica diferencijalnih jednačina kretanja. Međutim, prošireni zakon o održanju mehaničke i toplotne energije — prvi princip termodinamike unosi nove, nezavisne odnose između posmatranih veličina. Prema ovom principu elementarna promena energije sistema data je relacijom

$$d(E_k + U) = d'Q + d'A \quad (27.68)$$

tj. ako se posmatranoj sredini dovede izvesna količina toplote $d'Q$ u vidu fluksa energije kroz graničnu površ i ako se na njoj izvrši izvestan rad $d'A$, koji se sastoji iz rada zapreminskih i površinskih sila, njihov zbir predstavljaće odgovarajući prirastak zbira $E_k + U$ njene kinetičke i unutrašnje energije. Pri tome sve navedene veličine treba još izraziti u funkciji kako mehaničkih tako i novih, toplotnih veličina, kao što su na pr. gustina unutrašnje energije, gustina fluksa toplote. Ne ulazeći detaljnije u ova termodinamička razmatranja, navedimo samo da će ovako formulisani opšti zakon održanja energije takođe predstavljati jednu dopunsku relaciju između navedenih promenljivih.

Skup svih dobijenih jednačina (27.32), (27.51), (27.66) i (27.68)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d v_i}{dt} &= f_i + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ p_{ik} &= f_{ik}(e_{j1}, \dot{e}_{j1}, \rho, T, x_m) \\ d(E_k + U) &= d'Q + d'A \end{aligned} \right\} \quad (27.69)$$

može nam poslužiti za rešavanje problema kretanja deformabilnih sredina. Dalji postupak pri rešavanju problema svodi se na to da se izdvoje nekoliko osnovnih fizičkih veličina, a ostale izraze pomoću njih, pa rešavanjem gornjeg sistema jednačina da se nađu ove osnovne veličine kao funkcije položaja i vremena. Odavde vidimo da potpuno sistem jednačina u mehanici deformabilnih tela čine diferencijalne jednačine kretanja, jednačina kontinuiteta, konstitucione jednačine i opšti zakon održanja energije. Ukoliko temperatura ne figuriše eksplicitno u konstitucionim jednačinama, problem kretanja postaje čisto mehanički i poslednja jednačina nije nam više potrebna. U daljem izlaganju ograničićemo se samo na takav slučaj.

Glava X

KRETANJE ELASTIČNIH TELA

28. OSNOVNE JEDNAČINE ELASTIČNOSTI

28.1. Elastična tela

Mnoga čvrsta tela imaju tu osobinu da se po prestanku delovanja spoljašnjih sila koje izazivaju deformaciju vraćaju u svoje prvobitno stanje, pod uslovom da deformacija ne pređe izvesnu granicu, koja zavisi od prirode tela. Takva tela nazivaju se *elastična tela*, sama navedena osobina — *elastičnost*, a granica do koje telo zadovoljava uslov elastičnosti — *granica elastičnosti*. Ako se prekorači ta granica, telo gubi osobinu da se vrati u svoje prvobitno stanje i za tako trajno deformisana tela kažemo da su postala plastična.

Najjednostavnija elastična tela su ona kod kojih deformacije zavise isključivo od naponskog stanja i takva tela nazivaju se *idealno elastična*. Pri tome iskustvo pokazuje da je za takva tela u granicama elastičnosti deformacija srazmerna naponu (Hooke-ov zakon), a teorijsko obrazloženje ovog zakona videćemo iz daljeg izlaganja. Ako se telo po prestanku delovanja spoljašnjih sila ne vraća trenutno u svoje prvobitno stanje, već zadržava izvesnu zaostalu deformaciju, ono nije idealno elastično. Tako na pr., suprotno uobičajenim pojmovima, staklo bolje odgovara uslovima idealno elastičnog tela nego kaučuk, jer staklo u svojim granicama elastičnosti manje ispoljava zaostale deformacije.

Priroda elastičnih sila sa mikrofizičkog stanovišta je dvojaka. Jedan uzrok elastičnosti su sile uzajmnog dejstva između molekula, atoma ili atomskih grupa, za koje se pokazalo da su centralne sile i uglavnom se svode na elektrostatičke sile i kvantnomehaničke sile izmene. Drugi uzrok predstavlja toplotno kretanje molekula, atoma ili atomskih grupa, koje izaziva tzv. termički pritisak predavanjem impulsa pri međusobnim sudarima navedenih čestica.

28.2. Naponsko stanje. Hooke-ov zakon

Potražimo sad vezu između deformacije i napona kod elastičnih tela pod pretpostavkom da je posmatrano telo *idealno elastično* i *izotropno*, tj. da njegove deformacije zavise isključivo od naponskog stanja i da su mu fizičke osobine iste u svim pravcima, što će nam dati jedan uprošćen model elastičnih tela. Realna elastična tela su najčešće anizotropna, ali u izvesnim slučajevima ova aproksimacija je zadovoljavajuća. Komponente tenzora napona su tada izvesne funkcije samo od komponenta tenzora deformacije

$$p_{ik} = f_{ik}(e_{11}, e_{12}, \dots, e_{33}), \quad (28.1)$$

koje zbog pretpostavke o idealnom elastičnom telu moraju zadovoljavati uslov da u odsustvu napona nema ni deformacije, tj.

$$f_{ik}(0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (28.2)$$

Ako sad ove funkcije razvijemo u Taylor-ov red i posmatramo samo *beskonačno male deformacije*, možemo u prvoj aproksimaciji zanemariti više članove

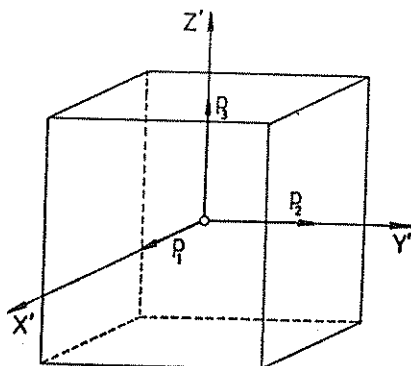
$$p_{ik} = f_{ik}(e_{11}, e_{12}, \dots, e_{33}) = f_{ik}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 e_{jl} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial e_{jl}} \right)_0 + \dots,$$

što se na osnovu uslova (28.2) svodi na

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial e_{jl}} \right)_0 e_{jl} \quad (28.3)$$

Oдавde vidimo da su *komponente tenzora napona idealno elastičnog tela pri beskonačno malim deformacijama homogene linearne funkcije komponenata tenzora deformacije*.

Posmatrajmo sad neki element elastičnog tela u obliku pravouglog paralelepipeda čije su strane normalne na svojstvene, tzv. glavne pravce tenzora napona (sl. 28.1), tj. na takve



Sl. 28.1

pravce u kojima vektor napona ima pravac normale. Tada će ovaj element zbog odsustva napona smicanja i pod dejstvom naponskih sila zadržati oblik pravouglog paralelepipeda, te će se deformacija sastojati iz čistih dilatacija u pravcima glavnih pravaca napona. To znači da se *svojstveni pravci tenzora deformacije poklapaju sa svojstvenim pravcima tenzora napona*, pa ako odgovarajuće svojstvene vrednosti ovih tenzora označimo sa e_1, e_2, e_3 odnosno p_1, p_2, p_3 , relacije (28.3) u ovom slučaju dobijaju vid

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3 \\ p_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3 \\ p_3 &= a_{31} e_1 + a_{32} e_2 + a_{33} e_3 \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

Međutim, zbog pretpostavke o izotropnosti tela uticaj glavnog napona p_1 na odgovarajuću relativnu dilataciju e_1 u pravcu X-ose mora biti isti kao i uticaj napona p_2 i p_3 na dilatacije u pravcu Y odnosno Z-ose. Oдавde zaključujemo da je

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a \quad (28.5)$$

Sem toga, zbog istog razloga uticaj glavnog napona p_1 na relativne poprečne dilatacije e_2 i e_3 u pravcu Y i Z-ose mora biti isti kao i uticaj napona p_2 i p_3 na dilatacije u pravcima odgovarajućih normalnih koordinatnih osa. Otuda sledi

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = b \quad (28.6)$$

Na taj način je broj nezavisnih koeficijenata a_{ik} sveden samo na dva, a relacije (28.4) prelaze u jednostavnije

$$p_1 = a e_1 + b (e_2 + e_3) = (a - b) e_1 + b (e_1 + e_2 + e_3)$$

$$p_2 = a e_2 + b (e_1 + e_3) = (a - b) e_2 + b (e_1 + e_2 + e_3)$$

$$p_3 = a e_3 + b (e_1 + e_2) = (a - b) e_3 + b (e_1 + e_2 + e_3)$$

Ovde izraz u drugoj zagradi na desnoj strani

$$c = e_1 + e_2 + e_3 \quad (28.7)$$

prema obrascu (26.44) predstavlja relativnu zapreminsku dilataciju ovog paralelepipeda, koja je invarijantna pri prelazu u drugi koordinatni sistem. Ako još uvedemo oznake

$$2\mu = a - b, \quad \lambda = b, \quad (28.8)$$

koje se nazivaju *Lamé-ove konstante elastičnosti*, prethodne relacije možemo napisati u obliku...

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 2\mu e_1 + \lambda c \\ p_2 &= 2\mu e_2 + \lambda c \\ p_3 &= 2\mu e_3 + \lambda c \end{aligned} \right\} \quad (28.9)$$

Imajući u vidu da matrice tenzora napona i deformacije u ovom sistemu svojstvenih pravaca imaju dijagonalni vid

$$N = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$$

gornjim relacijama odgovara sledeća veza između tenzora napona N i tenzora deformacije

$$N = 2\mu D + \lambda c I, \quad (28.10)$$

gde je I jedinični tenzor.

Analiza

Dobijene relacije (28.9) odnosno (28.10) potpuno određuju *naponsko stanje izotropnog idealno elastičnog tela u svakoj tački u funkciji deformacije* i izražavaju tzv. *generalisani Hooke-ov zakon*. Time je istovremeno data osnovna karakteristika izotropnih idealno elastičnih tela, po kojoj se ona razlikuje od svih drugih vrsta deformabilnih tela. Pri izvođenju Hooke-ovog zakona poslužili smo se specijalnim koordinatnim sistemom glavnih osa tenzora napona, međutim *gornja tenzorska relacija je nezavisna od koordinatnog sistema*, te odgovarajuće relacije između komponenata ova dva tenzora možemo izraziti i u bilo kom drugom koordinatnom sistemu. Tako dobijamo u opštem slučaju

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= 2\mu e_{11} + \lambda c \\ p_{12} &= 2\mu e_{12} \end{aligned} \right\} \quad (28.11)$$

pri čemu dolaze do izražaja i naponi smicanja, koji izazivaju deformacije iskošenja elastičnih tela. Ako saberemo prve tri jednačine (28.11), dobićemo

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2\mu(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 3\lambda e$$

tj.

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = (2\mu + 3\lambda)(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad (28.12)$$

čime je uspostavljena *veza između prvih skalarnih invarijanti — zbira elemenata na glavnoj dijagonali tenzora napona i tenzora deformacije.*

Ako relacije (28.11) napišemo koncizno u obliku

$$p_{ik} = 2\mu e_{ik} + \lambda e \delta_{ik},$$

gde je δ_{ik} Kronecker-ov simbol i transformišemo ih dodavanjem i oduzimanjem izraza $\frac{2\mu}{3} e \delta_{ik}$, dobićemo

$$p_{ik} = 2\mu \left(e_{ik} - \frac{1}{3} e \delta_{ik} \right) + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) e \delta_{ik}, \quad (28.13)$$

čemu odgovara tenzorska relacija

$$\mathcal{P} = 2\mu \left(\mathcal{D} - \frac{1}{3} e \mathcal{I} \right) + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) e \mathcal{I} \quad (28.14)$$

Ovde izraz u prvoj zagradi predstavlja tenzor čija je prva skalarna invarijanta jednaka nuli tzv. *devijator*:

$$S_1 = \left(e_{11} - \frac{1}{3} e \right) + \left(e_{22} - \frac{1}{3} e \right) + \left(e_{33} - \frac{1}{3} e \right) = 0,$$

te prvi član na osnovu obrasca (26.44) ne daje nikakvu promenu zapremine. Drugi član predstavlja proizvod skalara i jediničnog tenzora, tzv. *izotropni tenzor* i pošto on nema nedijagonalnih elemenata, prema obrascu (26.48) ne daje nikakvo iskošenje tela. Na osnovu toga zaključujemo da se *tenzor napona izotropnog idealno elastičnog tela uvek može rastaviti na devijator, koji određuje samo promenu oblika i izotropni tenzor, koji određuje samo promenu zapremine.* Ova osobina je od posebnog značaja, jer omogućava razdvajanje ispitivanja elastičnih tela na dva nezavisna dela.

28.3. Koeficijenti elastičnosti i njihov smisao

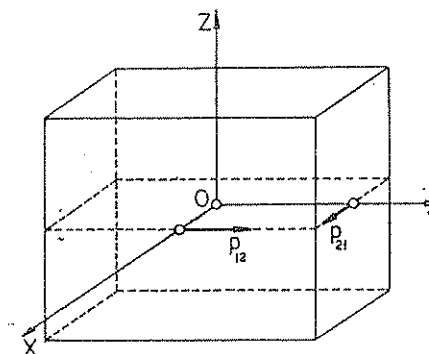
Sem navedenih Lamé-ovih konstanti elastičnosti λ i μ , definisanih obrascima (28.8), upotrebljavaju se i drugi koeficijenti elastičnosti. Pre svega, iz oblika tenzora napona (28.14) vidimo da je Lamé-ov koeficijent μ uz devijator vezan za promenu oblika, a koeficijent $\left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right)$ uz izotropni tenzor karakterističan za zapreminsku dilataciju, koje ovde označimo sa

$$G = \mu, \quad K = \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad (28.15)$$

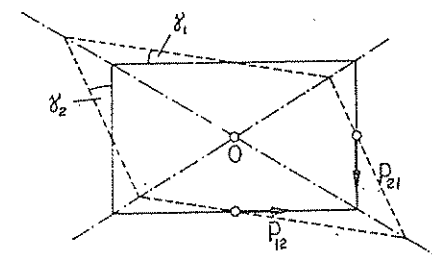
Stoga se koeficijent G još naziva *modul smicanja* ili *modul torzije*, a ovako definisan koeficijent K naziva se *modul kompresije* i ova dva koeficijenta zajedno potpuno određuju elastične karakteristike izotropnih idealno elastičnih tela.

Da bismo videli mehanički smisao modula smicanja G , posmatrajmo neko elastično telo u obliku pravouglog paralelepipeda sa ivicama paralelnim koordinatnim osama (sl. 28.2). Neka na ovo telo deluju samo dva napona smicanja: p_{12} i p_{21} na strane normalne na X i Y -osu, a paralelni Y odnosno X -osi. Ovde, dakle, imamo

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = p_{33} = 0 \\ p_{12} &= p_{21} = \tau \\ p_{13} &= p_{23} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.16)$$



Sl. 28.2



Sl. 28.3

U ovom slučaju naponsko stanje biće isto u svim ravnima paralelnim XOY — ravni i stoga uočimo u toj ravni presek u obliku pravougaonika. Pod uticajem napona smicanja ovaj pravougaonik će se deformisati u kosougli paralelogram, kao što je prikazano na sl. 28.3, pri čemu nastupa iskošenje pravog ugla za izvestan ugao $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Primenimo sad relaciju (28.11) za p_{12} , koja na osnovu obrasca (26.48) i definicije koeficijenta G tada daje

$$p_{12} = \tau = 2\mu e_{12} = 2G \frac{1}{2} \gamma = G\gamma,$$

a otuda

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau \quad (28.17)$$

Dakle, ugao iskošenja je *srazmeran naponu smicanja*, a njihov inverzni odnos predstavlja *modul smicanja (torzije) G , odnosno Lamé-ovu konstantu elastičnosti μ .*

Radi mehaničkog tumačenja modula kompresije K , zamislimo neko elastično telo na koje normalno deluje stalan pritisak p . U ovom slučaju je

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p, \quad p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0 \quad (28.18)$$

i telo će se pod ovim pritiskom sabiti, smanjujući svoju zapreminu za izvesnu vrednost, pri čemu nam e na osnovu obrasca (26.44) daje odgovarajuću relativnu promenu ove zapremine. Relacije (28.11) tada dobijaju oblik

$$-p = 2\mu e_{11} + \lambda e, \quad -p = 2\mu e_{22} + \lambda e, \quad -p = 2\mu e_{33} + \lambda e, \quad (28.19)$$

pa sabiranjem ovih jednačina i deobom sa 3 nalazimo, imajući u vidu definiciju koeficijenta K

$$-p = \frac{2\mu}{3} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + \lambda e = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) e = K e,$$

odakle sledi da je

$$-\frac{p}{e} = K \quad (28.20)$$

Oдавde vidimo da *modul kompresije* K predstavlja odnos pritiska koji deluje na telo i relativne zapreminske kontrakcije.

Young-ov modul i Poisson-ov koeficijent

U praksi se naročito često koriste druga dva koeficijenta elastičnosti, koji se pomoću Lamé-ovih konstanti λ i μ definišu na sledeći način

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \quad (28.21)$$

Tako definisani koeficijent E naziva se *Young-ov modul elastičnosti*, a koeficijent κ *Poisson-ov koeficijent elastičnosti*. Prvi od njih se obično daje u jedinicama kp/cm^2 ili N/m^2 , a drugi je nimenovan broj. Vrednosti Young-ovog modula kreću se u vrlo širokim granicama, od $1,5 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ (za meku gumu) do $2 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$ (za čelik), a Poisson-ovog koeficijenta od 0,1 (za beton) do 0,49 (za gumu).

Ako se druga od ovih jednačina reši po λ i nađeni izraz uvrsti u prvu, skraćujući je sa μ , nalazimo

$$\lambda = \frac{2\mu\kappa}{1-2\kappa}, \quad E \left(1 + \frac{2\kappa}{1-2\kappa} \right) = 2\mu + 3 \frac{2\mu\kappa}{1-2\kappa},$$

odakle se mogu dobiti inverzne relacije u obliku

$$\mu = \frac{E}{2(1+\kappa)}, \quad \lambda = \frac{\kappa E}{(1+\kappa)(1-2\kappa)} \quad (28.22)$$

Pošto iskustvo pokazuje da je uvek $\lambda > 0$ i $\mu > 0$, iz poslednjeg obrasca neposredno vidimo da mora biti $1-2\kappa \geq 0$, tj. da se *Poisson-ov koeficijent elastičnosti nalazi u granicama* $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2}$.

Mehanički smisao ovih koeficijenata možemo dobiti sledećim razmatranjem. Posmatrajmo neko elastično telo u obliku cilindra na koji deluje samo napon p_{33} u pravcu njegove ose (sl. 28.4). Ova osa biće tada i jedna od glavnih osa tenzora napona, tako da imamo

$$\left. \begin{aligned} p_{11} = p_{22} = 0, \quad p_{33} = p_3 \\ p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.23)$$

Pod uticajem ovog napona p_3 posmatrani cilindar će se istegnuti u pravcu Z-ose, ali će istovremeno doći i do sažimanja poprečnog preseka, te će se pojaviti i relativne poprečne dilatacije e_1 i e_2 . Primenimo sad na ovaj slučaj jednačine (28.11), koje zbog navedenih uslova ovde imaju vid

$$0 = 2\mu e_1 + \lambda e, \quad 0 = 2\mu e_2 + \lambda e, \quad p_3 = 2\mu e_3 + \lambda e, \quad (28.24)$$

a relacija (28.12) između prvih skalarnih invarijanti tenzora napona i deformacije daje

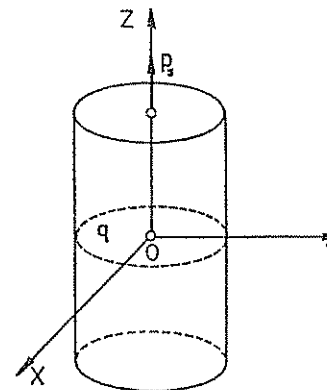
$$p_3 = (2\mu + 3\lambda) e \quad (28.25)$$

Ako se odavde izračuna e i zameni u trećoj od gornjih jednačina, dobićemo

$$p_3 = 2\mu e_3 + \lambda e = 2\mu e_3 + \lambda \frac{p_3}{2\mu + 3\lambda},$$

a oruda

$$p_3 = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} e_3. \quad (28.26)$$



Sl. 28.4

što s obzirom na definiciju Young-ovog modula (28.21) možemo napisati u obliku

$$e_3 = \frac{1}{E} p_3 \quad (28.27)$$

Imamo li još u vidu da prema obrascu (26.41) e_3 predstavlja relativnu dilataciju, $e_3 = \Delta l/l$, a napon silu po jedinici poprečnog preseka $p_3 = F/q$, poslednju relaciju možemo izraziti i pomoću ovih veličina

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{q}, \quad (28.28)$$

a to je uobičajeni oblik Hooke-ovog zakona.

Dakle, relativna dilatacija srazmerna je naponu zatezanja, a njihov inverzni odnos predstavlja Young-ov modul elastičnosti E .

Zbog dilatacije cilindra u pravcu delovanja napona zatezanja p_3 dolazi do već pomenute kontrakcije poprečnog preseka. Ako izraz z iz obrasca (28.25) uvrstimo u prvu i drugu jednačinu (28.24), imaćemo

$$0 = 2\mu e_1 + \lambda \frac{p_3}{2\mu + 3\lambda}, \quad 0 = 2\mu e_2 + \lambda \frac{p_3}{2\mu + 3\lambda},$$

odakle sledi

$$e_0 = e_1 = e_2 = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} p_3 \quad (28.29)$$

Zamenimo li ovde još p_3 izrazom (28.26), dobićemo

$$e_0 = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} e_3 = -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} e_3,$$

što prema definiciji Poisson-ovog koeficijenta (28.21) možemo napisati kao

$$\frac{e_0}{e_3} = \kappa \quad (28.30)$$

Oдавде vidimo da Poisson-ov koeficijent elastičnosti κ predstavlja odnos relativne poprečne kontrakcije i relativne uzdužne dilatacije.

28.4. Jednačine kretanja elastičnih tela

Potražimo sad osnovnu jednačinu dinamike izotropnih idealno elastičnih tela. U tom cilju podimo od opšte jednačine kretanja deformabilnih sredina (27.45)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{A}), \quad (28.31)$$

gde je $\mathbf{f}$ zapreminska sila po jedinici mase, a $\mathcal{A}$ tenzor napona, koji je za posmatrana elastična tela određen generalisanim Hooke-ovim zakonom (28.10)

$$\mathcal{A} = 2\mu \mathcal{D} + \lambda e \mathcal{I}$$

Da bismo dobili traženu jednačinu kretanja, treba da izračunamo divergenciju tenzora napona $\nabla \cdot \mathcal{A}$, smatrajući Lamé-ove koeficijente λ i μ konstantnim

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = 2\mu (\nabla \cdot \mathcal{D}) + \lambda \nabla \cdot (e \mathcal{I}) \quad (28.32)$$

Divergenciju tenzora deformacije $\nabla \cdot \mathcal{D}$ možemo naći prema opštem obrascu (27.21)

$$\nabla \cdot \mathcal{G} = \sum_{k=1}^3 e_k \operatorname{div} \mathbf{T}_k, \quad (28.33)$$

gde su $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ i $\mathbf{T}_3$ vektori čije su komponente elementi prve, druge odnosno treće kolone matrice ovog tenzora.

U našem slučaju matrica tenzora deformacije prema obrascu (26.35) ima oblik

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

pa na pr. odgovarajući vektor $\mathbf{T}_1$ ima sledeće komponente

$$\mathbf{T}_1 = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right\} \quad (28.34)$$

Formirajmo sad divergenciju vektora $\mathbf{T}_1$ i transformišimo je u pogodniji oblik, rastavljajući prvi član na dva sabirka i menjajući redosled diferenciranja u prvom delu drugog i trećeg člana

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

odnosno

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_1 = \frac{1}{2} \Delta u_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (28.35)$$

Po analogiji možemo odmah napisati i divergencije vektora $\mathbf{T}_2$ i $\mathbf{T}_3$, pa prema obrascu (28.33) imamo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{D} &= e_1 \operatorname{div} \mathbf{T}_1 + e_2 \operatorname{div} \mathbf{T}_2 + e_3 \operatorname{div} \mathbf{T}_3 = \\ &= e_1 \left(\frac{1}{2} \Delta u_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + e_2 \left(\frac{1}{2} \Delta u_y + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \\ &\quad + e_3 \left(\frac{1}{2} \Delta u_z + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \end{aligned}$$

što posle grupisanja srodnih članova daje

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (28.36)$$

Drugi član u izrazu (28.32) možemo neposredno izračunati, imajući u vidu definiciju jediničnog tenzora

$$\nabla \cdot (e \mathcal{I}) = (\nabla \cdot \mathcal{I}) e = \nabla e = \operatorname{grad} e,$$

a veličina e prema obrascu (28.7) i šemi (26.35) može se izraziti i pomoću elementarnog pomeranja $\mathbf{u}$

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (28.37)$$

što je u saglasnosti sa obrascem (26.44) o relativnoj zapreminskoj dilataciji, tako da gornji izraz dobija vid

$$\nabla \cdot (e \mathcal{I}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (28.38)$$

Ako nadene izraze za $\nabla \cdot \mathcal{D}$ i $\nabla \cdot (e \mathcal{I})$ uvrstimo u obrazac (28.32), dobićemo

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = 2\mu \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) + \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}$$

tj.

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (28.39)$$

Pošto kod elastičnih tela imamo samo beskonačno mala pomeranja, brzine delića biće takođe beskonačno male, pa se supstancijalni izvod na levoj strani, određen obrascem (27.33), može zameniti odgovarajućim parcijalnim izvodom

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Stoga opšta jednačina kretanja (28.31) u ovom slučaju dobija vid

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (28.40)$$

To je osnovna jednačina dinamike izotropnih idealno elastičnih tela sa konstantnim koeficijentima elastičnosti, koja se naziva Lamé-ova jednačina i ona istovremeno predstavlja i odgovarajuću diferencijalnu jednačinu kretanja. Ako su unapred date zapreminske sile $\mathbf{f}$, početni i granični uslovi, tri odgovarajuće skalarne diferencijalne jednačine kretanja i jednačina konti-

nuiteta (27.51) potpuno određuju komponente elementarnog pomeranja u_x, u_y, u_z i gustinu ρ kao funkcije Lagrange-ovih ili Euler-ovih promenljivih.

Umesto jednačine kontinuiteta obično se koristi jedna njena posledica, naime iz jednačine (27.52) sledi

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\operatorname{div}(\mathbf{v} \Delta t),$$

a stavljajući ovde $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Delta t$, prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (28.41)$$

gde je ρ_0 srednja vrednost gustine. Kad iz ovih jednačina nademo navedene veličine, prema shemi (26.35) možemo neposredno dobiti sve komponente e_{ik} tenzora deformacije, a Hooke-ov zakon u obliku (28.11) tada potpuno određuje i naponsko stanje elastičnog tela.

28.5. Talasno prostiranje malih poremećaja

Ako se naglim udarom ili na bilo koji drugi način u nekoj maloj oblasti elastične sredine izazove izvestan *poremećaj*, postavimo pitanje kako se taj poremećaj odatle prostire kroz elastičnu sredinu u toku vremena. Kao primer može nam poslužiti rasprostiranje malih poremećaja, izazvanih udarom, kroz elastičnu sredinu u vidu akustičkih talasa. Pri tome ćemo pretpostaviti 1) da su deformacije elastične sredine izazvane poremećajem vrlo male i 2) da se uticaj zapreminskih sila može zanemariti prema uticaju površinskih. S obzirom na prvu pretpostavku, pomeranje delića ne može biti samo u jednom smeru, jer bi se tada telo sve više deformisalo, već mora stalno menjati svoj smer. Stoga ovo pomeranje karakteriše *oscilatorni karakter*, a prenošenje ovog stanja oscilovanja kroz sredinu u toku vremena predstavlja *talasni proces*.

Radi ispitivanja prostiranja ovih malih poremećaja podimo od opšte jednačine kretanja elastičnih tela (28.40) i zanemarimo u njoj na osnovu druge pretpostavke zapreminske sile $\mathbf{f}$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} e, \quad (28.42)$$

pri čemu smo zamenili $\operatorname{div} \mathbf{u}$ prema obrascu (28.37) sa e , pa napišimo i odgovarajuće skalarne jednačine

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \Delta u_x + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \Delta u_y + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\rho} \Delta u_z + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (28.43)$$

Rastavimo sad elementarno pomeranje $\mathbf{u}$ na dve komponente

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

i to takve da je

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &\neq 0, & \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_2 &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.44)$$

Prva komponenta definiše tzv. *potencijalno* ili *bezvrtložno polje*, a druga tzv. *solenoidno* ili *vrtložno polje*. Tada jednačina (28.42) dobija oblik

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_1 + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_2 + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \quad (28.45)$$

Da bismo iz ove jednačine eliminisali $\mathbf{u}_2$, primenimo operaciju divergencije na obe strane, menjajući pri tome redosled operacija i imajući u vidu uslove (28.44)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_1) = \frac{\mu}{\rho} \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u}_1) + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1,$$

odnosno

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_1) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u}_1),$$

što se može napisati i u obliku

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0, \quad (28.46)$$

Pošto je, s obzirom na uslove (28.44)

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_1 \right) = 0,$$

zaključujemo da mora biti

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_1 = 0$$

ili konciznije

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = a^2 \Delta \mathbf{u}_1, \quad (28.47)$$

gde smo uveli oznaku

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (28.48)$$

Na sličan način, u cilju eliminisanja $\mathbf{u}_1$ iz jednačine (28.45), primenimo operaciju rotora na obe strane

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{rot} \mathbf{u}_2) = \frac{\mu}{\rho} \Delta (\operatorname{rot} \mathbf{u}_2),$$

jer je rotor gradijenta ma kog skalara identički jednak nuli, odnosno

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_2 \right) = 0 \quad (28.49)$$

Pošto je, na osnovu uslova (28.44)

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_2 \right) = 0,$$

dolazimo do zaključka da je

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}_2 = 0$$

ili konciznije

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = b^2 \Delta u_2, \quad (28.50)$$

gde smo stavili

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (28.51)$$

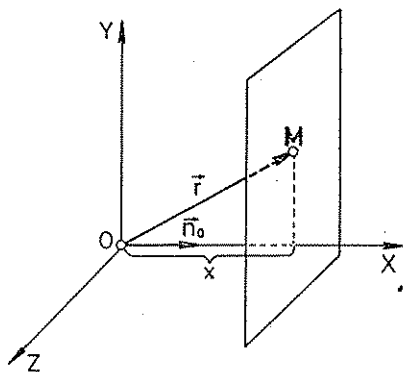
Odavde vidimo da se *ma kakav mali poremećaj u elastičnoj sredini raspada na dva nezavisna poremećaja, čije se prostiranje vrši na dva razna načina, određena diferencijalnim jednačinama istog oblika*. Pri tome prvi način prostiranja poremećaja zbog uslova $\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0$ karakteriše *odsustvo rotacije delića, a drugi zbog uslova* $\text{div } \mathbf{u}_2 = 0$ *karakteriše nepromenljivost zapremine*. Stoga se prvi način prostiranja poremećaja, gde ima samo zgušnjavanja i razređivanja, naziva *kompresioni ili bezvrtložni talas*, a drugi način, gde ima oscilacija sa rotacijom delića — *vrtložni ili ekvivolumni talas*.

28.6. Ravni talasi. Dva tipa talasa

Od raznih načina prostiranja malih poremećaja u elastičnim telima proučimo prvo slučaj kada je vektor elementarnog pomeranja $\mathbf{u}$ funkcija samo od jedne koordinate, na pr. x i vremena t

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) \quad (28.52)$$

Tada se sve tačke u ravni normalnoj na X -osu, koje imaju istu apscisu x (sl. 28.5) nalaze u istoj fazi oscilovanja. Stoga se takav način prostiranja poremećaja, koji u neograničenoj sredini odgovara beskonačno udaljenom izvoru poremećaja na X -osi, naziva *ravan talas*.



Sl. 28.5

U ovom slučaju prema obrascu (28.37) imamo, pošto sve veličine zavise samo od koordinate x

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0,$$

pa prva skalarna jednačina kretanja (28.43) dobija vid

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

odnosno, na osnovu (28.48)

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (28.53)$$

Na sličan način druge dve skalarnе jednačine kretanja svode se na

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

ili, prema (28.51)

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (28.54)$$

Iz ovih jednačina zaključujemo, upoređujući ih sa jednačinama (28.47) i (28.50), da se *posmatrani ravni talasi sastoje iz oscilovanja delića u pravcu X-ose, koje se prostiru u vidu kompresionih talasa i oscilovanja delića normalno na X-osu, koje se prostire u vidu vrtložnih talasa*. Stoga se prvi tip ravnih talasa, određen jednačinom (28.53) naziva *longitudinalni talas*, a drugi tip, opisan jednačinama (28.54) — *transverzalni talas* i oni se razlikuju jedino pa konstantama a i b , čiji ćemo fizički smisao videti iz daljeg izlaganja.

28.7. Opšte rešenje talasne jednačine

Gornje razmatranje pokazuje da diferencijalne jednačine longitudinalnih i transversalnih talasa imaju isti oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (28.55)$$

gde je c respektivno za prve i druge talase

$$c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (28.56)$$

Proučimo sad detaljnije ovu parcijalnu diferencijalnu jednačinu i nadimo njen opšti integral. U tom cilju umesto x i t uvedimo nove nezavisno promenljive ξ i η smenom

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c} \quad (28.57)$$

Tada imamo prema pravilu za diferenciranje posrednih funkcija

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

a na sličan način nalazimo i

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

pa diferencijalna jednačina (28.55) dobija vid

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (28.58)$$

Ako ovu jednačinu napišemo u obliku

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0,$$

vidimo da $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ne zavisi od η , te može biti proizvoljna funkcija od ξ , koju označimo sa $f(\xi)$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

a odavde integracijom po ξ dobijamo

$$u = \int f(\xi) d\xi$$

Rezultat integracije proizvoljne funkcije $f(\xi)$ po ξ biće neka nova proizvoljna funkcija od ξ , koju označimo sa $\varphi(\xi)$, a umesto integracione konstante možemo staviti bilo koju funkciju koja ne zavisi od integracione promenljive ξ , tj. proizvoljnu funkciju od η , koju označimo sa $\psi(\eta)$

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) \quad (28.59)$$

Ako se vratimo na stare nezavisno promenljive x i t pomoću obrazaca (28.57), dobićemo konačno *opšti integral* jednačine (28.55)

$$u = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (28.60)$$

gde su η i ψ proizvoljne funkcije argumenta $t - \frac{x}{c}$ odnosno $t + \frac{x}{c}$.

Da bismo videli smisao ovog opšteg integrala, posmatrajmo partikularno rešenje kod koga je $\psi = 0$, koje označimo indeksom 1

$$u_1 = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (28.61)$$

Ako fiksiramo položaj stavljajući $x = x_0$, ova funkcija $u_1 = \varphi\left(t - \frac{x_0}{c}\right)$ predstavljaće *zavisnost elongacije određenog delića na mestu $x = x_0$ od vremena*, što odgovara konačnoj jednačini kretanja u mehanici sistema. Ako pak fiksiramo vreme stavljajući $t = t_0$, gornja funkcija $u_1 = \varphi\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$ daće nam *prostorni raspored elongacija delića duž X-ose u određenom trenutku*,

što je specifično za pojam talasa. Međutim, u opštem slučaju funkcija (28.61) izražava zavisnost elongacije delića od položaja i vremena kao dveju nezavisno promenljivih, pri čemu svakoj vrednosti ove funkcije, odnosno odgovarajućem paru nezavisno promenljivih (x, t) odgovara određeno stanje oscilovanja delića, tzv. faza.

Posmatrajmo sad dva stanja oscilovanja: na mestu x u trenutku t i na mestu $x + \Delta x$ u trenutku $t + \Delta t$, pa postavimo pitanje pod kojim će uslovima ova dva stanja oscilovanja biti međusobno jednaka. To će biti ako je

$$\varphi\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c}\right) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (28.62)$$

a pošto je ovde funkcija φ sasvim proizvoljna, ova jednakost će samo tada uvek biti zadovoljena ako su im odgovarajući argumenti jednaki

$$t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c} = t - \frac{x}{c}. \quad (28.63)$$

Iz ovog uslova sledi da je

$$\Delta t - \frac{\Delta x}{c} = 0,$$

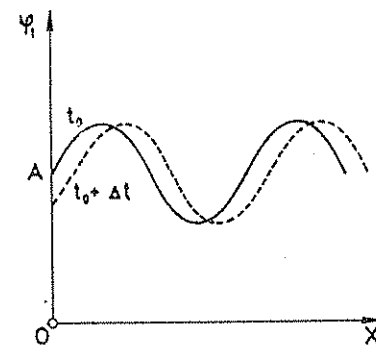
tj. da između Δx i Δt mora postojati relacija

$$\Delta x = c \Delta t \quad (28.64)$$

Odavde vidimo da *neko stanje oscilovanja na mestu x u trenutku t možemo naći i na mestu $x + \Delta x$ ali u trenutku $t + \frac{\Delta x}{c}$, odnosno i u trenutku $t + \Delta t$ ali na mestu $x + c \Delta t$, što znači da se stanje oscilovanja, tj. faza prostire duž X-ose tako da se za vreme Δt pomeri za Δx s leva nadesno brzinom c .*

Do istog zaključka možemo doći i sledećim rezonovanjem. Za fiksirano t funkcija (28.61) predstavljaće izvesnu funkciju od x i prikazimo je grafički za $t = t_0$ (sl. 28.6). Sad postavimo pitanje kakav će oblik imati ova funkcija za neko drugo t , na pr. za $t = t_0 + \Delta t$. Uočimo stoga vrednost gornje funkcije za $t = t_0$ i $x = 0$, ona je data ordinatom $OA = \varphi(t_0)$. Međutim, tu istu vrednost $\varphi(t_0)$ imaće ova funkcija ne samo za $t = t_0$ i $x = 0$ već *kadgod je argument ove funkcije $\varphi\left(t - \frac{x}{c}\right)$ jednak t_0 , tj. kad je*

$$t - \frac{x}{c} = t_0,$$



Sl. 28.6

a otuda

$$x = c(t - t_0). \quad (28.65)$$

Odavde vidimo da za svaki trenutak t postoji duž X -ose neka tačka $x=c(t-t_0)$ u kojoj će funkcija $\varphi\left(t-\frac{x}{c}\right)$ imati istu vrednost $\varphi(t_0)$ kao i za $t=t_0$ i $x=0$. To znači da se posmatrana funkcija $\varphi\left(t-\frac{x}{c}\right)$ sa vremenom pomera duž X -ose s leva nadesno brzinom c , tj. da se stanje oscilovanja sredine prostire u pozitivnom smeru X -ose ovom brzinom.

Drugo partikularno rešenje kod koga je $\varphi=0$

$$u_2 = \psi\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (28.66)$$

razlikuje se od prvog samo po tome što umesto c stoji $-c$, pa sličnim rezonovanjem umesto relacije (28.64) dobijamo

$$\Delta x = -c \Delta t. \quad (28.67)$$

Tome odgovara prostiranje stanja oscilovanja duž X -ose s desna na levo istom brzinom c . U opštem slučaju, opšti integral (28.60) predstavljaće superpoziciju ova dva talasna prostiranja poremećaja.

Prema tome, rešenje jednačine (28.42) koje zavisi samo od jedne koordinate x i vremena t prikazuje prostiranje malih poremećaja kroz elastičnu sredinu u vidu dva ravna talasa, longitudinalna ili transversalna, koji se prostiru duž X -ose u suprotnim smerovima brzinom c , koja je za dva navedena tipa talasa određena obrascima (28.56).

Harmonijski ravni talasi

Od naročitog su interesa takvi ravni talasi kod kojih su elongacije delića harmonijske funkcije položaja i vremena, na pr.

$$u_1 = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (28.68)$$

gde je α tzv. *fazna razlika*. Ako uzmemo dva partikularna rešenja za $\alpha=0$ i $\alpha=\frac{\pi}{2}$, njihova linearna kombinacija biće takode rešenja linearne diferencijalne jednačine (28.55)

$$u = C_1 a \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + C_2 a \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

koje je za mnoge svrhe pogodnije. Uzmemo li posebno $C_1=1$, $C_2=i$, gde je $i=\sqrt{-1}$, na osnovu Euler-ovog obrasca $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ dobićemo

$$u = a e^{i \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)},$$

što se često piše i u obliku

$$u = a e^{i(\omega t - kx)}, \quad (28.69)$$

gde je $k = \frac{\omega}{c}$ tzv. *talasni broj*, a odgovarajući vektor $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_1$, koji ima pravac prostiranja talasa, *talasni vektor*.

Ovakvi talasi nazivaju se *harmonijski ravni talasi*, a gornja funkcija opisuje rasprostiranje harmonijskih oscilacija delića kroz elastičnu sredinu u toku vremena. Ona je periodična funkcija kako položaja tako i vremena sa odgovarajućim periodima

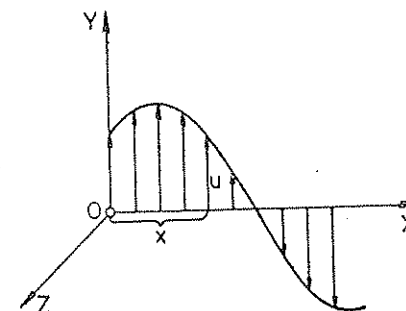
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (28.70)$$

i tako definisano λ naziva se *talasna dužina*, a τ *period oscilacija*. Ako, dakle, uočimo neko stanje oscilovanja na mestu x u trenutku t , to isto stanje oscilovanja u istom trenutku imaćemo i na mestima $x + \frac{2\pi}{k}$, $x + \frac{4\pi}{k}$, ..., a na istom mestu i u trenucima $t + \frac{2\pi}{\omega}$, $t + \frac{4\pi}{\omega}$,

Posmatramo li transversalne oscilacije delića i prikazemo istovremene položaje vektora elongacije duž X -ose (sl. 28.7), njihovi krajevi formiraće talas u obliku kosinusoide.

Analizirajmo još opšti integral (28.60) u vidu superpozicije dva ovakva harmonijska ravna talasa, koji se prostiru u suprotnim smerovima

$$u = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + a \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right)$$



Sl. 28.7

Ovaj rezultujući talas može se, posle pretvaranja zbira trigonometrijskih funkcija u proizvod, napisati i u obliku

$$u = 2a \cos \frac{\omega x}{c} \cdot \cos \omega t \quad (28.71)$$

i to je tzv. *stojeći talas*. On se karakteriše time što svaki delić duž X -ose osciluje harmonijski sa vremenom, ali sa različitim amplitudama $2a \cos \frac{\omega x}{c}$, koje zavise od položaja.

28.8. Sferni talasi

Proučimo sad drugi važan slučaj načina prostiranja malih poremećaja kad je vektor elementarnog pomeranja funkcija samo od rastojanja r od izvora poremećaja i od vremena t

$$u = u(r, t) \quad (28.72)$$

Tada će sve tačke na sferi poluprečnika r sa centrom u izvoru poremećaja biti u istoj fazi oscilovanja. Takav način prostiranja poremećaja, koji odgovara ravnomernom rasprostiranju poremećaja iz njegovog izvora na sve strane, naziva se *sferni talas*.

Iz ranijeg izlaganja videli smo da diferencijalna jednačina prostiranja malih poremećaja u opštem slučaju ima vid (28.47) ili (28.50), tj. oblika je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad (28.73)$$

gde je u intenzitet vektora elementarnog pomeranja. U ovom slučaju, prema obrascu (28.72) imamo

$$\text{grad } u(r, t) = \frac{\partial u}{\partial r} \text{grad } r = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{r}_0 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \mathbf{r},$$

pa laplasijan možemo neposredno izračunati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \text{div grad } u = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \text{div } \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \mathbf{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

odnosno

$$\Delta u(r, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (28.74)$$

Ekvivalentan oblik ovog izraza sledi iz identičnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(ru) &= u + r \frac{\partial u}{\partial r}, & \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \\ &+ r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

odakle se nalazi

$$\Delta u(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \quad (28.75)$$

i ovaj obrazac određuje rezultat primene Laplace-ovog operatora na ma kakvu funkciju oblika $u(r, t)$.

Zamenom nadenog izraza za Δu u jednačini (28.73) dobijamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

a pošto r kao nezavisno promenljiva ne zavisi od t , ovu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \quad (28.76)$$

Ako proizvod ru smatramo novom funkcijom, ova jednačina je istog oblika kao i diferencijalna jednačina ravnih talasa (28.55), samo što umesto u stoji proizvod ru , a umesto x figuriše r . Stoga, na osnovu opšteg integrala navedene jednačine (28.60) možemo odmah dobiti i opšti integral gornje jednačine

$$ru = \varphi\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{r}{c}\right),$$

gde su φ i ψ proizvoljne funkcije argumenta $t - \frac{r}{c}$ odnosno $t + \frac{r}{c}$, a otuda

$$u = \frac{1}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \psi\left(t + \frac{r}{c}\right). \quad (28.77)$$

Ispitajmo sad fizički smisao ovog opšteg rešenja. U tom cilju uzmimo partikularno rešenje kod koga je $\psi = 0$, koje napišimo u obliku

$$r u_1 = \varphi\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (28.78)$$

pa posmatrajmo dva stanja oscilovanja: na rastojanju r u trenutku t i na rastojanju $r + \Delta r$ u trenutku $t + \Delta t$. U ovom slučaju, za razliku od ravnog talasa, sama elongacija delića $u(r, t)$ u ova dva stanja nikad ne može biti jednaka, ali njen proizvod sa odgovarajućim rastojanjem r može. To će biti ako je ispunjen uslov

$$\varphi\left(t + \Delta t - \frac{r + \Delta r}{c}\right) = \varphi\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (28.79)$$

a otuda, zbog proizvoljnosti funkcije φ sledi da i odgovarajući argumenti moraju biti međusobno jednaki

$$t + \Delta t - \frac{r + \Delta r}{c} = t - \frac{r}{c},$$

tj. da između Δr i Δt mora postojati relacija

$$\Delta r = c \cdot \Delta t \quad (28.80)$$

Odavde vidimo da se takvo stanje oscilovanja sredine koje je određeno proizvodom $ru(r, t)$ prostire radijalno u svim pravcima sa nepromenjenom amplitudom, tako da se za vreme Δt pomeri za Δr brzinom c . Međutim, sama elongacija delića $u(r, t)$, koja nam neposredno daje meru poremećaja, zbog faktora $\frac{1}{r}$ opada sve više sa udaljavanjem od izvora poremećaja.

Na osnovu toga možemo zaključiti da član $\frac{1}{r} \varphi\left(t - \frac{r}{c}\right)$ predstavlja radijalno talasno prostiranje stanja oscilovanja iz izvora poremećaja brzinom c sa opadajućom amplitudom. Pošto se partikularni integral $\frac{1}{r} \psi\left(t + \frac{r}{c}\right)$ razlikuje od prvog samo po tome što umesto c stoji $-c$, on predstavlja talasno prostiranje stanja oscilovanja ka izvoru poremećaja. Međutim, ono se obično ne javlja u realnosti, sem u slučaju refleksije talasa na sfernim površinama, i stoga se najčešće uzima samo prvi član opšteg integrala (28.77).

Prema tome, rešenje jednačine (28.42) koje zavisi samo od rastojanja r od izvora poremećaja i vremena t prikazuje prostiranje malih poremećaja kroz elastičnu sredinu u vidu dva sferna talasa: divergentnog, koji se prostire radijalno iz izvora poremećaja u svim pravcima brzinom c , i konvergentnog ka izvoru poremećaja sa istom brzinom.

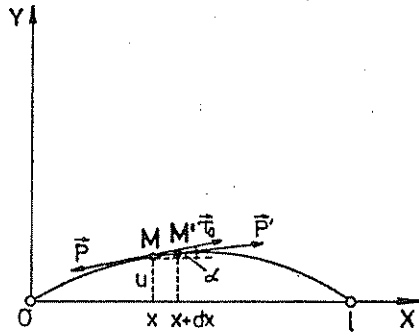
Napomenimo na kraju da sem prostornih talasa postoje i tzv. površinski talasi, koji nastaju pod dejstvom spoljašnjih sila i prostiru se samo po graničnoj površi dve različite sredine. U ovaj tip talasa spadaju na pr. zemljotresni talasi, koji se prostiru po graničnoj površi između dva sloja Zemljine kore sa jako različitim koeficijentima elastičnosti (tzv. Mohorovičićeva površ diskontinuiteta).

29. OSCILACIJE ŽICE

29.1. Transverzne oscilacije žice

Posmatrajmo sad specijalan, vrlo važan slučaj oscilacija tanke elastične žice i pretpostavimo da je ona potpuno savitljiva i da je njena težina zanemarljiva prema elastičnim silama. Neka je dužina žice l i neka je ona utvrđena na svojim krajevima (sl. 29.1). Ako se žica izvede iz ravnotežnog položaja u pravcu normalnom na pravac žice u nedeformisanom stanju, ona će početi da vrši transversalne oscilacije. Pri tome pretpostavimo da žica osciluje u jednoj ravni i da su deformacije žice vrlo male, usled čega će i ugao koji gradi tangenta u ma kojoj tački žice sa njenim prvobitnim pravcem biti takođe vrlo mali. Uzmimo ovaj prvobitni pravac

žice za X osu, ravan oscilovanja za XOY ravan, a jedan njen kraj za koordinatni početak. Uočimo sad element žice između x i $x+dx$ i primenimo na njega osnovnu jednačinu dinamike.



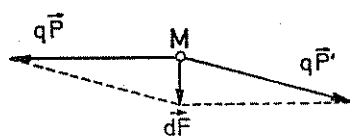
Sl. 29.1

U tom cilju označimo sile koje djeluju na jedinicu normalnog poprečnog preseka žice, tj. *napone* na krajevima tog elementa žice sa $\vec{P}$ i $\vec{P}'$, odgovarajuće jedinične vektore tangente sa $\vec{\tau}_0(x)$ i $\vec{\tau}_0(x+dx)$, a normalni poprečni presek žice sa q . Tada u tački M desjtuje sila $q\vec{P}$, a u tački M' sila $q\vec{P}'$, pa imajući u vidu da naponi u tačkama M i M' djeluju u suprotnim smerovima, rezultujuća sila koja djeluje na uočeni element žice je

$$d\vec{F} = q\vec{P}' + q\vec{P} = q\vec{P}'\vec{\tau}_0(x+dx) - q\vec{P}\vec{\tau}_0(x) \quad (29.1)$$

Pri tome intenziteti napona P i P' u tačkama M i M' vrlo malo se međusobno razlikuju, ali se njihovi pravci razlikuju i usled toga se pojavljuje *rezultanta* $d\vec{F}$, koja je *približno normalna na prvobitnom pravcu žice* (sl. 29.2). U odnosu na promenu pravca promena intenziteta je zanemarljiva, te možemo staviti $P' \approx P$, pa imamo

$$d\vec{F} = qP [\vec{\tau}_0(x+dx) - \vec{\tau}_0(x)] \quad (29.2)$$



Sl. 29.2

Ako uglove koje grade jedinični vektori $\vec{\tau}_0(x)$ i $\vec{\tau}_0(x+dx)$ sa pozitivnim smerom X-ose označimo sa α i $\alpha+d\alpha$, imamo

$$dF_x = qP [\cos(\alpha+d\alpha) - \cos\alpha], \quad dF_y = qP [\sin(\alpha+d\alpha) - \sin\alpha] \quad (29.3)$$

Pošto smo pretpostavili da su deformacije žice vrlo male, biće i uglovi α i $\alpha+d\alpha$ vrlo male veličine prvog reda, pri čemu je $d\alpha$ vrlo mala veličina drugog reda, pa možemo gornje izraze razviti u red i zaustaviti se na prvim članovima

$$\begin{aligned} \sin\alpha &\approx \alpha, & \sin(\alpha+d\alpha) &\approx \alpha+d\alpha, \\ \cos\alpha &\approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2, & \cos(\alpha+d\alpha) &\approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha+d\alpha)^2 \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

te dobijamo

$$dF_x = -qP \alpha d\alpha, \quad dF_y = qP d\alpha \quad (29.4)$$

Oдавде vidimo da je zaista dF_x zanemarljivo prema dF_y , pa imamo

$$dF \approx dF_y = qP [\sin(\alpha+d\alpha) - \sin\alpha] \quad (29.5)$$

Ovu rezultujuću silu možemo izraziti i pomoću elongacije odgovarajućih delića žice. Ako sa $u(x, t)$ označimo elongaciju delića na mestu x u trenutku t , koja se u ovom slučaju poklapa sa ordinatom y , u svakom fiksnom trenutku t_0 funkcija $u(x, t_0)$ daje nam raspored elongacija duž žice, tj. oblik žice prikazan na slici. Tada $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$ daje koeficijent pravca tangente žice u tački M, tj. predstavlja $\tan\alpha$, a zbog malog ugla α približno je $\tan\alpha \approx \sin\alpha$, pa imamo

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad (29.6)$$

Prema ovom obrascu izraz (29.5) dobija oblik

$$dF = qP \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \right] \quad (29.7)$$

Ako izraz $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}$ razvijemo u Taylor-ov red

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots$$

u tački x , imamo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x + dx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_x + \dots$$

te dobijamo približno, izostavljajući indeks x

$$dF = qP dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (29.8)$$

S druge strane, ova sila djelujući na uočeni element žice mase $dm = \rho q dx$, gde je ρ gustina žice, daje mu izvesno ubrzanje $\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_x$, te imamo prema osnovnoj jednačini dinamike

$$dF = dm \left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_x = \rho q dx \left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_x \quad (29.9)$$

Ovde $\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_x$ predstavlja ubrzanje delića žice na mestu x , a zbog vrlo malih pomeranja navedeni izraz približno predstavlja i drugi parcijalni izvod funkcije $u(x, t)$ po t pri stalnom x , tj. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, pa prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$dF = \rho q dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (29.10)$$

Iz obrazaca (29.8) i (29.10) tada dobijamo

$$\rho q dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = qP dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a otuda

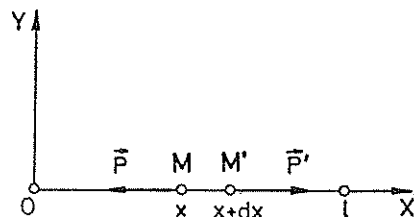
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (29.11)$$

Ova jednačina predstavlja *diferencijalnu jednačinu transverzalnih oscilacija žice*, koja određuje elongaciju delića žice kao funkciju položaja x i vremena t .

29.2. Longitudinalne oscilacije žice

Posmatrajmo opet istu žicu, ali neka se sad žica izvede iz ravnotežnog položaja u pravcu žice (sl. 29.3). Ona će tada početi da vrši *longitudinalne oscilacije*, koje se sastoje iz periodičnog istezanja i sabijanja delića duž žice. Pretpostavimo opet da su *deformacije žice vrlo male*. U ovom slučaju pravci napona P i P' uopšte se ne razlikuju, te je razlika njihovih intenziteta jedini razlog zbog koga se pojavljuje *rezultujuća sila* dF , koja ima pravac žice. Njen intenzitet iznosi

$$dF = qP' - qP = q[P(x+dx) - P(x)], \quad (29.12)$$



SL. 29.3

a ako izraz $P(x+dx)$ razvijemo u Taylor-ov red oko tačke x , imamo

$$P(x+dx) = P(x) + dx \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_x + \dots,$$

te dobijamo približno, izostavljajući indeks x

$$dF = q dx \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (29.13)$$

Ovde moramo koristiti *Hooke-ov zakon* (28.28), o kome smo govorili u prethodnom odeljku i prema kome je *relativna promena dužine žice srazmerna naponu u žici*

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} P, \quad (29.14)$$

gde je E Young-ov modul elastičnosti. U ovom slučaju imamo

$$l = dx, \quad \Delta l = u(x+dx) - u(x) \approx dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x,$$

te je

$$\frac{\Delta l}{l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x,$$

pa Hooke-ov zakon daje

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} P. \quad (29.15)$$

Odavde imamo

$$P = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

pa zamenom u obrascu (29.13) dobijamo

$$dF = q dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (29.16)$$

S druge strane, ako se ova sila napiše kao proizvod mase i ubrzanja i ima u vidu da se ubrzanje delića žice na mestu x u trenutku t zbog male izmene njegove apscise x u toku vremena može približno napisati u obliku $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, dobijamo na isti način kao i ranije obrazac (29.10).

Iz obrazaca (29.16) i (29.10) tada dobijamo

$$\rho q dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q E dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a otuda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (29.17)$$

To je *diferencijalna jednačina longitudinalnih oscilacija žice* i ona takođe određuje elongaciju delića kao funkciju položaja x i vremena t .

29.3. Talasno prostiranje poremećaja

Iz prethodnog izlaganja vidi se da diferencijalne jednačine transverzalnih i longitudinalnih oscilacija (29.11) i (29.17) imaju isti oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (29.18)$$

gde je za transverzne oscilacije

$$c_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}},$$

a za longitudinalne

$$c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ova jednačina se poklapa sa jednačinom (28.55) ravnih elastičnih talasa, koju smo proučavali u prethodnom odeljku i našli da je njen *opšti integral* dat obrascem (28.60)

$$u = \varphi \left(t - \frac{x}{c} \right) + \psi \left(t + \frac{x}{c} \right), \quad (29.19)$$

gde su φ i ψ proizvoljne funkcije argumenta $t - \frac{x}{c}$ odnosno $t + \frac{x}{c}$. Na pr. ako za funkcije φ i ψ uzmemo kosinusne funkcije, imamo

$$u = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + A \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right),$$

što možemo napisati i u obliku

$$u = 2A \cos \frac{\omega x}{c} \cdot \cos \omega t. \quad (29.20)$$

Prema analizi opšteg integrala (28.60) ma kog ravnog elastičnog talasa, ovo rešenje (29.19) za $x = x_0$ daje nam zavisnost elongacije određenog delića žice od vremena, a za $t = t_0$ prostorni

raspored elongacija delića žice u određenom trenutku. Ako se istovremeno menjaju obe nezavisno promenljive x i t , stanje oscilovanja žice je određeno vrednošću argumenta $t - \frac{x}{c}$ odnosno $t + \frac{x}{c}$, koje se u toku vremena može prostirati duž žice u oba smera. Pri tome prvi član opšteg integrala (29.19) predstavlja talasno prostiranje stanja oscilovanja u pozitivnom smeru X -ose, a drugi u negativnom smeru i to tako da se ovo stanje za vreme Δt pomeri za Δx brzinom c

$$\Delta x = c \cdot \Delta t \quad (29.21)$$

Prema tome, ako se u homogenoj i potpuno savitljivoj žici izazove neki mali poremećaj, on se prostire kroz žicu u oba smera u vidu ravnih talasa brzinom c , koja kod transversalnih oscilacija žice iznosi $\sqrt{F/\rho}$, a kod longitudinalnih oscilacija $\sqrt{E/\rho}$

29.4. Bernoulli-evo rešenje problema

Nadimo sad pogodan partikularni integral diferencijalne jednačine (29.18) koji zadovoljava početne i granične uslove ovog problema. Ovi uslovi sastoje se u sledećem. U početnom trenutku $t=0$ mora biti poznat raspored delića i njihovih brzina duž žice, tj. zavisnost funkcija u i $\frac{\partial u}{\partial t}$ od x za $t=0$

$$[u(x, t)]_{t=0} = f(x), \quad \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = F(x), \quad (29.22)$$

gde su $f(x)$ i $F(x)$ funkcije koje moraju biti unapred date i to su početni uslovi. Pored toga, žica je stalno utvrđena na svojim krajevima, te elongacija delića žice na njenim krajevima stalno mora biti jednaka nuli, tj.

$$u[(x, t)]_{x=0} = 0, \quad [u(x, t)]_{x=l} = 0, \quad (29.23)$$

to su granični uslovi karakteristični sa ovaj problem.

Primenimo sad metod razdvajanja promenljivih, tj. potražimo partikularni integral u obliku proizvoda dveju funkcija od kojih jedna zavisi samo od x , a druga samo od t

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (29.24)$$

Zamenom u diferencijalnoj jednačini (29.18) tada dobijamo

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

a otuda

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = K. \quad (29.25)$$

Pošto leva strana zavisi samo od t , a desna samo od x , ova jednakost za svako x i t biće samo tada zadovoljena ako se obe strane svedu na jednu i to istu konstantu, tzv. separacionu konstantu, koju smo označili sa K , pa odavde dobijamo

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - K c^2 T = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - K X = 0.$$

Rešenja ovih diferencijalnih jednačina za $K > 0$ su aperiódna, a za $K < 0$ periodična, a pošto samo periodična rešenja odgovaraju našem problemu, moramo uzeti $K < 0$, pa stavljajući $K = -k^2$ dobijamo

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0 \quad (29.26)$$

i

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0. \quad (29.27)$$

Opšti integral druge jednačine je

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx,$$

a zbog graničnih uslova (29.23) mora biti

$$0 = C_2, \quad 0 = C_1 \sin kl + C_2 \cos kl,$$

te je $C_2 = 0$, a $\sin kl = 0$, pa kl može imati samo vrednosti $n\pi$

$$k = n \frac{\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29.28)$$

i tako dobijamo

$$X = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (29.29)$$

Opšti integral prve jednačine je

$$T = C_3 \sin kct + C_4 \cos kct,$$

a uvodeći oznaku

$$\omega_n = kc = n \frac{\pi c}{l}, \quad (29.30)$$

dobijamo

$$T = C_3 \sin \omega_n t + C_4 \cos \omega_n t \quad (29.31)$$

Odgovarajući partikularni integral koji odgovara jednoj određenoj vrednosti n glasi

$$u_n = X \cdot T = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x (C_3 \sin \omega_n t + C_4 \cos \omega_n t),$$

što možemo napisati i u obliku

$$u_n = \sin \frac{n\pi}{l} x (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t), \quad (29.32)$$

Pošto je zbir više partikularnih integrala homogene linearne diferencijalne jednačine takođe partikularni integral te jednačine, zbir svih gornjih partikularnih integrala za sve vrednosti n predstavljaće opšte rešenje

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t), \quad (29.33)$$

koje ima oblik beskonačnog trigonometrijskog reda. U ovom redu koeficijente A_n i B_n treba tako odrediti da budu zadovoljeni i početni uslovi (29.22)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (29.34)$$

Ovi obrasci u stvari predstavljaju Fourierove redove za poznate funkcije $f(x)$ i $F(x)$, ukoliko se ove dve funkcije shvataju kao neparne periodične funkcije u intervalu $(-1, 1)$. Ako obe strane ovih jednačina pomnožimo sa $\sin \frac{m\pi}{1} x$ ($m=1, 2, 3 \dots$) i zatim integriramo po x od 0 do 1, imamo

$$\int_0^1 f(x) \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \sin \frac{n\pi}{1} x \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx$$

$$\int_0^1 F(x) \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \int_0^1 \sin \frac{n\pi}{1} x \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx.$$

Integrali na desnoj strani imaju vrednosti $\frac{1}{2}$ za $m=n$, a 0 za $m \neq n$, pa dobijamo

$$\int_0^1 f(x) \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx = B_m \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 F(x) \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx = A_m \omega_m \frac{1}{2},$$

a otuda

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{2}{\omega_m} \int_0^1 F(x) \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx \\ B_m &= 2 \int_0^1 f(x) \sin \frac{m\pi}{1} x \, dx \end{aligned} \right\} \quad (29.35)$$

Izraz (29.33) sa ovako određenim koeficijentima A_n i B_n predstavlja *Bernoulli-ovo rešenje* problema, koje zadovoljava navedene početne i granične uslove.

29.5. Svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije

Posmatrajmo sad takav partikularni integral diferencijalne jednačine (29.18) koji se harmonijski menja sa vremenom po zakonu

$$u(x, t) = \sin \omega t \cdot v(x), \quad (29.36)$$

gde je $v(x)$ ma kakva funkcija od x . Tada zamenom u navedenoj jednačini dobijamo

$$-\omega^2 \sin \omega t \cdot v(x) = c^2 \sin \omega t \frac{d^2 v}{dx^2},$$

tj.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} v = 0. \quad (29.37)$$

Ovu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$-\frac{d^2}{dx^2} v(x) = \frac{\omega^2}{c^2} v(x),$$

odakle vidimo, prema definiciji svojstvenog problema $\alpha f(x) = \lambda f(x)$, da gornja jednačina izražava svojstveni problem operatora $-d^2/dx^2$. To je diferencijalna jednačina koju mora zadovoljavati funkcija $v(x)$, a opšti integral ove jednačine je

$$v(x) = A \sin \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x, \quad (29.38)$$

gde su A i B integracione konstante. Potražimo sad ona rešenja koja zadovoljavaju i granične uslove (29.23)

$$v(0) = B = 0, \quad v(1) = A \sin \frac{\omega}{c} 1 + B \cos \frac{\omega}{c} 1 = 0. \quad (29.39)$$

Prvi uslov daje $B=0$, pa se drugi svodi na

$$\sin \frac{\omega}{c} 1 = 0,$$

a ovaj je uslov zadovoljen kad je $\frac{\omega}{c} 1 = n\pi$, tj. kad je

$$\omega = \frac{n\pi c}{1} \quad (n=1, 2, 3 \dots), \quad (29.40)$$

što se poklapa sa obrascem (29.30).

Prema tome, pri datim graničnim uslovima ω ne može imati ma kakve vrednosti, već mora biti ceo umnožak od $\frac{\pi c}{1}$ i ova diskretnost mogućih vrednosti ω je posledica graničnih uslova problema.

Ove moguće vrednosti $\frac{\omega^2}{c^2}$ nazivaju se *svojstvene vrednosti operatora* $-d^2/dx^2$ i svakom celom broju n odgovara jedna vrednost ω_n . Svako vrednosti ω_n u jednačini (29.37) odgovara izvesno rešenje ove jednačine $v_n(x)$, koje se naziva *svojstvena funkcija operatora* $-d^2/dx^2$. Pokažimo izvesne osobine ovih svojstvenih funkcija.

Posmatrajmo dve svojstvene vrednosti $\frac{\omega_n^2}{c^2}$ i $\frac{\omega_m^2}{c^2}$ i neka su odvođujuće svojstvene funkcije $v_n(x)$ i $v_m(x)$, koje moraju zadovoljavati diferencijalnu jednačinu (29.37)

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} + \frac{\omega_n^2}{c^2} v_n = 0, \quad \frac{d^2 v_m}{dx^2} + \frac{\omega_m^2}{c^2} v_m = 0 \quad (29.41)$$

Primetimo pre svega da su prema prirodi problema *sve svojstvene vrednosti* $\frac{\omega^2}{c^2}$ *posmatranog operatora uvek realne*, što je karakteristika svih *Hermite-ovih operatora*. Pomnožimo sad prvu jednačinu sa v_m , a drugu sa v_n i oduzmimo tako dobijene jednačine

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} v_m - \frac{d^2 v_m}{dx^2} v_n + \frac{1}{c^2} v_n v_m (\omega_n^2 - \omega_m^2) = 0,$$

a ovu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dv_n}{dx} v_m - \frac{dv_m}{dx} v_n \right) + \frac{1}{c^2} (\omega_n^2 - \omega_m^2) v_n v_m = 0 \quad (29.42)$$

Integralimo obe strane ove jednačine po x od 0 do 1, čime dobijamo

$$\left[\frac{dv_n}{dx} v_m - \frac{dv_m}{dx} v_n \right]_0^1 + \frac{1}{c^2} (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^1 v_n v_m dx = 0$$

Zbog graničnih uslova (29.23) mora biti $v_n = 0$ i $v_m = 0$ na krajevima žice $x=0$ i $x=1$, te integrirani deo otpada, pa dobijamo

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^1 v_n(x) v_m(x) dx = 0 \quad (29.43)$$

Ovde moramo razlikovati dva slučaja: 1) $n \neq m$ i 2) $n = m$. U prvom slučaju faktor ispred integrala različit je od nule, te ovaj integral mora biti jednak nuli

$$\int_0^1 v_n(x) v_m(x) dx = 0$$

U drugom slučaju faktor ispred integrala jednak je nuli, pa je gornja jednakost uvek identički zadovoljena za ma kakvu konačnu vrednost gornjeg integrala. Tada uvek možemo tako izabrati funkciju $v_n(x)$, pošto je ona kao integral linearne diferencijalne jednačine određena samo do multiplikativnog faktora, da ova proizvoljna vrednost integrala bude jedinica

$$\int_0^1 v_n^2(x) dx = 1,$$

što možemo zajedno napisati u obliku

$$\int_0^1 v_n(x) v_m(x) dx = \delta_{mn}, \quad (29.44)$$

gde je δ_{mn} Kronecker-ov simbol.

Funkcije koje zadovoljavaju prvi uslov nazivaju se *ortogonalne*, a funkcije koje zadovoljavaju drugi uslov *normirane*. Odavde vidimo da su *sve svojstvene funkcije ovog problema ortogonalne i da se uvek mogu tako izabrati da budu i normirane*. Napomenimo da su ove osobine posledice činjenice da diferencijalna jednačina (29.37) pri navedenim graničnim uslovima ima rešenja samo za određene, diskretne vrednosti parametra ω , te su i ove osobine posledice ovih graničnih uslova.

Poseban značaj ovih rezultata leži u tome što ovde imamo *diskretnost mogućih vrednosti nekog parametra*. Pošto je ova osobina jedna od bitnih karakteristika kvantne mehanike, ovim pojmovima i rezultatima odgovaraju potpuno analogi pojmovi i rezultati u kvantnoj mehanici.

Glava XI

KRETANJE FLUIDA

30. KINEMATIČKI I DINAMIČKI ELEMENTI FLUIDA

30.1. Realni i idealni fluidi

Glavna osobina tečnosti i gasova, kojom se razlikuju od čvrstih tela, jeste *velika pokretljivost njihovih delića*, zbog čega se oni zajednički proučavaju pod imenom *fluidi*. Drugim rečima dovoljna je i minimalna sila da izazove klizanje jednih delića fluida po drugim, što znači da se *fluidi skoro uopšte ne opiru promeni svog oblika*. Nasuprot tome, u pogledu stišljivosti postoje velike razlike između pojedinih vrsta fluida. Dok su tečnosti skoro nestišljive, gasovi pokazuju znatnu stišljivost, što zavisi i od uslova pod kojim se nalaze, te se *različite vrste fluida različito opiru promeni svoje zapremine*.

Pokretljivost delića fluida pri njegovom kretanju izaziva usled dodira susednih slojeva sa različitim brzinama *unutrašnje trenje* i ova osobina fluida naziva se *viskoznost*. Svi realni fluidi pokazuju u većoj ili manjoj meri viskoznost i ona zavisi od prirode fluida i veličine njegove deformacije. Fluidi kod kojih je viskoznost tako mala da se može potpuno zanemariti nazivaju se *idealni fluidi*, a za razliku od njih realni fluidi nazivaju se *viskozni fluidi*. Pošto se viskoznost ispoljava samo pri kretanju fluida, i to ako postoji gradijent brzine, jedan isti fluid pod izvesnim uslovima može se smatrati idealnim, a pod drugim viskozni, npr. viskozni fluid pri vrlo sporom kretanju može se često smatrati idealnim.

30.2. Dva načina proučavanja kretanja fluida

Za određivanje kretanja idealnog fluida potrebno je pre svega da znamo u svakom trenutku položaje i brzine svih delića fluida, a pored toga i pritisak i gustinu fluida u svakoj njegovoj tački. Prema tome kako se pristupa proučavanju kretanja postoje dva opšta metoda: *Lagrange-ov* i *Euler-ov metod*, o kojima smo govorili u kinematici kontinuuma i oni se na sledeći način mogu primeniti na fluide za nalaženje navedenih veličina.

Lagrange-ov metod sastoji se u tome što se *svaki delić fluida prati pri njegovom kretanju*, slično kao što se radi u mehanici sistema čestica. Da bismo uočili neki određeni delić, moramo znati njegov početni položaj u nekom trenutku $t=t_0$ i označimo njegove koordinate u tom trenutku sa a, b, c . Tada se za nezavisno promenljive uzimaju vreme t i početne koordinate delića a, b, c i sve tražene veličine treba izraziti u funkciji ovih veličina. Konačne jednačine kretanja uočenog delića imaće tada oblik

$$x=x(t, a, b, c), \quad y=y(t, a, b, c), \quad z=z(t, a, b, c), \quad (30.1)$$

a pored toga treba izraziti i pritisak na delić kao i gustinu delića u obliku

$$p = p(t, a, b, c), \quad \rho = \rho(t, a, b, c) \quad (30.2)$$

U ovim obrascima a, b, c karakterišu uočeni delić i menjajući ove početne koordinate delića dobićemo navedene veličine za svaki delić fluida, tj. potpuno rešenje problema.

Prema tome, u Lagrange-evom metodu za nezavisno promenljive uzimaju se vreme i početne koordinate delića, a nepoznate funkcije su koordinate delića, pritisak i gustina.

Euler-ov metod sastoji se u tome što se traži u svakom trenutku raspored brzina u prostoru. Ovde se za nezavisno promenljive uzimaju vreme t i prostorne koordinate x, y, z i sve tražene veličine treba izraziti u funkciji ovih veličina. Svakoj tački prostora (x, y, z) i trenutku t odgovara izvesna brzina v onog delića fluida koji se u posmatranom trenutku nalazi u toj tački. U sledećem trenutku u tu tačku prostora doći će neki drugi delić, koji u opštem slučaju nema istu brzinu kao njegov prethodnik. Stoga brzina u nekoj tački prostora neće biti samo funkcija položaja već i vremena, te ovde imamo polje brzine u obliku

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t) \quad (30.3)$$

Na sličan način i pritisak i gustinu možemo smatrati funkcijom položaja i vremena, te imamo i polja pritiska i gustine u obliku

$$p = p(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t) \quad (30.4)$$

Pri tome podvucimo da nasuprot Lagrange-evom metodu, gde x, y, z predstavljaju koordinate delića, ovde x, y, z predstavljaju prostorne koordinate, čime se iz osnova menja njihova uloga.

Dakle, u Euler-ovom metodu za nezavisno promenljive uzimaju se vreme i prostorne koordinate, a nepoznate funkcije su komponente brzine, pritisak i gustina.

Da bismo mogli rešiti problem kretanja fluida, moramo kako u Lagrange-evom tako i u Euler-ovom metodu naći pet nepoznatih funkcija, a za to nam je potreban sistem od pet skalarnih jednačina. Diferencijalna jednačina kretanja fluida daće nam tri skalarnje jednačine, međutim pored nje moraćemo naći još i dve dopunske jednačine, o čemu će kasnije biti više reči. Za praktičnu upotrebu Euler-ov metod je mnogo pogodniji od Lagrange-evog i stoga ćemo se u daljem izlaganju služiti samo Euler-ovim metodom.

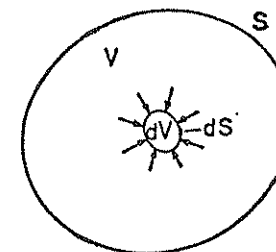
30.3. Naponsko stanje idealnog fluida

Kao što smo ranije videli, sva kinematička razmatranja kao i zakon održanja mase su opšte prirode i ne zavise od vrste deformabilnog tela. Tek uvođenje površinskih sila kao osnovnog i bitnog dinamičkog elementa ukazuje na razlike između raznih deformabilnih tela. Stoga je od osnovnog interesa proučiti naponsko stanje posmatranog fluida, čime se daje njegova osnovna karakteristika, po kome se ono razlikuje od svih ostalih deformabilnih tela.

Proučimo sad naponsko stanje idealnog fluida. Uočimo stoga neki vrlo mali delić fluida (sl. 30.1) i analizirajmo površinske sile koje na njega dejstvuju. Da bismo ispitali kakav pravac imaju površinske sile koje dejstvuju na ma koji element dS površi koja opkoljava uočeni delić fluida, pretpostavimo da one imaju i komponente u tangencijalnoj ravni ovog elementa površi. Tada bi ove tangencijalne komponente izazvale klizanje delića fluida jednih preko drugih, te bi se između susednih slojeva pojavilo unutrašnje trenje. Međutim, prema definiciji idealnog fluida nema unutrašnjeg trenja, pa stoga ne sme biti ni ovih tangencijalnih komponenta površinskih sila i to pri ma kakvom položaju elementa površi dS . Prema tome, površinske sile koje dejstvuju na ma koji delić idealnog fluida uvek su normalne na svakom elementu površi koja opkoljava ovaj delić fluida, bez obzira na orijentaciju tog ele-

menta površi, i iskustvo pokazuje da su ove površinske sile uvek usmerene ka unutrašnjosti uočenog delića fluida, tj. u suprotnom smeru od spoljne normale. To je osnovna karakteristika idealnog fluida, po kojoj se oni razlikuju od svih ostalih deformabilnih tela, pri čemu se vrednost površinske sile na jedinicu površine naziva pritisak i on je po definiciji pozitivan

$$dF = -p dS n_0 \quad (30.5)$$



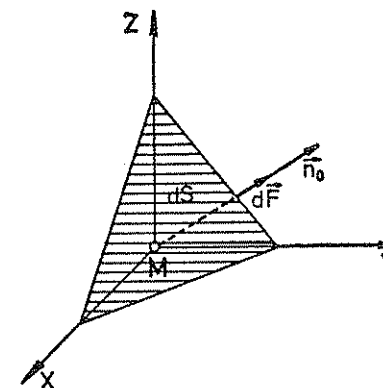
Sl. 30.1

Da bismo bolje videli smisao naponskog stanja idealnog fluida, posmatrajmo posebno dejstvo površinskih sila na element dS površi koja opkoljava uočeni delić fluida (sl. 30.2). Prema opštoj definiciji napona (27.3) i gore navedenoj osnovnoj karakteristici idealnih fluida napon, čiji intenzitet predstavlja pritisak, uvek ima pravac spoljne normale i uperen je suprotno od nje za ma kakvu orijentaciju elementa površi dS .

$$P = \frac{dF}{dS} = -p n_0 \quad (30.6)$$

Ako kosinuse pravca spoljne normale, tj. komponente jediničnog vektora n_0 označimo sa α, β i γ , odgovarajuće skalarnje jednačine glase

$$P_x = -p \alpha, \quad P_y = -p \beta, \quad P_z = -p \gamma \quad (30.7)$$



Sl. 30.2

Pišući ove obrasce u obliku

$$P_x = -p \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma$$

$$P_y = 0 \cdot \alpha - p \beta + 0 \cdot \gamma$$

$$P_z = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta - p \gamma,$$

dobijamo eksplicitan oblik relacija (27.10) za idealne fluide. Stoga je tenzor napona u ovom slučaju određen matricom

$$N = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (30.8)$$

odakle vidimo da se ovaj tenzor može prikazati kao proizvod skalara $-p$ i jediničnog tenzora $\mathcal{I}$, pa gornje jednačine možemo napisati u operatorskom obliku

$$P = \mathcal{I} \cdot n_0 = -p \mathcal{I} \cdot n_0 \quad (30.9)$$

Ovako formulisan tenzor napona karakteriše naponsko stanje idealnog fluida u okolini svake tačke.

30.4. Veza između naponskog stanja i deformacije

Na osnovu teorijskih rasuđivanja ne može se uspostaviti nikakva opšta veza između naponskog stanja i deformacije idealnog fluida, ta veza zavisi od same prirode fluida. Pošto je u svakom trenutku naponsko stanje određeno prostornom raspodelom pritiska, a deformacija prostornom raspodelom gustina, veza između naponskog stanja i deformacije biće uspostavljena ako se uspostavi izvesna zavisnost između pritiska i gustine. Ona u opštem slučaju zavisi i od apsolutne temperature T

$$F(p, \rho, T) = 0, \quad (30.10)$$

pri čemu oblik ove funkcije zavisi od prirode idealnog fluida. Ova jednačina naziva se *karakteristična jednačina* i ona karakteriše fizičko stanje fluida.

U slučajevima kad se temperatura fluida ne menja u toku kretanja, kao kod izotermičkih procesa, ili kad se promene temperature svode potpuno na promene gustine, kao kod adijabatskih i politropskih procesa, karakteristična jednačina ne zavisi od apsolutne temperature. Ako još pretpostavimo da se može rešiti po ρ , možemo je napisati u obliku

$$\rho = f(p) \quad (30.11)$$

Fluidi čija karakteristična jednačina ima ovaj oblik nazivaju se *barotropni fluidi*.

Ako je fluid barotropan, oblik karakteristične jednačine zavisi pre svega od prirode idealnog fluida, a ukoliko se menja temperatura i od vrste procesa. On se može odrediti empirijskim putem, a teorijskim samo pomoću metoda statističke fizike. Npr. za potpuno nestišljivu tečnost gustina je konstantna, nezavisna od pritiska, te karakteristična jednačina ima sasvim prost oblik

$$\rho = \text{const} \quad (30.12)$$

Za idealni gas u slučaju izotermičkih procesa na osnovu Boyle-Mariotte-ovog zakona $pV = \text{const}$ karakteristična jednačina glasi

$$\rho = k_1 p, \quad (30.13)$$

a u slučaju adijabatskih procesa na osnovu Poisson-ovog zakona $pV^\gamma = \text{const}$

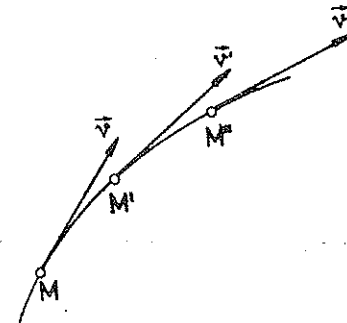
$$\rho = k_2 p^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (30.14)$$

gde je γ odnos specifičnih toplota pri stalnom pritisku i pri stalnoj zapremini.

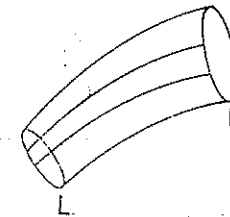
U daljem izlaganju ograničimo se samo na barotropne fluide, tj. takve idealne fluide čija karakteristična jednačina ima oblik (30.11).

30.5. Veličine koje karakterišu kretanje fluida

Da bismo prikazali raspored pravaca brzina u prostoru za određeni trenutak vremena, uvedimo *linije čije su tangente u ma kojoj tački kolinearne sa vektorom brzine* (sl. 30.3), takve linije nazivaju se *strujne linije* ili *linije toka*. Pri tome primetimo da se strujne linije u svakom trenutku sastoje od raznih delića fluida, dok se putanje delića sastoje od niza uzastopnih položaja istih delića pri njihovom kretanju, te se u opštem slučaju *strujne linije ne poklapaju sa putanjama delića fluida*. Ako kroz sve tačke neke zatvorene konture povučemo odgovarajuće strujne linije dobićemo tzv. *strujnu cev*, koja obuhvata mlaz fluida koji se u po smatranom trenutku kreće kroz oblast ograničenu omotačem ove cevi.



Sl. 30.3



Sl. 30.4

Prema definiciji strujnih linija njen upravljani element dr u ma kojoj njenoj tački M kolinearan je sa brzinom v u toj tački

$$dr = \lambda v, \quad (30.15)$$

gde je λ faktor srazmernosti. Odgovarajuće skalarne jednačine glase

$$dx = \lambda v_x, \quad dy = \lambda v_y, \quad dz = \lambda v_z,$$

a otuda dobijamo, imajući u vidu da su komponente brzine funkcije položaja i vremena

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (30.16)$$

To su *diferencijalne jednačine strujnih linija*, a njihovim rešavanjem za ma koji fiksiran trenutak t dobićemo konačne jednačine ovih linija.

Na sličan način uvode se i *linije čije su tangente u ma kojoj tački kolinearne sa vektorom ugaone brzine* (sl. 30.5), ove linije nazivaju se *vrtložne linije*. One nam daju raspored pravaca osa rotacije u prostoru za određeni trenutak vremena. Ako kroz sve tačke neke zatvorene konture povučemo odgovarajuće vrtložne linije, dobićemo tzv. *vrtložnu cev*. Prema definiciji vrtložnih linija za ma koji linijski element dr imamo

$$dr = \mu \omega, \quad (30.17)$$

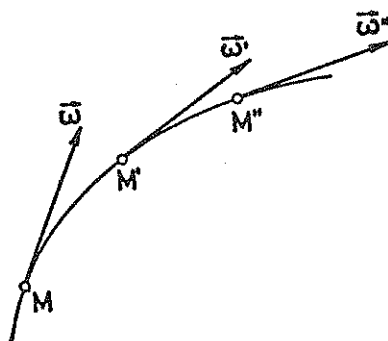
gde je μ faktor srazmernosti. Odgovarajuće skalarne jednačine su

$$dx = \mu \omega_x, \quad dy = \mu \omega_y, \quad dz = \mu \omega_z$$

a otuda

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)}, \quad (30.18)$$

to su diferencijalne jednačine vrtožnih linija.

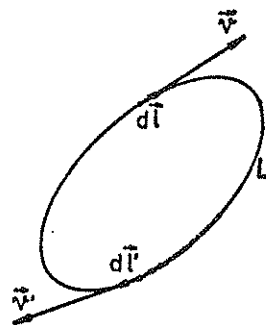


Sl. 30.5

U tesnoj vezi sa prethodnim pojmovima je veličina definisana obrascem

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (30.19)$$

ona se naziva *cirkulacija brzine duž konture L*. Da bismo videli smisao ovog pojma, posmatrajmo slučaj kad u polju brzina ima zatvorenih strujnih linija i za konturu uzmimo jednu od njih (sl. 30.6). Tada su u svakoj tački te konture vektori $\mathbf{v}$ i $d\mathbf{l}$ istog pravca i istog ili suprotnog



Sl. 30.6

smera, prema tome da li smo za smer obilaženja konture uzeli smer kretanja fluida ili suprotan smer. Stoga će cirkulacija brzine duž nje sigurno biti različita od nule i to uoliko veća ukoliko brzina duž nje ima veće vrednosti. Odavde vidimo da ako u polju brzine ima zatvorenih strujnih linija, cirkulacija brzine duž ma koje od njih je različita od nule i daje nam meru brzine strujanja fluida duž nje.

30.6. Hidromehanički smisao divergencije i rotora

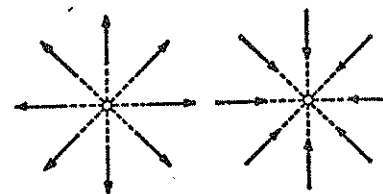
Na osnovu izloženoga možemo videti smisao divergencije i rotora. U tom cilju primenimo Gauss-ovu teoremu na brzinu $\mathbf{v}$

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{v} \, dV, \quad (30.20)$$

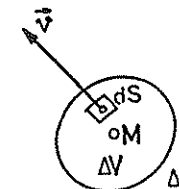
čime je data veza između površinskog integrala po ma kojoj zatvorenoj površi S i zapreminskog integrala po zapremini V koja je obuhvaćena ovom površinom. Prema definiciji fluksa fluida (27.48) integral na levoj strani možemo interpretirati kao fluks tečnosti jedinične gusline kroz površinu S. Ako je fluks različit od nule, tj. ako količina tečnosti koja izađe iz posmatrane zapremine nije jednaka količini tečnosti koja u nju uđe u jedinici vremena, integral na desnoj strani mora takođe biti različit od nule. To će biti moguće jedino tada ako je u izvesnim tačkama oblasti V, koje mogu obrazovati i kontinuum $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$.

Da bismo bolje sagledali smisao ovoga, istaknimo pre svega da bi zbog uslova $\rho = 1$ prema jednačini kontinuiteta u obliku (27.51) u svim tačkama trebalo da bude $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Stoga moramo pretpostaviti da se u ovom slučaju u nekim tačkama prostora mogu pojavljivati ili iščezavati izvesne količine tečnosti, koje učestvuju u njenom kretanju (sl. 30.7). Tačke u kojima se pojavljuje tečnost nazivaju se *izvori*, a u kojima iščezava — *ponori* i iz njih polaze odnosno u njima se svršavaju strujne linije. Neka je M jedna takva tačka (sl. 30.8) i opkolimo je izvesnom malom površi ΔS , koja obuhvata zapreminu ΔV . Tada prema teoremi o srednjoj vrednosti funkcije imamo

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \overline{\text{div } \mathbf{v}} \cdot \Delta V,$$



Sl. 30.7



Sl. 30.8

gde je $\overline{\text{div } \mathbf{v}}$ srednja vrednost od $\text{div } \mathbf{v}$ u zapremini ΔV . Ako pustimo da zapremina ΔV teži nuli obuhvatajući stalno tačku M, ova srednja vrednost težiće vrednosti divergencije brzine u tački M

$$(\text{div } \mathbf{v})_M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (30.21)$$

Ovaj izraz predstavlja fluks posmatrane tečnosti kroz površinu ΔS oko tačke M po jedinici zapremine ΔV .

Prema tome, ako postoje takve zatvorene površi kroz koje je fluks nestišljive tečnosti različit od nule, u oblasti fluida postoje tačke u kojima je $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$. U tim tačkama nalaze se izvori ili ponori, a divergencija brzine u ma kojoj od njih predstavlja količinu tečnosti jedinične gusline koja izađe iz jedinične zapremine oko ove tačke u jedinici vremena.

Smisao rotora možemo videti iz Stokes-ove teoreme, koja za brzinu $\mathbf{v}$ glasi

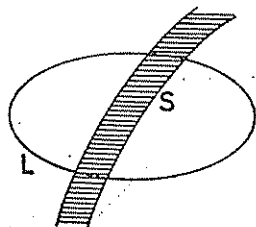
$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (30.22)$$

čime je data veza između linijskog integrala po ma kojoj zatvorenoj konturi L i površinskog integrala po površi S oivičenoj konturom L . Integral na levoj strani prema definiciji (30.19) predstavlja cirkulaciju duž konture L i ako je ona različita od nule, u polju brzine ima zatvorenih strujnih linija. U tom slučaju integral na desnoj strani takođe mora biti različit od nule, a to je moguće samo tada ako je u izvesnim tačkama površi S , koje mogu obrazovati i kontinuum, $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$. S druge strane, pri proučavanju deformacije videli smo da zbog nezavisnosti

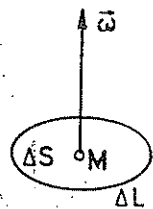
deformacionog dela brzine $\mathbf{v}$ od ugaone brzine ω kod deformabilnih tela važi relacija (26.29) kao i kod krutih tela

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega, \quad (30.23)$$

koja ovde daje zavisnost između brzine neke tačke M i ugaone brzine delića fluida. Stoga u posmatranom slučaju u tačkama u kojima je $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ nalaze se delići fluida koji se obrću. Npr. ako je u šrafiranoj oblasti na sl. 30.9 $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, a van te oblasti $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, cirkulacija po konturi L koja obuhvata šrafiranu oblast različita je od nule, a u ovoj oblasti nalaze se delići fluida koji se obrću.



Sl. 30.9



Sl. 30.10

Ispitajmo još detaljnije smisao pojma rotora i u tom cilju uočimo neku tačku M (sl. 30.10) i opkolimo je izvesnom konturom ΔL . Kroz ovu konturu i tačku M postavimo izvesnu površinu ΔS i to takvu da njena normala u tački M ima pravac ose rotacije delića fluida koji se nalazi u toj tački. Prema teoremi o srednjoj vrednosti funkcije imamo

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta S} (\text{rot } \mathbf{v})_n dS = \overline{(\text{rot } \mathbf{v})_n} \Delta S,$$

gde crta označava odgovarajuću srednju vrednost na površi ΔS . Ako pustimo da površina ΔS teži nuli sadržavajući stalno tačku M , ova srednja vrednost težiće vrednosti normalne komponente rotora brzine u tački M . Pošto prema konstrukciji površi i obrascu (30.23) $\text{rot } \mathbf{v}$ ima pravac normale na površini ΔS u tački M , gornja granična vrednost predstavljaće intenzitet vektora $\text{rot } \mathbf{v}$ odnosno 2ω

$$|\text{rot } \mathbf{v}|_M = 2\omega_M = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (30.24)$$

Prema tome, ako postoje takve konture duž kojih je cirkulacija različita od nule, tj. ako u polju brzine ima zatvorenih strujnih linija, u oblasti fluida postoje tačke u kojima je $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$. U tim tačkama delići fluida se obrću, a intenzitet rotora brzine u ma kojoj od njih predstavlja cirkulaciju duž konture oko jedinične površine normalne na pravac ose rotacije i daje meru brzine obrtanja delića fluida koji se nalazi u toj tački.

31. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA IDEALNOG FLUIDA

31.1. Osnovna jednačina dinamike idealnog fluida

Nadimo sad osnovnu jednačinu dinamike idealnog fluida, tj. odgovarajuću diferencijalnu jednačinu kretanja. U tom cilju pođimo od opšte jednačine kretanja deformabilnih sredina (27.45)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{N}), \quad (31.1)$$

gde je $\mathbf{f}$ zapreminska sila po jedinici mase, a $\mathcal{N}$ tenzor napona, koji za idealne fluide prema obrascu (30.9) ima oblik

$$\mathcal{N} = -p \mathcal{I} \quad (31.2)$$

Divergencija ovog tenzora biće, prema definiciji jediničnog tenzora

$$\nabla \cdot \mathcal{N} = -\nabla \cdot (p \mathcal{I}) = -(\nabla \cdot \mathcal{I}) p = -\nabla \cdot p,$$

tj.

$$\nabla \cdot \mathcal{N} = -\text{grad } p, \quad (31.3)$$

pa osnovna jednačina kretanja (31.1) za idealne fluide dobija vid

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (31.4)$$

Do ove jednačine može se doći i neposrednim putem na sledeći način. Posmatrajmo neki delić fluida zapremine dV (sl. 31.1) i neka je δS površ koja opkoljava ovaj delić, a dS element te površi. Primenimo sad osnovnu jednačinu dinamike na ovaj delić fluida koji ima masu ρdV . Zapreminska sila koja deluje na uočeni delić fluida iznosi $dm\mathbf{f} = \rho dV \cdot \mathbf{f}$, a površinska sila koja deluje na element površi dS prema obrascu (30.5) je $-pdS$, te je

rezultanta svih površinskih sila $-\oint_{\delta S} p dS$. Tada je ukupna sila koja deluje na ovaj delić

$$d\mathbf{F} = \rho dV \cdot \mathbf{f} - \oint_{\delta S} p dS, \quad (31.5)$$

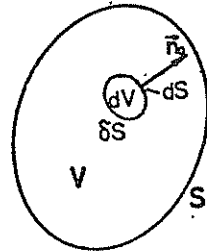
pa osnovna jednačina dinamike za ovaj delić fluida glasi

$$\rho dV \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho dV \cdot \mathbf{f} - \oint_{\delta S} p dS \quad (31.6)$$

Saberimo sad tako dobijene jednačine za sve deliće fluida u zapremini V , oivičenoj površi S . Pošto na svakom elementu dS zajedničke granične površi dva susedna delića fluida imamo isti pritisak p , a različito usmerene vektore dS , pri integraciji po unutrašnjim graničnim

površina δS pojavljivaće se u parovima članovi $-p dS$ i $p dS$, te se svi površinski integrali u unutrašnjosti ove zapremine poništavaju. Stoga preostaju samo površinski integrali po spoljnoj površi S , te dobijamo

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV - \oint_S p d\mathbf{S} \quad (31.7)$$



SL 31.1

Da bismo poslednji integral pretvorili u zapreminski, primenimo Gauss-ovu teoremu na vektor $p\mathbf{C}$, gde je $\mathbf{C}$ proizvoljan konstantan vektor

$$\oint_S p \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} (p \mathbf{C}) dV \quad (31.8)$$

Pošto je zbog konstantnosti vektora $\mathbf{C}$

$$\text{div} (p\mathbf{C}) = p \text{div} \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \text{grad} p = \mathbf{C} \cdot \text{grad} p,$$

gornji obrazac možemo napisati u obliku

$$\mathbf{C} \cdot \oint_S p d\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \int_V \text{grad} p dV,$$

a zbog proizvoljnosti vektora $\mathbf{C}$ odavde dobijamo

$$\oint_S p d\mathbf{S} = \int_V \text{grad} p dV \quad (31.9)$$

Tada jednačina (31.7) dobija oblik

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V (\rho \mathbf{f} - \text{grad} p) dV, \quad (31.10)$$

u kome na obema stranama figurišu integrali iste vrste.

U ovoj jednačini zapremina V je sasvim proizvoljna. Da bi ova jednakost važila za ma kakvu proizvoljnu zapreminu V , integrandi na obema stranama u svakoj tački moraju biti međusobno jednaki

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \text{grad} p,$$

a otuda

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (31.11)$$

To je osnovna jednačina dinamike idealnog fluida, koja se naziva i Eulerova jednačina.

31.2. Analiza osnovne jednačine

Izvršimo sad analizu osnovne jednačine dinamike idealnih fluida (31.11). Pre svega, treba istaknuti da se ova jednačina odnosi na delić fluida u trenutku t čije su početne koordinate a, b, c (Lagrange-ov metod), odnosno koji se u tom trenutku nalazi u tački (x, y, z) (Euler-ov metod). Pri tome ove veličine igraju ulogu nezavisno promenljivih, te je gornja jednačina ustvari parcijalna diferencijalna jednačina, ekvivalentna sistemu od beskonačno mnogo običnih diferencijalnih jednačina. Sem toga, ovde imamo dva tipa sila: zapreminske i površinske, a ubrzanje delića fluida potiče od svih zapreminskih sila i samo od onih površinskih sila koje se menjaju od tačke do tačke, pri čemu razlike u pritiscima izazivaju ubrzanja u pravcu najbrže promene pritiska.

Pošto samo zapreminske sile unapred znamo, u osnovnoj jednačini dinamike idealnih fluida imamo pet nepoznatih funkcija: koordinate delića x, y, z (Lagrange-ov metod) ili komponente brzine v_x, v_y, v_z (Euler-ov metod), pritisak p i gustina ρ . Stoga, kao i u opštoj dinamici deformabilnih tela, tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja u mehanici fluida nisu dovoljne za određivanje ovih pet nepoznatih veličina, ovaj sistem jednačina neophodno je dopuniti još dvema skalarnim jednačinama.

Pri rešavanju ove parcijalne diferencijalne jednačine moraju se uzeti samo ona rešenja koja zadovoljavaju date početne i granične uslove. Početni uslovi sastoje se u tome da u početnom trenutku $t = t_0$ mora biti poznat prostorni raspored brzina, pritiska i gustina u fluidu, tj. funkcije $\mathbf{v}(x, y, z, t_0)$, $p(x, y, z, t_0)$ i $\rho(x, y, z, t_0)$. Na pr. ako fluid u mirovanju počne da ističe iz nekog otvora u sudu u trenutku $t = t_0$, u tom početnom trenutku brzine delića u svim tačkama fluida jednake su nuli. Granični uslovi predstavljaju pak izvesna ograničenja u pogledu brzine, pritiska i gustine na graničnoj površi fluida, uslovljena prirodom samog problema. Na pr. ako fluid ima slobodnu površ, brzina delića na toj graničnoj površi ne može imati normalnu komponentu, a ako se fluid nalazi u dodiru sa atmosferom, pritisak na graničnoj površi mora biti jednak atmosferskom pritisku.

Ukažimo ovde na karakteristične razlike u ovom pogledu između mehanike sistema i mehanike fluida u vidu sledećeg šematskog pregleda:

	Mehanika sistema	Mehanika fluida
Nezavisno promenljive	vreme t	poč. koord. delića a, b, c i vreme t ili prost. koordinate x, y, z „ „ t
Nepoznate funkcije	koordinate čestica x_y, y_y, z_y	koord. delića x, y, z , pritisak p i gustina ρ . ili komp. brzine v_x, v_y, v_z „ „ p „ „ ρ
Difer. jednačine kretanja	sistem običnih dif. jednačina	jedna parcijalna dif. jednačina
Tipovi sila	sile na čestice F_y	dva tipa sila: zapreminske i površinske
Vrste uslova	početni uslovi $\mathbf{v}_0$ i $\mathbf{v}_{y0}$	dve vrste uslova: početni i granični
Zatvorenost jednačina kretanja	dif. jednačine kretanja dovoljne	dif. jednačine kretanja nedovoljne

31.3. Potencijal ubrzanja

U izvesnim slučajevima osnovna jednačina dinamike idealnog fluida može se transformisati u jednostavniji oblik. Ako pretpostavimo da je *fluid barotropan*, tj. da njegova karakteristična jednačina ima vid (30.11), uvedimo veličinu

$$\psi(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{f(p)}. \quad (31.12)$$

Tada prema definiciji integrala imamo

$$\frac{d\psi}{dp} = \frac{1}{f(p)} = \frac{1}{\rho},$$

pa će biti

$$\text{grad } \psi = \frac{d\psi}{dp} \text{ grad } p = \frac{1}{\rho} \text{ grad } p, \quad (31.13)$$

te jednačina (31.11) dobija vid

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \text{grad } \psi \quad (31.14)$$

Ako još pretpostavimo da su *zapreminske sile potencijalne*,

$$\mathbf{f} = -\text{grad } \varepsilon_p, \quad (31.15)$$

osnovna jednačina dinamike idealnog fluida glasi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } \varepsilon_p - \text{grad } \psi,$$

što možemo napisati i u obliku,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } Q, \quad (31.16)$$

gde smo stavili

$$Q = \varepsilon_p + \psi \quad (31.17)$$

Ovako uvedena veličina Q naziva se *potencijal ubrzanja* i ona igra veliku ulogu u proučavanju kretanja idealnog fluida.

Da bismo bolje videli smisao pojedinih veličina, zadržimo se na obliku jednačine (31.14). Odatle vidimo da se drugi član, koji potiče od površinskih sila, može izraziti kao negativni gradijent izvesne skalarne funkcije, te ova funkcija ψ predstavlja odgovarajuću potencijalnu energiju. Pošto ovaj član stoji uporedo sa zapreminskom silom $\mathbf{f}$ koja odgovara jedinici mase, veličina ψ , definisana obrascem (31.12), predstavlja potencijalnu energiju fluida koja potiče od površinskih sila po jedinici mase. Ukoliko su i zapreminske sile potencijalne, veličina ε_p je potencijalna energija fluida koja potiče od zapreminskih sila po jedinici mase, te potencijal ubrzanja Q , definisan obrascem (31.17), predstavlja ukupnu potencijalnu energiju fluida po jedinici mase.

31.4. Euler-ov metod za fluide

Da bismo primenili Eulerov metod, moramo kao nezavisno promenljive uzeti prostorne koordinate x, y, z i vreme t , a kao nepoznate funkcije komponente brzine v_x, v_y, v_z , pritisak p i gustinu ρ . Tada pre svega moramo u tom smislu transformisati ubrzanje delića $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ u osnovnoj jednačini dinamike idealnog fluida (31.11).

Pošto sad brzinu $\mathbf{v}$ smatramo funkcijom položaja i vremena, imamo

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz \quad (31.18)$$

Ovaj obrazac određuje promenu brzine uočenog delića fluida u intervalu vremena $(t, t+dt)$, tj. razliku brzina istog delića od kojih prva odgovara položaju $(x+dx, y+dy, z+dz)$ i trenutku $t+dt$, a druga položaju (x, y, z) i trenutku t . Ako zadnja tri člana napišemo kao rezultat primene odgovarajućeg operatora na funkciju $\mathbf{v}$ i uočimo da se ovaj operator može napisati kao skalarni proizvod vektora $d\mathbf{r}$ i ∇ ,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (31.19)$$

Analizirajmo sad posebno članove ovog izraza. Ako fiksiramo položaj, biće $d\mathbf{r}=0$, pa odgovarajući izraz

$$(d\mathbf{v})_l = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \quad (31.20)$$

predstavlja *elementarnu promenu brzine delića fluida usled menjanja polja brzine u toku vremena* i naziva se *lokalna promena brzine*. Ako pak fiksiramo trenutak, biće $dt=0$, a odgovarajući izraz

$$(d\mathbf{v})_k = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (31.21)$$

predstavlja *elementarnu promenu brzine delića fluida usled različitih brzina u raznim tačkama* i naziva se *konvektivna promena brzine*.

Odgovarajuća promena brzine delića $d\mathbf{v}$, sastavljena iz lokalne i konvektivne promene, naziva se *totalna ili supstancijalna promena brzine*, pri čemu se poslednjim nazivom želi istaći da se ona odnosi na delić posmatrane supstance u kretanju. Ako izraz (31.19) podelimo sa dt , dobićemo i odgovarajući izraz za ubrzanje uočenog delića fluida

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (31.22)$$

Prvi član ovog izraza naziva se *lokalno ubrzanje*, a drugi *konvektivno ubrzanje*.

Odatle vidimo da se ubrzanje delića fluida sastoji iz lokalnog i konvektivnog ubrzanja, pri čemu prvo karakteriše promenu brzine delića usled menjanja polja brzine sa vremenom, a drugo promenu brzine usled različitih brzina u raznim tačkama.

Sad možemo napisati i osnovnu jednačinu dinamike idealnog fluida u obliku koji odgovara Eulerovom metodu za fluide. Zamenom nadenog izraza za ubrzanje u jednačini (31.11) dobijamo

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (31.23)$$

Ova jednačina naziva se takođe *Eulerova jednačina* i ona predstavlja *diferencijalnu jednačinu kretanja idealnog fluida u Euler-ovom metodu*.

Potpun sistem jednačina

Pošto su nepoznate funkcije u Euler-ovom metodu komponente brzine, pritisak i gustina, pored Euler-ove jednačine, kojoj odgovaraju tri skalarne, moramo imati još dve jednačine za određivanje ovih nepoznatih funkcija. Ako se ograničimo na barotropne fluide, te jednačine su jednačina kontinuiteta (27.51) i karakteristična jednačina (30.11), te imamo sistem jednačina

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho &= f(p) \end{aligned} \right\} \quad (31.24)$$

To je potpun sistem jednačina u Euler-ovom metodu, koji određuje navedene nepoznate funkcije. Ako imamo u vidu da operator $\mathbf{v} \cdot \nabla$ u razvijenom obliku glasi

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

prethodni sistem jednačina možemo napisati u obliku

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} &= 0 \\ \rho &= f(p) \end{aligned} \right\} \quad (31.25)$$

Ovaj sistem jednačina predstavlja sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina u kojima su nepoznate funkcije komponente brzine v_x, v_y, v_z , pritisak p i gustina ρ , a nezavisno promenljive prostorne koordinate x, y, z i vreme t . Rešavanjem ovog sistema jednačina uz date početne i granične uslove možemo dobiti ove nepoznate funkcije u obliku

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t) \\ p &= p(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (31.26)$$

Međutim, treba napomenuti da je ovaj sistem jednačina integrabilan samo u vrlo malom broju slučajeva i to pod specijalnim početnim i graničnim uslovima.

Prema tome, ako je fluid barotropan, Euler-ova diferencijalna jednačina kretanja, jednačina kontinuiteta i karakteristična jednačina potpuno određuju kretanje idealnog fluida.

31.5. Transformisana Euler-ova jednačina

U izvesnim slučajevima Euler-ova jednačina u obliku (31.23) nije pogodna za rešavanje problema, a naročito onih kod kojih se javlja rotacija fluida, koja je okarakterisana veličinom $\text{rot } \mathbf{v}$. Da bismo je transformisali u pogodniji oblik, razvijmo izraz $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$ po pravilima vektorske analize, označavajući zvezdicom članove na koje treba primeniti Hamilton-ov operator ∇ . Tako dobijamo

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}^*) = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^*, \quad (31.27)$$

a pošto je

$$\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \nabla (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}) + \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*) = 2 \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*),$$

biće

$$\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right),$$

pa prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (31.28)$$

Oдавде imamo

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v},$$

pa Euler-ova jednačina (31.23) dobija oblik

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (31.29)$$

i ona se naziva transformisana Euler-ova jednačina ili Gromeko-Lamb-ova jednačina.

Pod izvesnim dopunskim pretpostavkama ova se jednačina može uprostiti. Ako karakteristična jednačina ima oblik (30.11), tj. ako je fluid barotropan, prema jednačini (31.14) gornja jednačina svodi se na

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{f} - \text{grad } \psi, \quad (31.30)$$

a ako su sem toga i zapreminske sile potencijalne, prema (31.16) gornja jednačina dobija vid

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad } Q. \quad (31.31)$$

31.6. Helmholtz-ova jednačina

Potražimo još diferencijalnu jednačinu koja bi određivala ugaonu brzinu delića idealnog fluida i pretpostavimo samo da je fluid barotropan. U tom cilju formirajmo rotore obeju strana transformisane Euler-ove jednačine (31.30)

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot} \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot } \mathbf{f} - \text{rot} \text{grad } \psi,$$

a pošto je rotor gradijenta ma kog skalara identički jednak nuli, otpadaju drugi član sa leve strane i drugi sa desne

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot } \mathbf{f} \quad (31.32)$$

Izmenimo sad red operacija u prvom članu i stavimo prema obrascu (30.23) $\text{rot } \mathbf{v} = 2 \vec{\omega}$, čime unosimo traženu ugaonu brzinu i dobijamo

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{f} \quad (31.33)$$

Razvijmo sad drugi član, označavajući zvezdicom vektore na koje treba primeniti Hamilton-ov operator

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) &= \nabla \times (\mathbf{v}^* \times \boldsymbol{\omega}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}^* - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) + \mathbf{v} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^*) - \\ &\quad - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}^*, \end{aligned}$$

a pošto je $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{div} \left(\frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \right) = 0$, jednačina (31.33) u eksplisitnom obliku glasi

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{f} \quad (31.34)$$

Imajući još u vidu da je

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega},$$

prethodnu jednačinu možemo napisati konciznije

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{f}, \quad (31.35)$$

a ako ovde još $\text{div} \mathbf{v}$ zamenimo iz jednačine kontinuiteta (27.52), dobijamo

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{f}$$

ili, posle deobe sa ρ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \frac{1}{2\rho} \text{rot} \mathbf{f} \quad (31.36)$$

To je diferencijalna jednačina koja određuje odnos ugaone brzine i gustine i ona se naziva *Helmholtz-ova jednačina*. Ako još pretpostavimo da su *zapreminske sile potencijalne*, otpašće poslednji član, jer je $\text{rot} \mathbf{f} = -\text{rot} \text{grad} \varepsilon_p = 0$, pa se Helmholtz-ova jednačina svodi na

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad (31.37)$$

Ovim postupkom istovremeno su eliminisani dinamički parametri iz osnovne jednačine dinamike idealnih fluida: zapreminske sile i pritisak i stoga je ona veoma pogodna za proučavanje osobina kretanja onih idealnih barotropnih fluida podvrgnutih dejstvu potencijalnih zapreminskih sila gde ugaona brzina igra bitnu ulogu.

32. VRSTE KRETANJA IDEALNOG FLUIDA

32.1. Mirovanje fluida

Ako se idealan fluid nalazi u ravnoteži, ubrzanje ma kog delića fluida jednako je nuli, te se Euler-ova jednačina (31.11) svodi na oblik

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (32.1)$$

Ova jednačina predstavlja *uslov ravnoteže idealnog fluida*, a u slučaju barotropnih fluida, tj. fluida čija karakteristična jednačina ima oblik (30.11) na osnovu obrasca (31.13) ovaj uslov možemo napisati i u obliku

$$\mathbf{f} = \text{grad} \psi \quad (32.2)$$

Odavde vidimo da *samo konzervativne zapreminske sile mogu održavati idealan barotropan fluid u ravnoteži*.

Primenimo sad ovu jednačinu na fluid u polju Zemljine teže pod pretpostavkom da nema nikakvih drugih zapreminskih sila. Tada je zapreminska sila po jedinici mase

$$\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_3, \quad (32.3)$$

gde je $\mathbf{e}_3$ jedinični vektor Z-ose, pa uslov ravnoteže ima oblik

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = -g\mathbf{e}_3, \quad (32.4)$$

a odgovarajuće skalarne jednačine glase

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (32.5)$$

Prve dve jednačine pokazuju da pritisak ne zavisi ni od x ni od y , već samo od z , te se treća jednačina svodi na

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g,$$

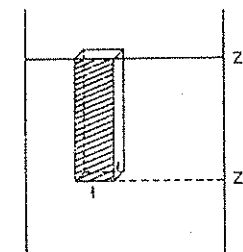
a otuda

$$dp = -\rho g dz,$$

pa integracijom od nekog stalnog nivoa z_0 do ma kog nivoa z dobijamo

$$p - p_0 = -\int_{z_0}^z \rho g dz \quad (32.6)$$

Ovaj obrazac određuje *statički pritisak fluida* i prema njemu je *razlika pritisaka na dva nivoa u fluidu jednaka težini stuba fluida nad jediničnom površinom između ovih nivoa*. Ako je



Sl. 32.1

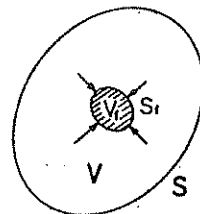
reč o tečnosti i ako z_0 označava nivo slobodne površine (sl. 32.1), ovaj obrazac određuje poznati *hidrostatički pritisak*.

Pretpostavimo sad da je na ma kakav način pritisak p_0 na nivou z_0 promenjen za Δp , pri čemu se nije poremetila ravnoteža fluida. Pošto se time ništa neće promeniti na desnoj strani jednačine (32.6), razlika $p - p_0$ mora ostati nepromenjena, te se i pritisak p u ma kojoj tački fluida mora promeniti za Δp . Oдавде vidimo da se *promena pritiska u fluidu u stanju ravnoteže prenosi u svim pravcima podjednako (Pascal-ov zakon)*.

Čvrsto telo u fluidu

Posmatrajmo sad ma kakvo čvrsto telo potopljeno u fluid (sl. 32.2) i neka je zapremina tog čvrstog tela V_1 , a površina S_1 , pa ispitajmo dejstvo fluida na njega. Ovo dejstvo određuje *rezultanta svih površinskih sila kojima fluid dejstvuje na to čvrsto telo i ona iznosi*

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_1} p \, d\mathbf{S}, \quad (32.7)$$



Sl. 32.2

a prema obrascu (31.9) ovaj površinski integral možemo pretvoriti u zapreminski

$$\mathbf{R} = - \int_{V_1} \text{grad } p \, d\mathbf{V} \quad (32.8)$$

S druge strane, prema uslovu ravnoteže idealnog fluida u polju Zemljine teže (32.4) imamo

$$\text{grad } p = -\rho \, \mathbf{g} \, \mathbf{e}_3,$$

pa zamenom u gornjem obrascu dobijamo

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_3 \int_{V_1} \rho \, g \, dV \quad (32.9)$$

Ovaj obrazac određuje rezultujuću silu kojom fluid dejstvuje na potopljeno čvrsto telo, pri čemu je intenzitet ove sile određen gornjim integralom.

Pošto $\rho \, dV \cdot g$ predstavlja težinu delića fluida koji bi se nalazio u nekom elementu dV zapremine V_1 kada se u toj zapremini ne bi nalazilo čvrsto telo, gornji integral predstavlja težinu istisnutog fluida. Sem toga, vidimo da ova rezultujuća sila ima pravac i smer jediničnog vektora $\mathbf{e}_3$ u pravcu i smeru Z-ose, te je uperena naviše i stoga se naziva *potisak*, pa možemo reći:

Svako čvrsto telo potopljeno u idealni fluid u stanju ravnoteže trpi potisak koji je jednak težini istisnutog fluida i za toliko prividno gubi od svoje težine. Ovaj zakon predstavlja poznati Arhimed-ov zakon.

32.2. Stacionarno kretanje

Od svih kretanja najprostije je takvo kretanje pri kome se *brzina, pritisak i gustina u ma kojoj tački fluida ne menjaju u toku vremena*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (32.10)$$

Takvo kretanje naziva se *stacionarno kretanje* i u tom slučaju brzina, pritisak i gustina zavise samo od položaja

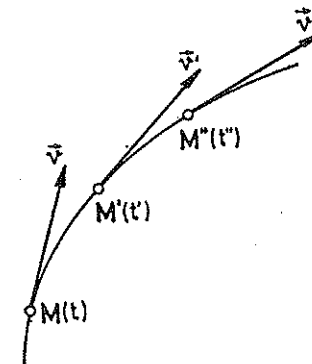
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z), \quad p = p(x, y, z), \quad \rho = \rho(x, y, z) \quad (32.11)$$

Mi smo ranije uveli strujne linije kao linije čije su tangente u ma kojoj tački kolinearne sa vektorom brzine, a u ovom slučaju njihove diferencijalne jednačine (30.16) glase

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z)} \quad (32.12)$$

Pošto u ovim jednačinama ne figurira vreme t , *strujne linije pri stacionarnom kretanju ne menjaju se u toku vremena*. Na osnovu toga možemo izvesti sledeći važan zaključak o putanju delića fluida.

Uočimo neki delić fluida i nekoliko njegovih položaja u toku kretanja (s.l. 32.3). Tangente u ovim tačkama putanje kolinearne su sa brzinama $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \dots$ u odgovarajućim trenucima $t, t', t'' \dots$ a pošto se ove brzine ne menjaju u toku vremena, to su istovremeno i brzine koje odgovaraju različitim delićima na strujnoj liniji u istom trenutku, npr. trenutku t . Stoga je putanja uočenog delića istovremeno i linija čije su tangente u *ma kom trenutku* kolinearne sa odgovarajućim vektorima brzina, te se poklapa sa strujnom linijom koja prolazi kroz tačku M .



Sl. 32.3

Prema tome, pri stacionarnom kretanju fluida strujne linije predstavljaju putanje delića, pri čemu se na svakoj strujnoj liniji uvek nalaze isti strujni delići fluida. Međutim naglasimo da ovaj stav važi samo za stacionarno kretanje.

Bernoulli-ev integral

Pokažimo sad da pod pretpostavkom da je fluid idealan i barotropan, a zapreminske sile konzervativne uvek postoji jedan integral kretanja, koji predstavlja zakon o održanju energije duž strujne linije, prema tome svi delići na istoj strujnoj liniji imaju istu energiju. U tom cilju podimo od transformisane Euler-ove jednačine u obliku (31.31), u kojoj zbog prvog uslova (32.10) otpada prvi član

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad } Q \quad (32.13)$$

Pomnožimo obe strane ove jednačine sa $\mathbf{dr}$ kojim upravljanim elementom $d\mathbf{r}$ strujne linije, koji je istovremeno i elementarno pomeranje odgovarajućeg delića fluida, čime dobijamo

$$d\mathbf{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = -d\mathbf{r} \cdot \text{grad } Q \quad (32.14)$$

Da bismo transformisali ovu jednačinu, primetimo da je promena m kakve skalarne funkcije položaja $f(x, y, z)$ pri pomeranju za $d\mathbf{r}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } f$$

Na osnovu ovog obrasca prvi član gornje jednačine je $d \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$, a zadnji $-dQ$, dok drugi član $d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})$ zbog kolinearnosti vektora $d\mathbf{r}$ i $\mathbf{v}$ otpada, pa imamo

$$d \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -dQ \quad (32.15)$$

Odavde integracijom dobijamo

$$\frac{1}{2} v^2 = -Q + \text{const},$$

a zamenjujući Q njegovom vrednošću (31.17), prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + \psi = \text{const} \quad (32.16)$$

Ova jednačina predstavlja jedan *integral kretanja* i naziva se *Bernoulli-eva jednačina*. Prvi član predstavlja kinetičku energiju makrofizičkog kretanja jedinice mase, drugi potencijalnu energiju jedinice mase usled zapreminskih sila, a treći prema analizi jednačina (31.14) potencijalnu energiju jedinice mase usled površinskih sila. Stoga gornja jednačina izražava zakon o održavanju makrofizičke mehaničke energije jedinice mase duž strujne linije, pri čemu se konstanta odnosi na jednu određenu strujnu liniju. Ako sa jedne strujne linije predjemo na drugu, ova konstanta će imati neku drugu vrednost.

Prema tome, pri stacionarnom kretanju barotropnog idealnog fluida pod pretpostavkom da su zapreminske sile konzervativne zbir makrofizičke kinetičke i potencijalne energije jedinice mase je stalan duž svake strujne linije.

Ako je fluid nestišljiv i ako je zapreminska sila Zemljina teža, gornja jednačina može dobiti prostiji oblik. Tada je $\rho = \text{const}$, pa je prema obrascu (31.12) $\psi = \frac{p}{\rho}$, a $\varepsilon_p = gz$, te jednačina (32.16) postaje

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (32.17)$$

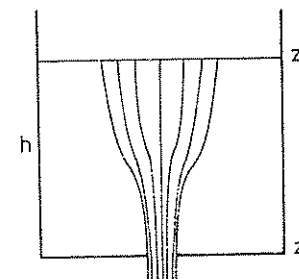
što se obično piše u obliku

$$p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Const},$$

Ova jednačina daje vezu između pritiska, visine i brzine duž svake strujne linije.

Primenimo ovu poslednju jednačinu na *isticanje teške nestišljive tečnosti iz suda* (sl. 32.4) i u tom cilju uočimo jednu vertikalnu strujnu liniju od nivoa slobodne površi do otvora. Ako indeksom 0 označimo veličine koje se odnose na nivo slobodne površine, a indeksom 1 veličine koje se odnose na nivo otvora, gornja jednačina daje

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \quad (32.18)$$



Sl. 32.4

Pretpostavljajući da je slobodna površina tečnosti u sudu dovoljno velika, tako da možemo uzeti da se njen nivo približno ne menja, i označavajući sa p_a atmosferski pritisak, imamo

$$v_0 \approx 0, \quad p_0 = p_1 = p_a,$$

pa dobijamo

$$\frac{1}{2} v_1^2 = g(z_0 - z_1) = gh,$$

tj.

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (32.19)$$

Ovaj obrazac određuje brzinu isticanja tečnosti iz suda, pa imajući u vidu zakone slobodnog pada, možemo reći:

Brzina isticanja teške nestišljive tečnosti iz suda jednaka je brzini koju bi tečnost dobila kad bi slobodno pala od nivoa slobodne površine do otvora suda (Torricelli-eva teorema).

32.3. Potencijalno kretanje

Kretanje pri kome je za sve deliće posmatrane količine fluida

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad (32.20)$$

naziva se *potencijalno kretanje*. Pošto smo videli da je uvek $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, u ovom slučaju delići fluida se ne obrću, stoga se ovo kretanje zove i *bezvrtložno*.

Pošto je uvek

$$\text{rot grad } \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0,$$

vidimo da se zbog uslova (32.20) brzina delića može prikazati kao *gradijent nekog skalara*

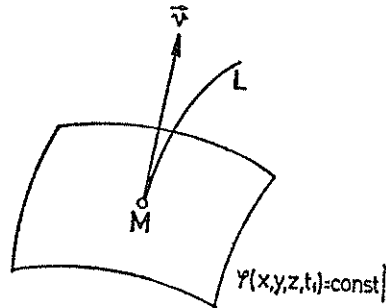
$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad (32.21)$$

Ovako uveden skalar φ , koji u opštem slučaju može zavisiti od položaja i vremena, naziva se *potencijal brzine*, otkud i potiče naziv ove vrste kretanja. Na ovaj način ispitivanje polja brzine svedeno je na ispitivanje polja potencijala brzine, čime je broj nepoznatih funkcija sveden od tri na jedan.

Pri ovome treba imati na umu da je ovde reč o brzini delića, te se i *potencijal brzine odnosi na delić fluida, a ne na tačku prostora*. To znači da ako se brzina nekog delića u izvesnom trenutku može izraziti kao gradijent nekog skalara — potencijala brzine, ovaj se delić tada ne obrće i ta je osobina vezana za ovaj delić fluida, a ne za odgovarajuću tačku prostora, u koju docnije može doći i neki delić koji se obrće.

Ako uočimo geometrijsko mesto tačaka istih potencijala brzine

$$\varphi(x, y, z, t) = \text{const}, \quad (32.22)$$



Sl. 32.5

dobićemo familiju *ekvipotencijalnih površi*, pri čemu svakom trenutku t i svakoj vrednosti gornje konstante odgovara jedna određena površ (sl. 32.5). Pošto je gradijent skalarne funkcije uvek normalan na odgovarajućoj ekvivalarnoj površi, prema obrascu (32.21) vidimo da je vektor brzine uvek normalan na odgovarajućoj površi $\varphi(x, y, z, t) = \text{const}$, te *strujne linije u svakom trenutku predstavljaju ortogonalne trajektorije ovih ekvipotencijalnih površi*.

Jednu značajnu karakteristiku potencijalnog kretanja daje nam pojam cirkulacije brzine (30.19), koja u ovom slučaju ima oblik

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} \quad (32.23)$$

Pošto je elementarna promena funkcije φ pri pomeranju za $d\mathbf{l}$ u nekom *fiksiranom* trenutku

$$d\varphi = d\mathbf{l} \cdot \text{grad } \varphi,$$

cirkulaciju brzine možemo napisati u obliku

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L d\varphi, \quad (32.24)$$

a vrednost ovog integrala između dveju tačaka A i B iznosi

$$\int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_{(A)}. \quad (32.25)$$

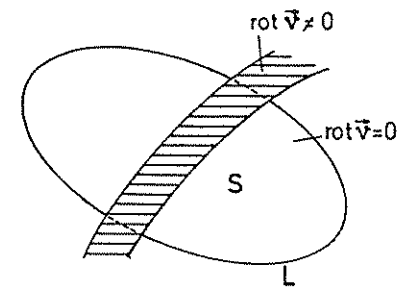
Oдавде vidimo da *cirkulacija brzine duž ma koje konture pri stacionarnom potencijalnom kretanju fluida predstavlja ukupnu promenu potencijala brzine pri jednom punom obilasku te konture*. Ovde mogu nastupiti dva slučaja, prema prirodi funkcije φ . Ako je potencijal brzine *jednolika* funkcija, biće $\oint d\varphi = 0$, tj. cirkulacija brzine duž ma koje konture *jednaka je nuli*,

a ako je *višeznačna*, cirkulacija brzine biće *različita od nule i zavisi od oblika i položaja konture*. Kretanje fluida u prvom slučaju naziva se *aciklično*, a u drugom *ciklično*. Drugi slučaj može da nastupi samo tada ako kontura obuhvata oblast u kojoj nije ispunjen uslov $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ (sl. 32.6), što se neposredno vidi iz Stokes-ove teoreme

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Ako je fluid *nestišljiv*, rešavanje problema potencijalnog kretanja se uprošćava i može se izvesti samo pomoću potencijala brzine i to na sledeći način. Jednačina kontinuiteta u ovom slučaju ima vid (27.54), tj.

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (32.26)$$



Sl. 32.6

a stavljajući ovde prema obrascu (32.21) $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, dobijamo

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = 0,$$

gde je Δ Laplace-ov operator, ili u eksplicitnom obliku

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (32.27)$$

To je tzv. *Laplace-ova jednačina*, a svako njeno rešenje naziva se *harmonijska funkcija*. Ovde treba naći takvo rešenje ove parcijalne diferencijalne jednačine koje zadovoljava date početne i granične uslove, a tada pomoću obrasca (32.21) lako nalazimo i odgovarajuće polje brzina.

Rešenja ove jednačine, koja se pojavljuje i u drugim oblastima teorijske fizike, imaju niz karakterističnih osobina, od kojih navedimo samo sledeću: *potencijal brzine ni u jednoj tački u unutrašnjosti fluida ne može imati ni maksimum ni minimum*. Dokaz ovog tvrdjenja zasniva se na tome da kad bi postojala takva izolovana tačka, mogli bismo je obuhvatiti beskonačno malom ekvipotencijalnom površi, na kojoj bi grad φ svuda imao pravac normale i isti ili suprotni smer nego $d\mathbf{S}$, te bi njegov površinski integral bio različit od nule. S druge strane, prema Gauss-ovoj teoremi je

$$\oint_S \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div grad } \varphi \, dV = \int_V \Delta \varphi \, dV \quad (32.28)$$

a ovaj integral je prema Laplace-ovoj jednačini (32.27) jednak nuli, odakle se vidi da se mora odbaciti učinjena pretpostavka, čime je gornji stav dokazan. Može se pokazati da ne mogu postojati ni linije ni površi na kojima bi potencijal brzine imao veće ili manje vrednosti nego u njihovoj okolini.

Cauchy-Lagrange-ev integral

Pokažimo sad da u slučaju kad je fluid idealan i barotropan, a zapreminske sile potencijalne postoji jedan prvi integral. Podimo od transformisane Euler-ove jednačine (31.31), u kojoj zbog uslova (32.20) otpada treći član, a prvi član možemo transformisati prema obrascu (32.21)

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\text{grad } Q. \quad (32.29)$$

Zbog nezavisnosti operacija izračunavanja gradijenta i diferenciranja po vremenu možemo izmeniti red ovih operacija, pa imajući u vidu i obrazac (31.17) dobijamo

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0. \quad (32.30)$$

Pošto je gradijent nekog skalara jednak nuli samo tada kad su sve njegove komponente, tj. njegovi parcijalni izvodi po koordinatama jednaki nuli, iz gornje jednačine vidimo da izraz u zagradi ne zavisi ni od jedne koordinate, već može zavistiti samo od vremena

$$\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t). \quad (32.31)$$

Ova jednačina predstavlja jedan *prvi integral* i naziva se *Cauchy-Lagrange-ev integral*. Međutim ovaj integral ima sasvim drugi karakter od Bernoulli-evog integrala (32.16), jer u njemu figuriše funkcija $F(t)$, koja se odnosi na sve tačke fluidnog prostora, a ne na jednu strujnu liniju, ali se menja u toku vremena. Stoga gornja jednačina kazuje da je *zbir ukupne energije fluida jedinice mase i veličine* $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ *stalan u celom fluidnom prostoru, ali ne i u toku vremena,*

Ovaj prvi integral kao i Bernoulli-ev predstavlja integralski prostornog, a ne vremenskog tipa. Ako je pak ovo kretanje i stacionarno, otpada član $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, a $F(t)$ se svodi na konstantu i tada se ovaj integral svodi na Bernoulli-ev integral, u kome konstanta ima istu vrednost za sve strujne linije.

32.4. Vrtložno kretanje

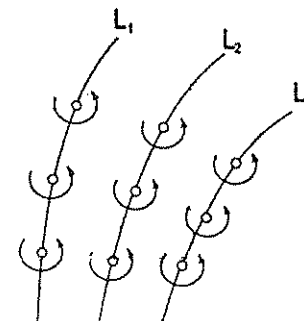
Kretanje pri kome je bar za neke deliće posmatrane količine fluida

$$\text{rot } \mathbf{v} \neq 0 \quad (32.32)$$

naziva se *vrtložno kretanje*. U ovom slučaju prema obrascu (30.23) vidimo da je za te deliće $\vec{\omega} \neq 0$, tj. vrši se obrtanje delića fluida oko ose rotacije koja ima pravac vektora $\vec{\omega}$ odnosno $\text{rot } \mathbf{v}$. Pri tome nam *vrtložne linije*, čije su tangente u ma kojoj tački kolinearne sa vektorom ugaone brzine, daju raspored pravaca osa rotacije u prostoru (sl. 32.7).

Pošto je $\text{rot } \mathbf{v} = 2\vec{\omega}$, biće

$$\text{div } \vec{\omega} = \text{div} \left(\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \right) = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \times \mathbf{v}),$$

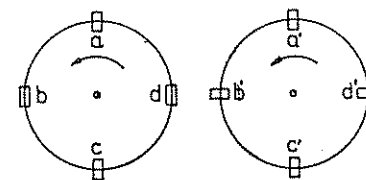


Sl. 32.7

tj.

$$\text{div } \vec{\omega} = 0 \quad (32.33)$$

S obzirom na mehanički smisao divergencije, vidimo da u polju vektora $\vec{\omega}$ nema ni izvora ni ponora, te *vrtložne linije nemaju ni početka ni kraja, one su uvek zatvorene*. Stoga i *vrtložne cevi*, ako se ne prostiru od jedne granične površi do druge, moraju obrazovati *zatvorene cevi*.



Sl. 32.8

Primitimo da treba razlikovati obrtanje delića fluida od obrtanja fluidne mase kao celine. Može se desiti da se fluidna masa obrće kao celina, a da se pri tome delići fluida ne obrću, kao u prvom slučaju na sl. 32.8, dok se u drugom slučaju obrću i delići fluida.

Istaknimo još da se *sve navedene osobine odnose na deliće fluida, a ne na tačke prostora*. Stoga se na nekom određenom mestu u izvesnom trenutku može naći delić koji se obrće, a u nekom docnijem trenutku na isto mesto može doći neki drugi delić koji se ne obrće.

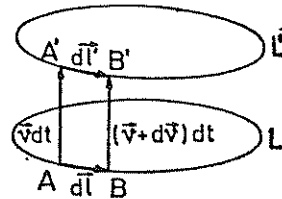
Osnovne osobine vrtložnog kretanja odnose se na vrtložne linije i cevi i baziraju na tzv. Thomson-ovoj teoremi. Uočimo neku konturu L (sl. 32.9) i zamislimo je *sastavljenu od delića fluida*. Ovakva materijalna kontura kreće se zajedno sa fluidom i pri tome se i deformiše, tako da delići fluida koji su u trenutku t obrazovali konturu L u trenutku $t + dt$ obrazovaće neku drugu konturu L' . Ako u trenutku t uočimo na konturi L dva beskonačno bliska

delića A i B, čije su brzine $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, oni će se u trenutku $t + dt$ naći u izvesnim tačkama A' i B' na konturi L'. Sa slike se vidi da je tada

$$\mathbf{v} dt + d\mathbf{l}' = d\mathbf{l} + (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) dt,$$

tj.

$$d\mathbf{l}' - d\mathbf{l} = d(d\mathbf{l}) = d\mathbf{v} dt,$$



Sl. 32.9

a odavde dobijamo

$$\frac{d(d\mathbf{l})}{dt} = d\mathbf{v}. \quad (32.34)$$

Potražimo sad izvod po vremenu cirkulacije brzine duž konture L. Pošto se ovde menja ne samo brzina već i kontura, imaćemo

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \right]. \quad (32.35)$$

Pri tome drugi član na osnovu obrasca (32.34) i zbog jednoznačnosti brzine ima vrednost

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint_L d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = 0.$$

pa konačno dobijamo

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l}. \quad (32.36)$$

Linijski integral $\oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$ naziva se cirkulacija ubrzanja, te možemo reći:

Izvod po vremenu cirkulacije brzine duž ma kakve zatvorene konture sastavljene uvek od istih delića fluida jednak je cirkulaciji ubrzanja duž iste konture. Ovaj stav naziva se Thomson-ova teorema.

Ako su zapreminske sile konzervativne, a gustina funkcija samo od pritiska, postoji potencijal ubrzanja i tada Euler-ova jednačina ima oblik (31.16). Zbog jednoznačnosti potencijala ubrzanja cirkulacija ubrzanja iznosi

$$\oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L \text{grad } Q \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L dQ = 0.$$

pa Thomson-ov obrazac (32.37) daje

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

a otuda

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} \quad (32.37)$$

Pri kretanju barotropnog idealnog fluida na koji dejstvuju konzervativne zapreminske sile, cirkulacija brzine duž ma koje konture koja se sastoji uvek od istih delića fluida stalna je u toku vremena. Ovaj stav zove se zakon o održanju cirkulacije brzine, a mnogi autori i ovaj stav nazivaju Thomson-ovom teoremom.

Pošto je prema Stokes-ovoj teoremi i obrascu (30.23)

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_S \vec{\omega} \cdot d\mathbf{S},$$

prethodni stav možemo napisati i u obliku

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \text{const}. \quad (32.38)$$

Odavde vidimo da pod navedenim uslovima fluks ugaone brzine kroz ma koju površ oivičenu konturom koju čine uvek isti delići fluida ostaje stalan u toku vremena. To je drugi oblik navedenog zakona.

32.5. Helmholtz-ove teoreme

Pretpostavimo sad da su ispunjeni svi uslovi pod kojima važi zakon o održanju cirkulacije brzine i postavimo pitanje da li delići fluida koji se u nekom trenutku ne obrću mogu doznije početi da se obrću ili obrnuto. U tom cilju uočimo neki takav delić fluida za koji je u trenutku

to ugaona brzina $\vec{\omega} = 0$, pa primenimo na njega Helmholtz-ovu jednačinu (31.37)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = 0. \quad (32.39)$$

Odavde dobijamo da je

$$\frac{\vec{\omega}}{\rho} = \text{const},$$

a pošto je u početnom trenutku $t = t_0$ po pretpostavci $\vec{\omega} = 0$, ova konstanta mora biti jednaka nuli, pa s obzirom da je $\rho \neq 0$, zaključujemo da je i u bilo kom drugom trenutku t ugaona brzina $\vec{\omega} = 0$

$$(\vec{\omega})_{t_0} = 0 \Rightarrow (\vec{\omega})_t = 0 \quad (32.40)$$

Na isti način, ako pođemo od pretpostavke da se u trenutku t_0 posmatrani delić fluida obrtao, iz Helmholtz-ove jednačine

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v} \neq 0,$$

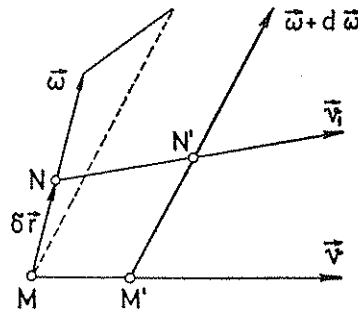
dolazimo do zaključka da će uvek biti $\vec{\omega} \neq 0$, tj.

$$(\vec{\omega})_{t_0} \neq 0 \Rightarrow (\vec{\omega})_t \neq 0 \quad (32.41)$$

Prema tome, ako se neki delić barotropnog idealnog fluida na koji dejstvuju konzervativne zapreminske sile ne obrće u nekom trenutku, neće se nikad obrtati, a delić koji se obrće neće nikad prestati da se obrće. Ovaj stav naziva se *prva Helmholtz-ova teorema* i izražava osnovnu osobinu vrtložnog kretanja. Prema njoj vidimo da pod navedenim uslovima potencijalno kretanje ne može da pređe u vrtložno ni vrtložno u potencijalno. Kod realnih fluida doduše može se desiti da nastupi i obrtanje delića fluida koji se ranije nisu obrtali, ali to nastupa prvenstveno zbog viskoznih sila.

Posmatrajmo sad jednu vrtložnu liniju i pretpostavimo još da je fluid *nestišljiv*, pa pokažimo jednu važnu osobinu vrtložnih linija. Uočimo dve beskonačno bliske tačke M i N na jednoj vrtložnoj liniji u trenutku t (sl. 32.10). Ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke M u odnosu na koordinatni početak O, za tačku N biće

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \delta \vec{r} = \vec{r} + \delta \vec{r} \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad (32.42)$$



Sl. 32.10)

gde je $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ jedinični vektor ugaone brzine u tački M. Označimo sa $\vec{v}$ i $\vec{v}_1$ brzine delića fluida koji se u trenutku t nalaze u tačkama M i N, tada je

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \delta \vec{v}, \quad (32.43)$$

gde je $\delta \vec{v}$ promena brzine kad se iz tačke M pomerimo u tačku N. Pošto je

$$\delta \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \delta z = (\delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\omega} (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v},$$

brzina tačke N biće

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \frac{\delta \vec{r}}{\omega} (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (32.44)$$

U ovom slučaju, zbog pretpostavke o nestišljivosti fluida, Helmholtz-ova jednačina (31.37) se svodi na

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v},$$

pa zamenjujući odavde $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}$ u prethodnom obrascu, dobijamo

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \frac{\delta \vec{r}}{\omega} \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (32.45)$$

Delić fluida koji je u trenutku t bio u tački M u trenutku $t+dt$ zauzeće položaj M', a njegov vektor položaja biće $\vec{r} + \vec{v} dt$. Za isto vreme, trenutna ugaona brzina promeniće se sa $\vec{\omega}$ na $\vec{\omega} + d\vec{\omega}$, tako da sve tačke na vrtložnoj liniji koja prolazi kroz tačku M', a beskonačno su bliske ovoj tački, imaju vektor položaja oblika

$$\vec{r}_k = (\vec{r} + \vec{v} dt) + k (\vec{\omega} + d\vec{\omega}), \quad (32.46)$$

gde je k parametar, koji određuje položaj ovih tačaka. Položaj delića fluida koji je u trenutku t bio u tački N, u trenutku $t+dt$ određen je vektorom položaja

$$\vec{r}_N' = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 dt,$$

što prema obrascima (32.42) i (32.45) možemo napisati u obliku

$$\vec{r}_N' = \left(\vec{r} + \frac{\delta \vec{r}}{\omega} \vec{\omega} \right) + \left(\vec{v} + \frac{\delta \vec{r}}{\omega} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) dt,$$

tj.

$$\vec{r}_N' = (\vec{r} + \vec{v} dt) + \frac{\delta \vec{r}}{\omega} (\vec{\omega} + d\vec{\omega}). \quad (32.47)$$

Odavde vidimo, upoređivanjem sa izrazom (32.46), da se i delić fluida N' nalazi na vrtložnoj liniji koja prolazi kroz tačku M'. Može se pokazati, u što se ovde nećemo upuštati, da ovaj zaključak ostaje u važnosti za sve barotropne fluide.

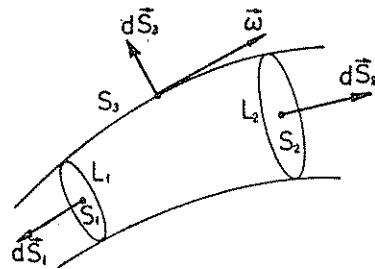
Ako je fluid idealan i barotropan i ako na njega dejstvuju konzervativne zapreminske sile, delići fluida koji u nekom trenutku obrazuju vrtložnu liniju za sve vreme kretanja fluida obrazovaće vrtložnu liniju. To je *druga Helmholtz-ova teorema* i prema njoj je vrtložna linija pod navedenim uslovima sastavljena uvek od istih delića fluida i pliva zajedno sa njima, kao da je „zamrznuta“ u fluidu, te dobija izvestan materijalni karakter.

Najzad, posmatrajmo još na jednoj vrtložnoj cevi dve ma kakve konture L_1 i L_2 koje je opasuju (sl. 32.11) i odgovarajuće površi S_1 i S_2 oivičene ovim konturama. Primenimo Gauss-ovu teoremu na ugaonu brzinu $\vec{\omega}$ i to na oblast vrtložne cevi između ovih površi S_1 i S_2

$$\oint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{\omega} dV. \quad (32.48)$$

Integral na desnoj strani prema obrascu (32.33) jednak je nuli, a integral na levoj rastavimo na integrale po površima preseka S_1 i S_2 i po površi omotača vrtložne cevi između S_1 i S_2 , koju označimo sa S_3 .

$$\int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0.$$



Sl. 32.11

U svakoj tački omotača je vektor $\vec{\omega}$ normalan na vektoru $d\vec{S}$, te integral po S_3 otpada, a ako još promenimo orijentaciju površi S_2 , da bismo obe površi orijentisali u istom smeru, imamo

$$\int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}. \quad (32.49)$$

Pošto je prema teoremi o srednjoj vrednosti funkcije

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_S \bar{\omega}_n dS = \bar{\omega}_n S,$$

gde je $\bar{\omega}_n$ srednja vrednost normalne komponente ugaone brzine na površi S , gornju jednačinu možemo napisati i u obliku

$$(\bar{\omega}_n)_1 \cdot S_1 = (\bar{\omega}_n)_2 \cdot S_2 \quad (32.50)$$

Izraz $\bar{\omega}_n \cdot S$ naziva se *jačina vrtloga*, te ovaj obrazac kazuje da je jačina vrtloga ista za preseke S_1 i S_2 , tako da je na najužim delovima vrtložne cevi obrtanje delića najbrže. Sem toga, pod uslovima pod kojima važi zakon o održanju cirkulacije brzine ova veličina ne menja se ni u toku vremena.

Jačina vrtloga za ma kakav fluid i ma kakve sile stalna je za sve preseke neke vrtložne cevi, a u slučaju barotropnog idealnog fluida na koji deluju konzervativne zapreminske sile ne menja se ni u toku vremena. To je treća Helmholtz-ova teorema, koja važi sasvim generalno, jer pri njenom dokazu ništa nismo pretpostavili, čak ni da je fluid idealan.

32.6. Talasno prostiranje malih poremećaja

Proučimo još prostiranje malih poremećaja u idealnom fluidu koji miruje. U tom cilju učinimo dve pretpostavke: 1) uticaj zapreminskih sila je zanemarljiv prema uticaju površinskih sila i 2) poremećaj u fluidu je vrlo mali, tako da su brzine delića fluida kao i promene pritiska i gustine takode vrlo male. Tada možemo uzeti da gustina ρ oscilira oko neke srednje vrednosti ρ_0

$$\rho = \rho_0 (1 + \sigma), \quad |\sigma| \ll 1, \quad (32.51)$$

odakle imamo

$$\sigma = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

tj. σ predstavlja relativnu promenu gustine.

Da bismo ispitali kako se ponaša σ pod navedenim pretpostavkama, podimo od Euler-ove jednačine (31.23) i jednačine kontinuiteta (27.51)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32.52)$$

Zbog prve pretpostavke član $\mathbf{f}$ može se zanemariti, a zbog druge član $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ predstavlja malu veličinu drugog reda, koju takode možemo zanemariti. Pored toga na osnovu obrasca (32.51) možemo približno staviti

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p \approx \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \quad \text{div} (\rho \mathbf{v}) \approx \rho_0 \text{div } \mathbf{v},$$

pa gornje jednačine dobijaju oblik

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (32.53)$$

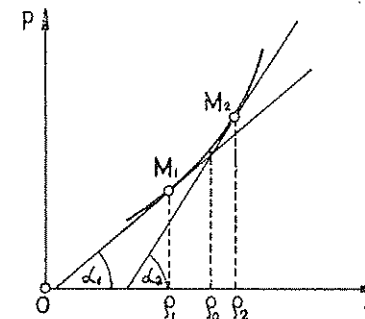
Pošto prema karakterističnoj jednačini (30.11) i obrascu (32.51) imamo

$$\text{grad } p(\rho) = \frac{dp}{d\rho} \text{grad } \rho = \frac{dp}{d\rho} \rho_0 \text{grad } \sigma, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

dobijamo

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{dp}{d\rho} \text{grad } \sigma, \quad \text{div } \mathbf{v} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (32.54)$$

čime smo u gornji sistem jednačina uveli relativnu promenu gustine σ . Pri tome $\frac{dp}{d\rho}$ jeste koeficijent pravca krive $p = p(\rho)$ (sl. 32.12), a zbog pretpostavke da gustina oscilira između dveju bliskih granica i ovaj koeficijent pravca oscilira između bliskih granica $\text{tg } \alpha_1$



Sl. 32.12

i $\text{tg } \alpha_2$, prikazanih na slici. Stoga izraz $\frac{dp}{d\rho}$, određen karakterističnom jednačinom, možemo približno smatrati konstantnim.

Da bismo našli diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava σ , eliminišimo brzinu $\mathbf{v}$ iz gornjih jednačina. U tom cilju obrazujmo divergencije obeju strana prve jednačine, a parcijalno diferencirajmo po vremenu obe strane druge jednačine. Tako dobijamo, smatrajući $\frac{dp}{d\rho}$ približno konstantnim

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx -\frac{dp}{d\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} \sigma, \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

ili, imajući u vidu da je $\operatorname{div} \operatorname{grad} \sigma = \Delta \sigma$, gde je Δ Laplace-ov operator

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{dp}{d\rho} \Delta \sigma, \quad \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \quad (32.55)$$

Odavde upoređivanjem nađenih izraza dobijamo

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \Delta \sigma,$$

što možemo napisati kraće u obliku

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c^2 \Delta \sigma, \quad (32.56)$$

gde smo stavili

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (32.57)$$

Jednačina (32.56) predstavlja *diferencijalnu jednačinu malih poremećaja u fluidu*, koja određuje relativnu promenu gustine kao meru poremećaja u funkciji položaja i vremena.

Da bismo proučili šta predstavlja gornja jednačina, pretpostavimo da se *poremećaj proizvede samo u jednoj tački fluida* i uzmimo tu tačku za koordinatni početak. Ovakvo stanje je *sferno simetrično u odnosu na izvor poremećaja*, tj. u odnosu na koordinatni početak, te σ zavisi samo od r i t

$$\sigma = \sigma(r, t), \quad (32.58)$$

pa treba naći takvo rešenje jednačine (32.56) koje je ovog tipa. Takav slučaj smo već razmatrali u odeljku o sfernim elastičnim talasima, gde smo pokazali da se talasna jednačina (28.73), pod uslovom da funkcija u zavisi samo od r i t , ima opšti integral u obliku (28.77). Zamenjujući samo u sa σ , neposredno dobijamo da je u našem slučaju *opšti integral* jednačine (32.56) pod uslovom da je *stanje sferno simetrično u odnosu na izvor poremećaja*

$$\sigma = \frac{1}{r} \varphi \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \psi \left(t + \frac{r}{c} \right), \quad (32.59)$$

gde su φ i ψ proizvoljne funkcije argumenta $t - \frac{r}{c}$ odnosno $t + \frac{r}{c}$.

Prema analizi opšteg integrala (28.77) ma kog sfernog elastičnog talasa, ovo rešenje (32.59) za $r=r_0$ daje nam zavisnost relativne promene gustine fluida na rastojanju r_0 od vremena, a za $t=t_0$ prostorni raspored relativnih promena gustina fluida u određenom trenutku. U opštem slučaju, kad se istovremeno menjaju obe nezavisne promenljive r i t , stanje oscilovanja fluida je određeno vrednošću argumenta $t - \frac{r}{c}$ odnosno $t + \frac{r}{c}$ kao i rastojanjem r od izvora poremećaja. Međutim, sama relativna promena gustine σ na raznim rastojanjima

nikad ne može biti jednaka, već samo njen proizvod sa odgovarajućim rastojanjem r i tako definisano stanje u toku vremena može se prostirati kroz fluid radialno u odnosu na izvor poremećaja. Pri tome prvi član opšteg integrala (32.59) predstavlja radialno talasno prostiranje stanja oscilovanja iz izvora poremećaja, a drugi ka izvoru poremećaja, što se obično ne javlja u realnosti, i to tako da se stanje određeno proizvodom $r \sigma(r, t)$ za vreme Δt pomeri za Δr brzinom c

$$\Delta r = c \cdot \Delta t. \quad (32.60)$$

Prema tome, ako se u idealnom barotropnom fluidu izazove neki mali poremećaj, on se prostire kroz fluid u vidu divergentnih sfernih talasa iz izvora poremećaja brzinom $c = \sqrt{dp/d\rho}$, koja je potpuno određena karakterističnom jednačinom fluida.

Prostiranje poremećaja u idealnim gasovima

Primenimo ove rezultate na prostiranje poremećaja u idealnim gasovima u slučaju izoterm-skih i adijabatskih procesa. Takvo prostiranje poremećaja predstavlja *prostiranje zvuka u gasovima*, a odgovarajuća brzina prostiranja poremećaja predstavlja brzinu prostiranja zvuka. Kod izoterm-skih procesa prema karakterističnoj jednačini (30.13) je

$$p = \frac{1}{k_1} \rho, \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{k_1} = \frac{p}{\rho},$$

te prema obrascu (32.57) dobijamo

$$c = \sqrt{\frac{p}{\rho}}, \quad (32.61)$$

to je poznati *Newton-ov obrazac* za brzinu tzv. izoterm-skog zvuka u fluidu,

Kod adijabatskih procesa prema karakterističnoj jednačini (30.14) biće

$$p = \left(\frac{1}{k_2} \rho \right)^\gamma, \quad \frac{dp}{d\rho} = \gamma \left(\frac{1}{k_2} \rho \right)^{\gamma-1} \frac{1}{k_2} = \gamma \left(\frac{1}{k_2} \right)^\gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho},$$

te obrazac (32.57) daje

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} \right) \quad (32.62)$$

Ovaj poslednji tzv. *Laplace-ov obrazac* vrlo dobro odgovara prostiranju tzv. adijabatskog zvuka kroz vazduh, gde se proces prostiranja poremećaja odvija takvom brzinom da se može smatrati da se vrši bez razmene toplote, čije je provođenje kroz vazduh sporo.

33. KRETANJE VISKOZNOSTI FLUIDA

33.1. Viskozni fluidi

U dosadašnjem izlaganju posmatrali smo samo idealne fluide, koje smo definisali kao takve kod kojih se unutrašnje trenje može zanemariti. Međutim, pri kretanju realnih fluida, kadgod postoji relativno pomeranje jednih delića u odnosu na druge, javlja se *unutrašnje trenje* ili *viskoznost* i takva tela nazivaju se *viskozni fluidi*. Pri tome iskustvo pokazuje da je kod viskoznih fluida sila unutrašnjeg trenja između dva susedna sloja koji se kreću različitim brzinama srazmerna *gradijentu brzine* u pravcu *normalnom* na pravac kretanja fluida (Newton-ov zakon). Uzrok viskoznosti je dvojak, u čemu postoji tesna analogija sa elastičnim telima. S jedne stra-

ne, to je *uzajamno dejstvo između čestica*, što se ispoljava u vidu težnje bržih delića da povuku za sobom sporije, usled čega se javljaju tangentni naponi između pojedinih slojeva fluida koji se kreću različitim brzinama. S druge strane, to može biti i *razmena impulsa između čestica* usled njihovog toplotnog kretanja pri sudarima čestica iz slojeva različitih brzina kao i pri prelazu čestica iz jednog sloja u drugi, što takođe izaziva slične tangentne napone u pravcu kretanja fluida. Prvi od ovih uzroka je dominantan kod tečnosti, a drugi pak kod gasova. Međutim, za razliku od elastičnosti, viskoznost fluida u velikoj meri zavisi od temperature sredine. Pri tome kod tečnosti sa porastom temperature zbog uzajamnog udaljavanja čestica sile uzajamnog dejstva slabe, usled čega se smanjuju i tangentni naponi kao i sama viskoznost. Kod gasova je pak obrnuto: zagrevanje povećava toplotno kretanje čestica, a time i razmenu impulsa između njih pri sudarima, što izaziva povećanje viskoznosti.

33.2. Naponsko stanje viskoznog fluida

Pri proučavanju idealnih fluida videli smo da se njihovo naponsko stanje karakteriše time da su površinske sile koje deluju na ma koji delić fluida uvek normalne na svakom elementu njegove granične površi. To smo matematički formulisali u vidu tenzora napona (30.9) sa komponentama $-p$ na glavnoj dijagonali

$$\mathcal{N} = -p \mathcal{I}, \quad p_{ik} = -p \delta_{ik} \quad (33.1)$$

Međutim, kod izotropnih viskoznih fluida usled unutrašnjeg trenja javljaju se i *tangentni naponi*, tako da površinske sile sad imaju i tangentne komponente, usled čega će tenzor napona dobiti izvestan dopunski član

$$\mathcal{N} = -p \mathcal{I} + \mathcal{N}', \quad (33.2)$$

gde se $\mathcal{N}'$ naziva *tenzor viskoznosti*, tako da komponente tenzora napona dobijaju oblik

$$p_{ik} = -p \delta_{ik} + p'_{ik} \quad (33.3)$$

Iskustvo pokazuje da kod većine viskoznih fluida komponente tenzora viskoznosti p'_{ik} zavise isključivo od brzine deformacije

$$p'_{ik} = f_{ik}(\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{12}, \dots, \dot{\epsilon}_{33}) \quad (33.4)$$

Pošto u odsustvu kretanja, kad su sve komponente $\dot{\epsilon}_{ik}$ jednake nuli, nema ni viskoznosti, mora biti

$$f_{ik}(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (33.5)$$

Ako ove funkcije razvijemo u Taylor-ov red i ograničimo se na *beskonačno male brzine deformacije*, imaćemo u prvoj aproksimaciji

$$p'_{ik} = f_{ik}(\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{12}, \dots, \dot{\epsilon}_{33}) = f_{ik}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \dot{\epsilon}_{jl} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial \dot{\epsilon}_{jl}} \right)_0 + \dots$$

odnosno, na osnovu uslova (33.5)

$$p'_{ik} = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial \dot{\epsilon}_{jl}} \right)_0 \dot{\epsilon}_{jl} \quad (33.6)$$

Oдавde vidimo da su *dopunske komponente tenzora napona viskoznog fluida usled same viskoznosti pri beskonačno malim brzinama deformacije linearne homogene funkcije komponenata tenzora brzine deformacije*.

U ovom pogledu zapaža se velika sličnost sa elastičnim telima, koju smo i malo pre istakli, a što se vidi i poređenjem obrazaca (28.3) i (33.6), samo što ovde umesto komponenata tenzora

deformacije figurišu komponente tenzora brzine deformacije. Rezonovanjem potpuno analognim onom u odeljku o elastičnim telima možemo zaključiti da se *svojstveni pravci tenzora brzine deformacije poklapaju sa svojstvenim pravcima dopunskog tenzora napona*. Tako dobijamo, po analogiji sa relacijama (28.9), za izotropni viskozni fluid

$$\left. \begin{aligned} p'_1 &= 2\mu' \dot{\epsilon}_1 + \lambda' \dot{\epsilon} \\ p'_2 &= 2\mu' \dot{\epsilon}_2 + \lambda' \dot{\epsilon} \\ p'_3 &= 2\mu' \dot{\epsilon}_3 + \lambda' \dot{\epsilon} \end{aligned} \right\}, \quad (33.7)$$

gde je prema obrascu (26.55)

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3, \quad (33.8)$$

pri čemu smo glavne napone p_1 zamenili sa p'_1 , a komponente tenzora deformacije ϵ_1 zamenili sa komponentama tenzora brzine deformacije $\dot{\epsilon}_1$. Ove relacije možemo neposredno napisati i u tenzorskom obliku

$$\mathcal{N}' = 2\mu' \dot{\mathcal{D}} + \lambda' \dot{\mathcal{I}}, \quad (33.9)$$

koji je potpuno analogan generalisanom Hooke-ovom zakonu (28.10) za elastična tela.

Da bismo uveli koeficijente viskoznosti koji imaju neposredniji fizički smisao, razložimo ovaj tenzor na devijator i izotropni tenzor, po analogiji sa obrascem (28.13)

$$p'_{ik} = 2\mu' \left(\dot{\epsilon}_{ik} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \delta_{ik} \right) + \left(\lambda' + \frac{2\mu'}{3} \right) \dot{\epsilon} \delta_{ik}$$

Ovaj oblik nam sugerise da uvedemo koeficijente

$$\eta = \mu', \quad \xi = \lambda' + \frac{2\mu'}{3}, \quad (33.10)$$

pri čemu smo prvi koeficijent ovde označili sa η , pa dopunski tenzor napona dobija vid

$$\mathcal{N}' = 2\eta \left(\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\mathcal{I}} \right) + \xi \dot{\mathcal{I}} \quad (33.11)$$

Tako uvedeni koeficijenti η i ξ nazivaju se *dinamički koeficijenti viskoznosti*, a ukupni tenzor napona (33.2) tada će biti

$$\mathcal{N} = -p \mathcal{I} + 2\eta \left(\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\mathcal{I}} \right) + \xi \dot{\mathcal{I}} \quad (33.12)$$

Ukoliko je fluid *nestišljiv*, što je najvažniji slučaj u praksi s obzirom da je viskoznost izrazitija kod tečnosti, koje su skoro nestišljive, prema obrascu (26.55) biće $\dot{\epsilon} = 0$, pa se prethodna relacija svodi na

$$\mathcal{N}' = -p \mathcal{I} + 2\eta \dot{\mathcal{D}} \quad (33.13)$$

Analiza

Dobijene relacije (33.9) odnosno (33.11) potpuno određuju *naponsko stanje izotropnog viskoznog fluida usled same viskoznosti u svakoj tački u funkciji brzine deformacije* i izražavaju tzv. *generalisani Newton-ov zakon* ili *Navier-Stokes-ov zakon*. Sam oblik tenzora napona (33.12) predstavlja bitnu karakteristiku izotropnog viskoznog fluida, pri čemu prvi član

predstavlja tenzor napona idealnog fluida, a druga dva potiču od viskoznosti. Pošto su tenzorske relacije nezavisne od koordinatnog sistema, možemo napisati odgovarajuće skalarnе jednačine i u *bilo kom* koordinatnom sistemu, čime dobijamo

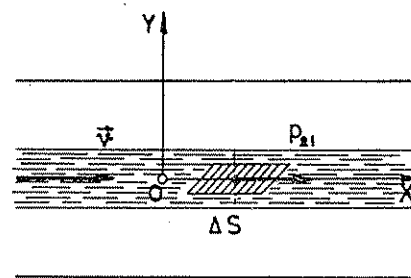
$$\left. \begin{aligned} p_{11}' &= 2\eta \left(\dot{\epsilon}_{11} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \right) + \xi \dot{\epsilon} \\ &\dots \dots \dots \\ p_{12}' &= 2\eta \left(\dot{\epsilon}_{12} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (33.14)$$

Što se tiče navedene transformacije tenzora $\mathcal{N}'$ u oblik (33.11), prva skalarna invarijanta tenzora $\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I}$ jednaka je nuli, te je on zaista devijator, a tenzor $\xi \dot{\mathcal{I}}$ nema nedijagonalnih elemenata. Na osnovu obrazca (26.55) i (26.48) tada zaključujemo da prvi član tenzora $\mathcal{N}'$ ne daje nikakvu promenu zapremine, a drugi nikakvu promenu oblika. Prema tome, slično kao kod elastičnih tela, *dopunski tenzor napona usled viskoznosti može se rastaviti na devijator, koji određuje samo promenu oblika i na izotropni tenzor, koji određuje samo promenu zapremine.*

33.3. Smisao koeficijenata viskoznosti

Iz poslednjeg zaključka neposredno se vidi da je koeficijent viskoznosti η uz devijator vezan za promenu oblika, a koeficijent ξ uz izotropni tenzor za promenu zapremine. Pri tome je prvi koeficijent η bitniji i za mnoge svrhe i dovoljan, ukoliko se može smatrati da se fluid pri datim uslovima približno ponaša kao nestišljiv. Stoga koeficijent η predstavlja *meru viskoznosti izazvane deformacijom bez promene zapremine (tzv. ekvivolumna deformacija)*, a koeficijent ξ *meru viskoznosti usled zapreminske deformacije bez promene oblika (tzv. homotetična deformacija)*. Oba ova koeficijenta viskoznosti zavise od temperature i pritiska i daju se u jedinicama kp sec/m^2 ili N sec/m^2 . Tako na pr. za tečnosti vrednosti koeficijenta η pod normalnim uslovima variraju od $3,4 \cdot 10^{-5} \text{ kp sec/m}^2$ (za aceton) do $1,39 \cdot 10^{-1} \text{ kp sec/m}^2$ (za glicerin), a za gasove pod istim uslovima se kreću oko $10^{-6} \text{ kp sec/m}^2$.

Da bismo bolje videli mehanički smisao koeficijenta η , posmatrajmo stacionarno strujanje u slojevima nestišljivog fluida kroz neku cev sa paralelnim zidovima (sl. 33.1). Uzmimo pravac



Sl. 33.1

strujanja za X-osu, a pravac normalan na ove slojeve i na pravac strujanja za Y-osu. Brzina delića fluida tada će imati samo X-komponentu, koja će zavisiti samo od koordinate y

$$v_x = v(y), \quad v_y = v_z = 0. \quad (33.15)$$

Uočimo dva susedna sloja koji se kreću različitim brzinama i potražimo silu unutrašnjeg trenja između njih koja deluje na zajednički element površi ΔS ovih slojeva. Primenimo

li na ovaj slučaj jednačine (33.14), u kojima zbog pretpostavke o nestišljivosti fluida treba staviti $\dot{\epsilon} = 0$, imaćemo

$$\left. \begin{aligned} p_{11}' &= 2\eta \dot{\epsilon}_{11}, & p_{22}' &= 2\eta \dot{\epsilon}_{22}, & p_{33}' &= 2\eta \dot{\epsilon}_{33} \\ p_{12}' &= 2\eta \dot{\epsilon}_{12}, & p_{13}' &= 2\eta \dot{\epsilon}_{13}, & p_{23}' &= 2\eta \dot{\epsilon}_{23} \end{aligned} \right\} \quad (33.16)$$

Zamenjujući ovde komponente tenzora brzine deformacije odgovarajućim izrazima (26.51), dobijamo

$$p_{11}' = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad p_{22}' = 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad p_{33}' = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

kao i

$$\begin{aligned} p_{12}' &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), & p_{13}' &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ p_{23}' &= \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Što se s obzirom na uslove (33.15) svodi na,

$$p_{11}' = p_{22}' = p_{33}' = 0, \quad p_{12}' = \eta \frac{dv}{dy}, \quad p_{13}' = p_{23}' = 0. \quad (33.17)$$

Oдавde vidimo da od svih dopunskih komponenti tenzora napona usled viskoznosti ovde preostaje samo p_{12} odnosno p_{21} , te na uočeni element površi ΔS , normalan na Y-osu, deluje samo tangenti napon u pravcu strujanja fluida silom

$$\Delta F_t = p_{21} \Delta S = \eta \Delta S \frac{dv}{dy}. \quad (33.18)$$

To je poznati *Newton-ov zakon*, prema kome je *sila unutrašnjeg trenja između dva susedna sloja koji se kreću različitim brzinama srazmerna gradijentu brzine u pravcu normalnom na pravac strujanja fluida*. Pri tome je koeficijent viskoznosti η jednak *odnosu tangentskog napona p_{21} i gradijenta brzine dv/dy* .

33.4. Jednačine kretanja viskoznog fluida

Potražimo sad osnovnu jednačinu dinamike, odnosno diferencijalnu jednačinu kretanja izotropnih viskoznih fluida. Podimo opet od opšte jednačine kretanja deformabilnih sredina (27. 45)

$$\frac{dv}{dt} = f + \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathcal{N}), \quad (33.19)$$

gde je tenzor napona $\mathcal{N}$ ovde određen generalisanim Newton-ovim zakonom, odnosno obrascem (33.12)

$$\mathcal{N} = -p \mathcal{I} + 2\eta \left(\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I} \right) + \xi \dot{\epsilon} \mathcal{I},$$

pa postupimo na sličan način kao što smo radili kod elastičnih tela. Divergencija tenzora napona, pod pretpostavkom da su η i ξ konstantne, u ovom slučaju biće

$$\nabla \cdot \mathcal{N} = -\nabla \cdot (p \mathcal{I}) + 2\eta \nabla \cdot \left(\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I} \right) + \xi \nabla \cdot (\dot{\epsilon} \mathcal{I}). \quad (33.20)$$

Prvi i poslednji član možemo neposredno izračunati, imajući u vidu definiciju jediničnog tenzora

$$\nabla \cdot (\rho \mathcal{D}) = (\nabla \cdot \mathcal{D}) \rho = \nabla p, \quad \nabla \cdot (\dot{\epsilon} \mathcal{D}) = (\nabla \cdot \mathcal{D}) \dot{\epsilon} = \nabla \dot{\epsilon},$$

a veličinu $\dot{\epsilon}$ prema obrascima (26.55) i (26.51) možemo takođe izraziti pomoću brzine $\mathbf{v}$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v}, \quad (33.21)$$

tako da imamo

$$\nabla \cdot (\rho \mathcal{D}) = \text{grad } p, \quad \nabla \cdot (\dot{\epsilon} \mathcal{D}) = \text{grad div } \mathbf{v} \quad (33.22)$$

Da bismo izračunali drugi član, primenimo opšti obrazac (27.21) za divergenciju tenzora

$$\nabla \cdot \mathcal{F} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \text{div } \mathbf{T}_k, \quad (33.23)$$

gde su $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ i $\mathbf{T}_3$ vektori čije su komponente elementi prve, druge odnosno treće kolone matrice ovog tenzora. U našem slučaju matrica tenzora $\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I}$ prema obrascu (26.51) biće

$$\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \end{bmatrix},$$

pa na pr. odgovarajući vektor $\mathbf{T}_1$ ima sledeće komponente

$$\mathbf{T}_1 = \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right\}. \quad (33.24)$$

Formirajmo sad divergenciju vektora $\mathbf{T}_1$

$$\text{div } \mathbf{T}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right],$$

pa imajući u vidu obrazac (33.21), prethodni izraz možemo transformisati u sledeći oblik

$$\text{div } \mathbf{T}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{v},$$

odnosno

$$\text{div } \mathbf{T}_1 = \frac{1}{2} \Delta v_x + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{v}. \quad (33.25)$$

Cikličnom permutacijom možemo dobiti i divergencije vektora $\mathbf{T}_2$ i $\mathbf{T}_3$, tako da prema obrascu (33.21) imamo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I} \right) &= \mathbf{e}_1 \text{div } \mathbf{T}_1 + \mathbf{e}_2 \text{div } \mathbf{T}_2 + \mathbf{e}_3 \text{div } \mathbf{T}_3 = \\ &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{1}{2} \Delta v_x + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{v} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{1}{2} \Delta v_y + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \mathbf{v} \right) + \\ &\quad + \mathbf{e}_3 \left(\frac{1}{2} \Delta v_z + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \mathbf{v} \right), \end{aligned}$$

tj. posle grupisanja članova

$$\nabla \cdot \left(\dot{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon} \mathcal{I} \right) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{6} \text{grad div } \mathbf{v} \quad (33.26)$$

Uvrštavajući nađene izraze u obrazac (33.20), nalazimo da je tražena divergencija tenzora napona

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = -\text{grad } p + 2\eta \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{6} \text{grad div } \mathbf{v} \right) + \xi \text{grad div } \mathbf{v},$$

odnosno

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (33.27)$$

Tada opšta jednačina kretanja (33.19) za viskozni fluid dobija oblik, ako se ubrzanje delića rastavi na lokalno i konvektivno prema obrascu (31.22)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\xi}{\rho} \right) \text{grad div } \mathbf{v}, \quad (33.28)$$

gde smo uveli tzv. kinematički koeficijent viskoznosti

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (33.29)$$

Ukoliko je posmatrani viskozni fluid *nestišljiv* ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) poslednji član otpada, pa se prethodna jednačina svodi na

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (33.30)$$

Analiza

Gornja jednačina je osnovna jednačina dinamike izotropnih viskoznih fluida sa konstantnim dinamičkim koeficijentima viskoznosti i naziva se Navier-Stokes-ova jednačina. Ako su unapred date zapreminske sile $\mathbf{f}$, početni i granični uslovi, tri odgovarajuće skalarne jednačine kretanja, jednačina kontinuiteta i karakteristična jednačina potpuno određuju nepoznate funkcije v_x , v_y , v_z , p i ρ kao funkcije položaja i vremena. Međutim, ovaj sistem jednačina je integrabilan samo u nekoliko sasvim specijalnih slučajeva i stoga učinimo ovde nekoliko napomena o mogućnosti uprošćenja ovih jednačina.

Ako postavimo pitanje pod kojim uslovima će otpasti članovi koji potiču od viskoznosti, iz same jednačine (33.28) kao i iz identičnosti

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v}$$

vidimo da će to biti ako je $\text{div } \mathbf{v} = 0$ i $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Prema tome, ako je fluid *nestišljiv* i kretanje *potencijalno*, viskozni fluid sa konstantnim dinamičkim koeficijentima viskoznosti se i pri kretanju ponaša kao idealan.

Drugo pitanje se odnosi na to u kojim slučajevima se ove jednačine mogu neposredno uprostiti. To je moguće pre svega ako je kretanje fluida vrlo sporo, kad je član $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ vrlo mali u odnosu na ostale, te pri vrlo sporom kretanju viskoznog fluida Navier-Stokes-ova jednačina se može linearizovati izostavljanjem člana $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

Najzad, napomenimo da se u mnogim slučajevima i stišljiv viskozni fluid ponaša približno kao nestišljiv, na pr. pri ravnomernom proticanju gasa kroz neku cev. Tada se poslednji član u Navier-Stokes-ovoj jednačini (33.28) može zanemariti, tako da treba rešavati jednostavniju jednačinu (33.30), gde se često čine i dalje aproksimacije.

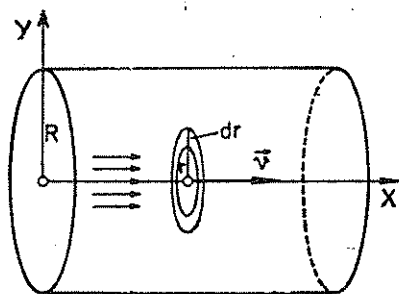
33.5. Proticanje fluida kroz cev

Primenimo sad ove jednačine na *stacionarno strujanje nestišljivog viskoznog fluida* kroz neku cev kružnog preseka u pravcu njene ose (sl. 33.2). Usmerimo li X-osu u tom pravcu, brzina delića fluida imaće samo x-komponentu, koja će zavisiti jedino od y i z

$$v_x = v(y, z), \quad v_y = v_z = 0 \quad (33.31)$$

Pri tome će zbog ovakve aksijalne simetrije polja brzine biti, s obzirom da $\mathbf{v}$ ne zavisi od x

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \equiv 0.$$



Sl. 33.2

Ako još pretpostavimo da su *zapreminske sile zanemarljive*, u Navier-Stokes-ovoj jednačini (33.30) otpadaju oba člana s leve strane kao i prvi član s desne

$$\frac{dv}{dt} \approx 0 = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v},$$

a otuda

$$\text{grad } p - \eta \Delta \mathbf{v} = 0 \quad (33.32)$$

Odgovarajuće skalarne jednačine, s obzirom na uslove (33.31), imaće vid

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33.33)$$

Iz poslednjih dveju jednačina vidimo da pritisak ne zavisi od y i z, te je funkcija oblika $p = p(x)$. Tada prva jednačina dobija vid

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \quad (33.34)$$

Pošto leva strana zavisi samo od y i z, a desna samo od x, ova jednakost će samo tada uvek biti zadovoljena ako se obe ove funkcije svedu na jednu i to istu konstantu, koju označimo sa A, a otuda

$$\frac{dp}{dx} = \eta A \quad (33.35)$$

Integracijom ove jednačine od početka cevi ($x=0$) do kraja ($x=l$) dobijamo

$$p_1 - p_0 = \eta A l,$$

gde su p_0 i p_1 odgovarajući pritisci na krajevima cevi, odnosno

$$A = -\frac{\Delta p}{\eta l}, \quad \Delta p = p_0 - p_1, \quad (33.36)$$

pa izjednačavanjem leve strane jednačine (33.34) sa A dobijamo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\eta l} \quad (33.37)$$

Da bismo izveli integraciju ove jednačine, uvedimo polarne koordinate (r, φ) u bilo kojoj ravni kružnog preseka, paralelnoj YOZ-ravni, sa koordinatnim početkom u centru ovog preseka. Zbog aksijalne simetrije brzina delića $\mathbf{v}$ biće tada funkcija samo od rastojanja r od ose cevi

$$v_x = v(r), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (33.38)$$

Kao što je poznato iz teorije vektora, laplasijan ovakve funkcije, koja zavisi samo od polarne koordinate r u ravni, ima oblik

$$\Delta v(r) = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right),$$

što se može proveriti i direktnim računom sličnim onom pri izvođenju obrasca (28.74) (samo ovde treba staviti $\text{div } \mathbf{r} = 2$), pa jednačina (33.37) dobija vid

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l} \quad (33.39)$$

Napišemo li ovu jednačinu kao

$$d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l} r dr,$$

integracijom dobijamo

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1, \quad (33.40)$$

a otuda

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr + \frac{C_1}{r} dr,$$

pa ponovna integracija daje

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (33.41)$$

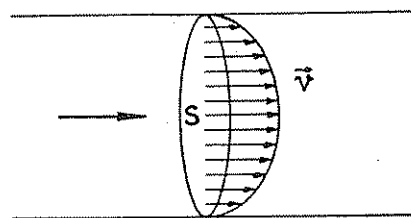
Pošto brzina v svuda mora ostati konačna, pa i na osi cevi ($r=0$), mora biti $C_1=0$. Pretpostavimo još da *fluid ne klizi duž zidova suda*, tj. da je za $r=R$ brzina delića jednaka nuli

$$0 = -\frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 + C_2,$$

čime je određena konstanta C_2 . Tada prethodni obrazac konačno dobija oblik

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (33.42)$$

Odavde vidimo da brzina delića fluida duž poluprečnika cevi opada po kvadratnom zakonu (sl. 33.3). To znači da delići fluida koji su u nekom trenutku bili na izvesnom poprečnom preseku S u nekom docnijem trenutku ležaće na rotacionom paraboloidu, čija se osa poklapa sa osom cevi.



Sl. 33.3

Poiseuille-ev zakon

Izračunajmo još količinu fluida koja u jedinici vremena prođe kroz bilo koji poprečni presek cevi. Uočimo li kružni prsten između r i $r+dr$ (v. sl. 33.2), kroz njega će u jedinici vremena proći toliko fluida koliko ga ima u cilindru konstruisanom nad ovim prstenom i vektorom brzine

$$dQ = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot v \quad (33.43)$$

Zamenimo li ovde brzinu r nađenim izrazom (33.42), imaćemo

$$dQ = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{\pi \rho \Delta p}{2\eta l} r (R^2 - r^2) dr,$$

pa integracijom po r od 0 do R dobijamo

$$Q = \frac{\pi \rho \Delta p}{2\eta l} \left(R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr \right) = \frac{\pi \rho \Delta p}{2\eta l} \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

odnosno, ako uvedemo oznaku (33.29)

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p \quad (33.44)$$

To je tzv. Poiseuille-ev obrazac, prema kome je količina nestišljivog viskozno fluida koja pri sporom stacionarnom strujanju prođe kroz cevi čiji presek cevi proporcionalna četvrtom stepenu njenog poluprečnika kao i razlici pritiska na krajevima cevi.

33.6. Laminarno i turbulentno kretanje

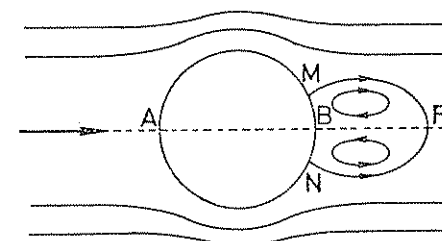
Izložena teorija kretanja viskoznih fluida bazira na pretpostavci da se fluid može zamisliti podeljen na slojeve koji se različitim brzinama kreću jedan pored drugog. Takvo kretanje fluida, koje dobro odgovara realnosti pri malim brzinama, naziva se *laminarno kretanje*. Međutim, iskustvo pokazuje da se pri većim brzinama pravilnost kretanja narušava, strujne linije se međusobno mešaju, što se može i eksperimentalno zapaziti posmatranjem strujanja obojenih slojeva tečnosti. Kretanje takve vrste naziva se *turbulentno kretanje*, ali sam postanak turbulencije kao i mehanizam tog kretanja još nisu na zadovoljavajući način objašnjeni. Pri tome se pokazalo da laminarno kretanje sa povećanjem brzine prelazi u turbulentno i

obrnuto, a granična brzina pri kojoj se taj prelaz vrši zavisi od vrednosti jednog neimenovanog broja, do koga se došlo proučavanjem hidrodinamički sličnih kretanja. Ovaj broj ima oblik

$$Re = \frac{v_{sr} d}{\nu}, \quad (33.45)$$

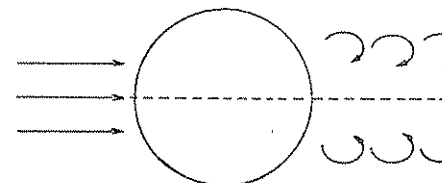
gde je v_{sr} srednja brzina delića fluida, d karakteristična dužina (na pr. dužina cevi pri proticanju fluida kroz cev), a ν kinematički koeficijent viskoznosti. Tako definisana veličina naziva se *Reynolds-ov broj*, a navedeni prelaz laminarnog kretanja u turbulentno vrši se kad on dostigne izvesnu kritičku vrednost $Re^{(kr)}$, koja varira zavisno i od uslova kretanja, a u većini slučajeva iznosi oko 2000.

Zadržimo se ovde samo na osnovnim karakteristikama turbulentnog kretanja. Pre svega, ono je najizrazitije kad fluid pri svom kretanju naiđe na neku prepreku u vidu krutog tela, kad se javlja *uticaj pograničnog sloja na fluid*. Posmatrajmo na pr. strujanje fluida oko nekog cilindra (sl. 33.4). Usled trenja fluida o zid cilindra delići fluida se usporavaju sve više, tako da se u



Sl. 33.4

izvesnim tačkama M i N sasvim zaustavljaju, a ovo usporavanje je sve manje što se više udaljavamo od pograničnog sloja. S druge strane, zbog sužavanja slojeva na prednjoj strani cilindra povećava se brzina fluida, a smanjuje pritisak, dok na zadnjoj strani širenje slojeva izaziva smanjenje brzine i povećanje pritiska, tako da ovde gradijent pritiska deluje nasuprot kretanju fluida. Usled oba faktora u izvesnoj oblasti iza cilindra se javlja *strujanje fluida u suprotnom smeru*, što zbog suprotnih smerova brzina izaziva *nastajanje i iščezavanje malih vrtloga*, koji odlaze sa fluidom, kao što je prikazano na sl. 33.5.



Sl. 33.5

Dublja analiza turbulentnog kretanja je pokazala da je ono tesno povezano sa nestabilnošću kretanja viskoznog fluida. Naime, mešanje strujnih linija moguće je objasniti na taj način što se pretpostavi da se komponente brzine delića fluida v_i sa mikrofizičkog stanovišta mogu razložiti na prostorno-vremenske srednje vrednosti, koje označimo sa $\bar{v}_i$, i na pulzacione komponente, koje obeležimo sa v_i'

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (33.46)$$

To znači da se kretanje viskoznog fluida sastoji iz osnovnog kretanja, koje se vrši prema Navier-Stokes-ovoj jednačini, i sekundarnog kretanja, koje se sastoji iz haotičnog poprečnog kretanja čelića. Ovo sekundarno kretanje, okarakterisano komponentama v_1' pri vrednostima Reynolds-ovog broja $Re < Re^{(kr)}$ prigušuje se unutrašnjim trenjem, međutim pri vrednostima $Re > Re^{(kr)}$ ono dolazi do izražaja i izaziva pojavu turbulencije, koja pokazuje veliku analogiju sa kinetičkom teorijom gasova.

D O D A C I

I. KOVARIJANTNOST LAGRANGE-EVIH
JEDNAČINA

Pokažimo ovde jednu važnu osobinu Lagrange-evih jednačina (11.32) za slobodne sisteme ili sa holonomnim i zadržavajućim vezama

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (I.1)$$

koja se sastoji u tome da njihov oblik ostaje invarijantan u odnosu na jednu klasu transformacija. U tom cilju umesto starih generalisanih koordinata q_k uvedimo na kakav skup novih $\tilde{q}_i$ relacijama

$$\tilde{q}_i = f_i(q_k, t) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (I.2)$$

i pretpostavimo da je $\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n) / \partial(q_1, \dots, q_n) \neq 0$, tako da se ovaj sistem od n jednačina može rešiti po veličinama q_i

$$q_i = \varphi_i(\tilde{q}_k, t) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (I.3)$$

To su tzv. *punktualne transformacije*, koje prevode tačke $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ iz prvobitnog konfiguracionog prostora u odgovarajuće tačke $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$ u novom, pa ispitajmo kako se pri tome transformišu same Lagrange-ove jednačine.

Prema pravilu za posredno diferenciranje funkcija imamo

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t},$$

odakle proizlazi

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_k}, \quad (I.4)$$

a zbog nezavisnosti operacija d/dt i $\partial/\partial \tilde{q}_k$ možemo izmeniti njihov redosled

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_k} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} \quad (I.5)$$

Ako pak u Lagrange-evoj funkciji $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ zamenimo veličine q_i funkcijama (I.3), ona se transformiše u

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L[\varphi_i(\tilde{q}_k, t), \dot{\varphi}_i(\tilde{q}_k, t), t] = \tilde{L}(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t), \quad (I.6)$$

čime smo je izrazili kao funkciju od $\tilde{q}_k$, $\dot{\tilde{q}}_k$ i t . Što se tiče nepotencijalnih generalisanih sila u starim i novim promenljivama, između njih se može uspostaviti veza na osnovu njihove definicije (10.13)

$$\tilde{Q}_k^* = \sum_{v=1}^N \tilde{F}_v^* \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{v=1}^N \tilde{F}_v^* \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \tilde{F}_v^* \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k}$$

odnosno

$$\tilde{Q}_k^* = \sum_{i=1}^n Q_i^* \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} \quad (I.7)$$

Formirajmo sad izraz $(d/dt)(\partial \tilde{L}/\partial \tilde{q}_k)$, imajući u vidu da $\tilde{L}$ zavisi od $\tilde{q}_k$ preko svih q_i i koristeći pri tome rezultat (I.4)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k},$$

što se na osnovu (I.5) može napisati u obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} \quad (I.8)$$

S druge strane, Lagrange-eva funkcija $\tilde{L}$ zavisi od $\tilde{q}_k$ preko svih q_i i $\dot{q}_i$, te imamo

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k},$$

pa oduzimanjem ovih dveju relacija dobijamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} \quad (I.9)$$

Ako izraz u srednjoj zagradi prema Lagrange-evim jednačinama (I.1) zamienimo sa Q_i^* , izraz s desne strane uz pomoć transformacione relacije (I.7) može se prikazati samo u novim generalisanim koordinatama

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} = \sum_{i=1}^n Q_i^* \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_k} = \tilde{Q}_k^*,$$

a prethodna jednačina time prelazi u

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_k} = \tilde{Q}_k^* \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (I.10)$$

Prema tome, pri ma kakvoj punktualnoj transformaciji generalisanih koordinata sa nesingularnim jakobijskom oblik Lagrange-evih jednačina ostaje invarijantan, tj. ove jednačine formirane iz ekvivalentnih Lagrange-evih funkcija $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ i $\tilde{L}(\tilde{q}_k, \tilde{\dot{q}}_k, t)$ imaju isti vid. Upoređujući dobijene transformacione relacije (I.7) i (I.9) sa zakonom transformacije ma kog kovarijantnog vektora (v.Dj. Mušicki i B.Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, str. 104-5), vidimo da se pri ovoj transformaciji izrazi na levoj i desnoj strani svake Lagrange-ove jednačine transformišu na isti način i to kao komponente kovarijantnog vektora. Stoga se ova osobina Lagrange-evih jednačina u odnosu na punktualne transformacije, zbog čega i njihov oblik pri tome ostaje nepro-

menjen, naziva kovarijantnost Lagrange-evih jednačina i predstavlja jednu od bitnih karakteristika Lagrange-evog formalizma.

II. TOTALNE VARIJACIJE I NJIHOVA PRIMENA

POJAM TOTALNE VARIJACIJE U OPŠTEM SMISLU. Da bismo bolje sagledali pojam varijacije generalisanih koordinata i njene generalizacije, uočimo u konfiguracionom prostoru ma kakvu liniju u intervalu vremena (t_0, t_1) , koju ćemo zvati *referentni put* i neka su njegove jednačine

$$q_i = q_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (II.1)$$

Uporedo sa referentnim putem zamislimo i skup okolnih puteva, pod kojima ćemo podrazumevati takve linije u konfiguracionom prostoru koje u ovom intervalu vremena vrlo malo odstupaju od referentnog i neka su jednačine nekog uočenog okolnog puta

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (II.2)$$

gde crta iznad $q_i(t)$ označava da se radi o drugom obliku funkcije. Međutim, ovako definisan referentni put ne mora odgovarati pojmu pravog puta niti okolni put pojmu zaobilaznog puta, koje smo definisali pri formulaciji Hamilton-ovog principa.

Razlika ovako uvedenih funkcija $\bar{q}_i(t)$ i $q_i(t)$ uzetih u istom trenutku t , koje nam prikazuju odstupanje uočenog okolnog puta od referentnog

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(t) - q_i(t) \quad (II.3)$$

nazivaćemo *sinhrone varijacije generalisanih koordinata u opštem smislu*. Ako pak uočimo razlike ovih funkcija u različitim trenucima t i $t + \Delta t$, pri čemu ćemo Δt smatrati datom funkcijom od t

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(t + \Delta t) - q_i(t), \quad (II.4)$$

njih ćemo zvati *totalne (ili asinhronne) varijacije generalisanih koordinata u opštem smislu*. Pri tome smo upotrebili iste oznake kao i ranije, ali samim nazivom smo podvukli da ovi pojmovi predstavljaju generalizaciju ranije uvedenih pojmova, tako da skup funkcija $q_i = q_i(t)$ ne mora predstavljati pravi put, niti ovako definisane varijacije δq_i moraju biti jednake nuli za $t = t_0$ i $t = t_1$.

Medjutim, ove pojmove možemo formulisati i na drugi, ekvivalentan način, posmatrajući familiju krivih u konfiguracionom prostoru

$$q_i = q_i(t, \alpha) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (II.5)$$

i neka svakoj vrednosti parametra α odgovara određeni oblik funkcije $q_i(t)$. Na pr. za $\alpha=0$ ona može predstavljati zavisnost posmatrane generalisane koordinate od vremena na pravom putu, a za neko $\alpha \neq 0$ ovu zavisnost na nekom od zaobilaznih puteva. Ako se vreme ne varira, odgovarajuća varijacija generalisane koordinate biće

$$\delta q_i(t) = q_i(t, \alpha + \delta \alpha) - q_i(t, \alpha) = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad (II.6)$$

pri čemu je prvi član s desne strane ekvivalentan funkciji $\bar{q}_i(t)$ u formuli (II.3) i u slučaju pravog i zaobilaznog puta svodi se na izraz (12.20).

Ako se pak i vreme varira, to se može opisati na takav način da se sa promenom ovog parametra α menja i vreme t , tj. da se i vreme smatra funkcijom ovog parametra

$$t = t(\alpha) \quad (II.7)$$

Tada je varijacija svake generalisane koordinate određena ne samo eksplicitnom zavisnošću funkcije q_i od α , već i implicitnom preko vremena $t = t(\alpha)$

$$\Delta q_i(t) = q_i[t(\alpha + \delta\alpha), \alpha + \delta\alpha] - q_i[t(\alpha), \alpha] = \frac{dq_i}{d\alpha} \delta\alpha \quad (II.8)$$

Pošto prema (II.7) svakoj vrednosti parametra α odgovara neki trenutak t , vrednosti parametra $\alpha + \delta\alpha$ odgovaraće trenutak $t + \Delta t$, tako da je prvi član s desna ekvivalentan prvom članu u formuli (II.4), a drugi drugom u toj formuli. Označimo li ove članove konciznije sa $\bar{q}_i(\alpha + \delta\alpha)$ i $q_i(\alpha)$ i napišemo totalni izvod dq_i/dt u razvijenom obliku, imaćemo

$$\Delta q_i(t) = \bar{q}_i(\alpha + \delta\alpha) - q_i(\alpha) = \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} \right) \delta\alpha \quad (II.9)$$

Ovde prvi član $(\partial q_i / \partial \alpha) \delta\alpha$ predstavlja varijaciju funkcije $q_i(t)$ u smislu (II.6), a u drugom izraz $(dt/d\alpha) \delta\alpha$ prikazuje promenu vremena Δt usled ovakve varijacije, tako da je

$$\Delta q_i(t) = \delta q_i(t) + \dot{q}_i \Delta t \quad (II.10)$$

Odavde vidimo da se totalna varijacija generalisane koordinate q_i u opštem smislu sastoji iz dva dela: iz sinhronne promene oblika funkcije $\delta q_i(t)$ zbog izmene parametra α za $\delta\alpha$ i iz promene njene vrednosti $\dot{q}_i \Delta t$ usled priraštaja nezavisno promenljive t za Δt . Odnosi između ovih varijacija δq_i i Δq_i prikazni su na sl. II.1, gde se vidi i smisao veličine $\Delta q_i = \dot{q}_i \Delta t$.

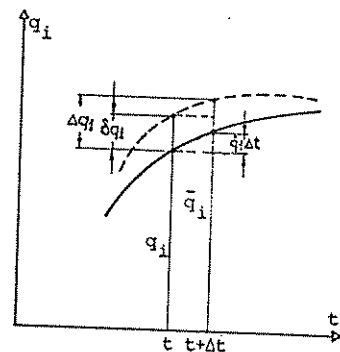
Ova definicija totalne varijacije može se proširiti i na ma kakvu funkciju oblika $f(q_i, t)$. U ovom slučaju prema pravilu za posredno diferenciranje funkcija imamo

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t,$$

a ako ovde Δq_i zamenimo izrazom (II.10), nalazimo

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t$$

Izraz u zagradi predstavlja totalni izvod df/dt posmatrane funkcije po vremenu, odakle proizlazi da je totalna varijacija ma kakve funkcije



Sl. II.1

$f(q_i, t)$

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t \quad (II.11)$$

Potražimo sad totalnu varijaciju izvoda dq_i/dt generalisane koordinate $q_i(t, \alpha)$, koja je po definiciji jednaka

$$\Delta \dot{q}_i = \frac{d\bar{q}_i}{dt'} - \frac{dq_i}{dt}, \quad (II.12)$$

gde je

$$\bar{q}_i = q_i + \Delta q_i, \quad t' = t + \Delta t \quad (II.13)$$

Prvi član možemo transformisati na sledeći način

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt'} = \frac{d\bar{q}_i}{d\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}}(q_i + \Delta q_i) = \frac{dq_i}{d\bar{t}} + \frac{d\Delta q_i}{d\bar{t}},$$

a pošto je $(d/d\bar{t}) \Delta t$ mala veličina, izraz u imenitelju možemo aproksimativno prikazati prema formuli $1/(1+x) \approx 1-x$ i potom zanemariti beskonačno male veličine višeg reda

$$\frac{d\bar{q}_i}{d\bar{t}} \approx \left(\frac{dq_i}{d\bar{t}} + \frac{d\Delta q_i}{d\bar{t}} \right) (1 - \frac{d}{d\bar{t}} \Delta t) \approx \frac{dq_i}{d\bar{t}} + \frac{d\Delta q_i}{d\bar{t}} - \frac{dq_i}{d\bar{t}} \frac{d}{d\bar{t}} \Delta t$$

Na taj način, uvrštavajući ovaj izraz u (II.12), dobijamo traženu varijaciju u obliku

$$\Delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \Delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \Delta t, \quad (II.14)$$

čime je nadjena veza između totalne varijacije izvoda generalisane koordinate po vremenu i izvoda po vremenu njene totalne varijacije. Odavde vidimo da ove veličine nisu međusobno jednake, tj. za razliku od operatora sinhronog variranja δ operator asinhronog variranja Δ ne komutira sa operatorom d/dt .

TOTALNA VARIJACIJA DEJSTVA. Potražimo sad totalnu varijaciju Hamilton-ovog dejstva, koje je definisano izrazom (12.27)

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (II.15)$$

pri čemu se ovde zbog variranja vremena menja i tekući element integracije dt , kao i granice integrala t_0 i t_1 . Naime, u ovom slučaju dejstva koja odgovaraju referentnom i nekom okolnom putu imaće vid

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt, \quad \bar{W} = \int_{t'_0}^{t'_1} L[\bar{q}_i(t'), \dot{\bar{q}}_i(t'), t'] dt', \quad (II.16)$$

gde je $t' = t + \Delta t$, a saglasno tome granice drugog integrala su $t'_0 = t_0 + \Delta t_0$ i $t'_1 = t_1 + \Delta t_1$. Tada će totalna varijacija dejstva biti jednaka razlici ova dva integrala

$$\Delta W = \bar{W} - W = \int_{t'_0}^{t'_1} L'(t') dt' - \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt, \quad (II.17)$$

gde smo sa $L(t)$ i $L'(t')$ označili rezultat zamene funkcija $q_i(t)$ i

$\bar{q}_i(t')$ u navedenim podintegralnim izrazima gornjih integrala.

Da bismo mogli izračunati ovu varijaciju, transformišimo je davanjem, i oduzimanjem istog integrala

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} [L'(t') - L(t')] dt' + \int_{t_0}^{t_1} L(t') dt' - \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt \quad (II.18)$$

Podintegralna veličina u prvom članu predstavlja sinhronu varijaciju Lagrange-ove funkcije L i sa tačnošću do malih veličina prvog reda ovaj integral možemo aproksimativno zameniti odgovarajućim integralom u granicama (t_0, t_1)

$$\int_{t_0}^{t_1} [L'(t') - L(t')] dt' = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t') dt' = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t) dt \approx \int_{t_0}^{t_1} \delta L(t) dt,$$

a to je sinhrona varijacija dejstva, koju smo ranije našli u vidu (12.35)

$$\int_{t_0}^{t_1} [L'(t') - L(t')] dt' \approx \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} \quad (II.19)$$

Drugi integral može se pak transformisati na sledeći način, prelazeći sa t' na t smenom $t' = t + \Delta t$

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t') dt' = \int_{t_0}^{t_1} L(t + \Delta t) \frac{d}{dt} (t + \Delta t) dt \approx \int_{t_0}^{t_1} [L(t) + \Delta t \frac{dL}{dt}] (1 + \frac{d}{dt} \Delta t) dt,$$

što je uz zanemarivanje malih veličina višeg reda jednako

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t') dt' \approx \int_{t_0}^{t_1} \left[L(t) + \frac{dL}{dt} \Delta t + L \frac{d}{dt} \Delta t \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[L(t) + \frac{d}{dt} (L \Delta t) \right] dt$$

odnosno

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t') dt' = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt + \left| L \Delta t \right|_{t_0}^{t_1} \quad (II.20)$$

Uvrštavajući ove izraze u (II.18) dobijamo traženu totalnu varijaciju dejstva u obliku

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + \left| L \Delta t \right|_{t_0}^{t_1},$$

a ako ovde prema (II.10) stavimo $\delta q_i = \Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t$, sve sinhronu varijacije biće zamenjene totalnim

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (\Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t) dt + \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \Delta t \right\} \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (II.21)$$

Ako je posmatrani sistem nedegenerisan, integrisani deo može se prikazati i u Hamilton-ovom formalizmu, uvodeći generalisane impulse i Hamilton-ovu funkciju, definisane formulama (13.2) i (13.21)

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (\Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t) dt + \left| \sum_{i=1}^n p_i \Delta q_i - H \Delta t \right|_{t_0}^{t_1} \quad (II.22)$$

Ukoliko još želimo da poslednji član napišemo što konciznije, to možemo postići stavljajući

$$q_{n+1} = t, \quad p_{n+1} = -H, \quad (II.23)$$

tj. smatrajući formalno vreme $(n+1)$ -vom generalisanom koordinatom, a negativnu vrednost Hamilton-ove funkcije odgovarajućim generalisanim impulsom. To je tzv. *homogeni Hamilton-ov formalizam*, u kome se vreme tretira na isti način kao i generalisane koordinate i tada gornji izraz (II.21) dobija koncizan i sistematičan vid

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (\Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t) dt + \left| \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_{\alpha} \Delta q_{\alpha} \right|_{t_0}^{t_1}, \quad (II.24)$$

koji može biti vrlo pogodan za izvesne ciljeve, na pr. za primenu u teoriji relativnosti pri kovarijantnoj formulaciji ili za generalizaciju teoreme Emmy Noether (v. Dodatak IV).

VEZA SA VARIJACIONIM PRINCIPIMA. Pomoću pojma totalne varijacije Δ može se formulirati jedan varijacioni princip, koji je u izvesnom smislu komplementaran Hamilton-ovom principu. Kao što smo ranije videli, pri formulaciji Hamilton-ovog principa upoređivali smo položaje posmatranog sistema na pravom i zaobilaznom putu u istom trenutku, te smo odgovarajuća odstupanja opisivali sinhronim varijacijama generalisanih koordinata $\delta q_i(t)$. Pri tome se moglo desiti da ukupna energija sistema ne bude stalna u toku vremena, na pr. ako sile zavise eksplicitno od vremena ili ako postoje nestacionarne veze, te i energije sistema na pravom i zaobilaznom putu ne moraju biti međusobno jednake.

Pretpostavimo sad da je *kinetička energija sistema homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina*, kad prema (13.36) Hamilton-ova funkcija predstavlja ukupnu energiju sistema. Pri tome postavimo još zahtev da se *kretanje posmatranog sistema kako na pravom tako i na zaobilaznom putu vrši sa istom i stalnom vrednošću ukupne energije*, tj. da bude

$$H = T + U = E = \text{const}, \quad \bar{H} = \bar{T} + \bar{U} = E = \text{const} \quad (II.25)$$

U ovom slučaju kinetička i potencijalna energija sistema pojedinačno se mogu menjati, ali tako da su uvek vezani ovim uslovima, pa se može desiti da je u nekom intervalu vremena potencijalna energija na zaobilaznom putu veća nego na pravom, a kinetička energija će za toliko morati biti manja. Usled toga će se usporiti odgovarajuće kretanje sistema, pa će sistemu biti potreban veći interval vremena $t_1 - t_0$ da na zaobilaznom putu predje iz početnog položaja u krajnji sa istom ukupnom energijom E , te pravi i zaobilazni put ne mogu počinjati i završavati se u istoj tački u konfiguracionom prostoru.

Stoga u ovom slučaju ne možemo više porediti položaje sistema na pravom i zaobilaznom putu u istom trenutku, već u različitim trenu-

cima t i $t + \Delta t$, tj. sa sinhronih moramo preći na totalne (asinhronne) varijacije. U tom upoređivanju zaobilaznom putu nametnimo još uslov da totalne varijacije svih generalisanih koordinata sistema Δq_i u trenucima $t=t_0$ i $t=t_1$ budu jednake nuli

$$\Delta q_i(t_0) = 0, \quad \Delta q_i(t_1) = 0, \quad (\text{II.26})$$

što zamenjuje ranije uslove (12.23) pri formulaciji Hamilton-ovog principa. Medjutim, pod tim uslovima sam Hamilton-ov princip više ne važi ni u obliku $\delta W = 0$, jer sad na vremenskim granicama $t = t_0$ i $t = t_1$ više nije $\delta q_i = 0$, ni u opštijem obliku $\Delta W = 0$, jer u izrazu (II.21) preostaje poslednji član sa $\Delta t \neq 0$.

Podjimo stoga od Lagrange-evog dejstva definisanog izrazom (12.43)

$$W_1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt \quad (\text{II.27})$$

i pokažimo da je njegova totalna varijacija pod ovim uslovima jednaka nuli. Pošto je ovde kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, prema Euler-ovoj teoremi imamo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T,$$

pa ukoliko je $L = T - U$, gornji integral može se transformisati na sledeći način

$$W_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt,$$

što se na osnovu definicije generalisanih impulsa (13.2) i Hamilton-ove funkcije (13.21) može napisati i u obliku

$$W_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} (L+H) dt \quad (\text{II.28})$$

Prema tome, ako se ograničimo na kretanje pri kome je $H(q_i, p_i) = \text{const}$, Lagrange-evo dejstvo je povezano sa Hamilton-ovim relacijama

$$W_1 = W + H(t_1 - t_0), \quad (\text{II.29})$$

pa će njegova totalna varijacija biti

$$\Delta W_1 = \Delta W + H(\Delta t_1 - \Delta t_0) = \Delta W + \left| H \Delta t \right|_{t_0}^{t_1} \quad (\text{II.30})$$

Pri tome je totalna varijacija Hamilton-ovog dejstva određena izrazom (II.21), a pošto duž pravog puta moraju biti zadovoljene Lagrange-eve jednačine i ako se uzmu u obzir uslovi (II.26), ovaj se izraz svodi na

$$\Delta W = \Delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = - \left| H \Delta t \right|_{t_0}^{t_1}$$

Na osnovu toga se prema (II.30) dobija da je

$$\Delta W_1 = \Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0 \quad (\text{II.31})$$

u saglasnosti sa ranije navedenom opštom formulacijom (12.45) Maupertuis-Lagrange-evog principa.

Prema tome, ako je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina i sve sile potencijalne i ako se kretanje sistema na pravom i zaobilaznom putu vrši sa stalnom ukupnom energijom, Lagrange-evo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost u odnosu na vrednost ovog dejstva duž svih zaobilaznih puteva. Ovako formulisan stav pomoću pojma totalne varijacije naziva se Euler-Lagrange-ov princip najmanjeg dejstva, jer se može pokazati da Lagrange-evo dejstvo, za razliku od Hamilton-ovog, duž pravog puta uvek ima minimilnu vrednost.

III. O KARAKTERU STACIONARNOSTI DEJSTVA

Kao što smo videli, u slučaju kretanja slobodnog sistema ili sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama prema Hamilton-ovom principu (12.37) dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (\text{III.1})$$

Da bismo ispitali karakter ove stacionarnosti dejstva, podjimo od pravog i nekog zaobilaznog puta sistema i neka su njihove jednačine kretanja $q_i = q_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) odnosno $\bar{q}_i = \bar{q}_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$). Odgovarajuća dejstva duž njih biće

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt, \quad \bar{W} = \int_{t_0}^{t_1} L[\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t] dt,$$

a pošto je $\bar{q}_i = q_i + \delta q_i$ i $\dot{\bar{q}}_i = \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i$, njihova razlika se može napisati u obliku

$$\bar{W} - W = \int_{t_0}^{t_1} [L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)] dt \quad (\text{III.2})$$

i ona je prema samom Hamilton-ovom principu (III.1) u prvoj aproksimaciji, sa tačnošću do članova prvog reda jednaka nuli.

U cilju nalaženja druge aproksimacije moramo funkciju $L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)$ razviti u Tayler-ov red u tački $(q_i, \dot{q}_i, t)$ prema formuli

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n h_i h_k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 + \dots$$

sa tačnošću do članova drugog reda. Imajući u vidu da u ovom slučaju ulogu malih priraštaja h_i igraju δq_i i $\delta \dot{q}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), prema ovoj formuli imamo

$$L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \left[\sum_{i=1}^n \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right)_0 + \sum_{i=1}^n \delta \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_0 \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta q_i \delta q_k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta q_i \delta \dot{q}_k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \right)_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right)_0 \right] + \dots$$

Uvrštavanjem ovog izraza u (III.2) dobijamo u ovoj aproksimaciji pod znakom integrala beskonačno male veličine prvog i drugog reda

$$\bar{W} - W = \int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta^2 L) dt, \quad (\text{III.3})$$

gde je prva varijacija δL data izrazom

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i, \quad (\text{III.4})$$

pri čemu smo izostavili indekse nula uz parcijalne izvode, a tzv. druga varijacija $\delta^2 L$ Lagrange-eve funkcije je

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} \delta q_i \delta q_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \delta q_i \delta \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k \quad (\text{III.5})$$

Pretpostavimo sad da je Lagrange-eva funkcija oblika $L = T - U$, tj. da su sile potencijalne u običnom (a ne u generalisanom) smislu. Pri tome je u klasičnoj nerelativističkoj mehanici prema (10.17) kinetička energija sistema kvadratna funkcija generalisanih brzina, a njen čisto kvadratni član je

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

S obzirom na (10.18) on se može napisati kao

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

odnosno

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i \right|^2, \quad (\text{III.6})$$

odakle vidimo da je čisto kvadratni član u izrazu za kinetičku energiju sistema uvek pozitivno definitan.

Na osnovu gore navedene pretpostavke imaćemo

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = a_{ik},$$

pa se poslednji član u izrazu (III.5) može napisati kao

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k$$

i on ima istu formu kao i član T_2 u kinetičkoj energiji, s tim da umesto generalisanih brzina ovde figuriraju njihove varijacije, što označimo sa

$$T_2(\delta \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_k \quad (\text{III.7})$$

Pošto je znak kvadratne forme nezavisan od oznaka nezavisno promenljivih, odavde zaključujemo da će ovaj član takodje uvek biti pozitivno definitan. Na taj način navedeni izraz (III.5) dobija vid

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} \delta q_i \delta q_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \delta q_i \delta \dot{q}_k + T_2(\delta \dot{q}_i), \quad (\text{III.8})$$

čime smo drugu varijaciju $\delta^2 L$ Lagrange-eve funkcije prikazali u vidu su-

me tri člana, od kojih je poslednji uvek pozitivno definitan.

Da bismo proučili zavisnost znaka ovog izraza od vremenskog intervala $t_1 - t_0$, pretpostavimo još da su i varijacije generalisanih brzina ograničene, tj. da je

$$|\delta \dot{q}_i(t)| \leq M_i \quad (\text{III.9})$$

U tom slučaju izraz $|\delta \dot{q}_i|$ možemo transformisati na sledeći način, imajući u vidu da se redosled operacija d/dt i δ može izmeniti

$$|\delta \dot{q}_i(t)| = \left| \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (\delta \dot{q}_i) dt \right| = \left| \int_{t_0}^t \delta \ddot{q}_i(t) dt \right| \leq \int_{t_0}^t |\delta \ddot{q}_i(t)| dt \leq \int_{t_0}^t |\delta \ddot{q}_i(t)| dt$$

odnosno, na osnovu (III.9)

$$|\delta \dot{q}_i(t)| \leq M_i (t_1 - t_0) \quad (\text{III.10})$$

Odavde vidimo da se pri dovoljno malom vremenskom intervalu $t_1 - t_0$ apsolutna vrednost varijacija generalisanih koordinata $\delta q_i(t)$ može učiniti koliko hoćemo malom. Stoga se i prva dva člana u izrazu (III.8), koji su kvadratne i linearne funkcije ovih varijacija δq_i , mogu učiniti po želji malim, tako da se vremenski interval $t_1 - t_0$ uvek može tako izabrati da zbir ova dva člana bude zanemarljiv u odnosu na treći

$$\delta^2 L \approx T(\delta \dot{q}_i) > 0 \quad (\text{III.11})$$

Tada razlika dejstva (III.2) na zaobilaznom i pravom putu dobija vid

$$\bar{W} - W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 L dt,$$

a prvi član prema Hamilton-ovom principu (III.1) jednak je nuli, pa se gornja razlika prema (III.11) svodi na

$$\bar{W} - W \approx \int_{t_0}^{t_1} T(\delta \dot{q}_i) dt > 0. \quad (\text{III.12})$$

Odavde proizlazi da pozitivna definitnost druge varijacije Lagrange-eve funkcije dovodi do zaključka da je $W < \bar{W}$, tj.

$$\delta^2 L > 0 \implies W < \bar{W} \quad (\text{III.13})$$

Medjutim, sa povećanjem vremenskog intervala $t_1 - t_0$ prema (III.10) povećava se i apsolutna vrednost varijacija generalisanih koordinata, pa i vrednosti prva dva člana u izrazu (III.8), koji mogu biti kako pozitivni tako i negativni. Tako će se doći do situacije kad će se druga varijacija $\delta^2 L$ svesti na nulu i odgovarajući položaj posmatranog sistema naziva se kinetički fokus sistema, tada će biti više ekstremala duž kojih će dejstvo u ovoj aproksimaciji imati istu vrednost W . Sa daljim povećavanjem $t_1 - t_0$ druga varijacija $\delta^2 L$ može biti i pozitivna i negativna, u zavisnosti od oblika zaobilaznog puta, pa i vrednost dejstva na pravom putu može biti i veća i manja od vrednosti dejstva na zaobilaznim putevima.

Prema tome, ako je Lagrange-eva funkcija oblika $L=T-U$ i ako su varijacije generalisanih brzina ograničene, pri dovoljno malim vremenskim intervalima $t_1 - t_0$ sve do kinetičkog fokusa sistema Hamilton-ovo dejstvo duž pravog puta ima minimalnu vrednost u odnosu na vrednosti dejstva duž svih zaobilaznih puteva.

PRIMER. Posmatrajmo kretanje čestice po idealno glatkoj nepokretnoj sferi poluprečnika R van polja sila sa početnom brzinom $\vec{v}_0$ i izaberimo polarni koordinatni sistem tako da polarna osa prolazi kroz početni položaj M_0 čestice, a ravan određenu njenim početnim položajem i početnom brzinom uzmimo za meridijansku ravan (sl. III.1). Ovako prinudno kretanje ima dva stepena slobode i za generalisane koordinate uzmimo polarne koordinate θ i φ . Kvadrat brzine u ovim koordinatama je

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2),$$

pa je Lagrange-eva funkcija ove čestice

$$L = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (\text{III.14})$$

Duž pravog puta važe Lagrange-ove jednačine za θ i φ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

što posle uvrščavanja odgovarajućih parcijalnih izvoda daje

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const} \quad (\text{III.15})$$

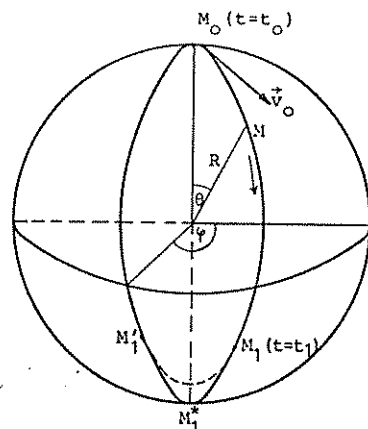
Zbog početnih uslova čestica u početnom trenutku $t = t_0$ nema komponentu brzine u pravcu jediničnog vektora $\vec{e}_\varphi$, tj. $\dot{\varphi}_0 = 0$, pa iz druge od ovih jednačina proizlazi da je i u bilo kom trenutku $\dot{\varphi} = 0$. Zamenom u prvoj jednačini (III.15) tada dobijamo da je $\ddot{\theta} = 0$, a otuda $\dot{\theta} = \text{const}$, pa je kvadrat brzine ove čestice

$$v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 = \text{const} \quad (\text{III.16})$$

Oдавде vidimo da će se pod ovim uslovima posmatrana čestica kretati stalno po ovom meridijanskom krugu sa brzinom konstantnog intenziteta $v = v_0$.

Formirajmo sad dejstvo na pravom putu $M_0 M_1$ duž uočenog meridijanskog kruga i na bilo kom od zaobilaznih puteva koji spajaju tačke M_0 i M_1

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} m v^2 dt, \quad \bar{W} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} m \bar{v}^2 dt,$$



Sl. III.1

a njihova razlika biće

$$\bar{W} - W = \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t_1} (\bar{v}^2 - v^2) dt \quad (\text{III.17})$$

Ovaj izraz se može transformisati i majorirati na sledeći način, imajući pri tome u vidu da je prema (III.16) intenzitet brzine v duž pravog puta stalan (to međjutim ne važi za $\bar{v}$ duž zaobilaznog puta)

$$\begin{aligned} \bar{W} - W &= \int_{t_0}^{t_1} m v (\bar{v} - v) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} m (\bar{v} - v)^2 dt \geq \\ &\geq m v \int_{t_0}^{t_1} (\bar{v} - v) dt = m v \left(\int_{t_0}^{t_1} \bar{v} dt - \int_{t_0}^{t_1} v dt \right) \end{aligned}$$

Ovde drugi integral u zagradi predstavlja predjeni pravi put s , a prvi predjeni zaobilazni put $\bar{s}$ u istom vremenskom intervalu $t_1 - t_0$, tako da prethodna nejednakost dobija vid

$$\bar{W} - W \geq m v (\bar{s} - s) \quad (\text{III.18})$$

Oдавде se može zaključiti da dogod je $s < \bar{s}$ biće i $W < \bar{W}$, tj. dejstvo na pravom putu biće tada manje od dejstva na bilo kom od zaobilaznih puteva. To će važiti za sve tačke M_1 na prvoj polovini meridijanskog kruga, za koje je $s = M_0 M_1 < \pi R$, jer je dužina luka glavnog kruga koji spaja tačke M_0 i M_1 na sferi manja od dužine ma koje linije na toj sferi koja spaja ove dve tačke. Kad se dodje do položaja M_1^* dijametralno suprotnog početnom položaju M_0 , ovaj uslov prestaje da važi i u tom slučaju imamo beskonačno mnogo ekstremala - glavnih krugova na sferi između tačaka M_0 i M_1 , te ovaj položaj M_1^* predstavlja odgovarajući kinetički fokus. Ukoliko se pak predje ovaj položaj, tj. kad je $s = M_0 M_1 > \pi R$, biće zaobilaznih puteva za koje je $\bar{s} < s$ (na pr. isprekidana linija na slici) kao i onih za koje je $\bar{s} > s$, te dejstvo na pravom putu može biti i veće i manje od dejstva na zaobilaznim putevima.

IV. GENERALISANA TEOREMA EMMI NOETHER

UOPŠTENJE TEOREME EMMI NOETHER. Pokažimo sad kako se može uspostaviti jedna opštija veza između transformacija koje ostavljaju dejstvo invarijantnim i prvih integrala Lagrange-evih jednačina, kojom se generalizuje ranije navedena teorema Emmy Noether (v.str.99-101). U tom cilju posmatrajmo ma kakve neprekidne transformacije ne samo generalisanih koordinata nego i vremena

$$q_1 \rightarrow q_1' = q_1'(q_k, t, \epsilon), \quad t \rightarrow t' = t'(q_k, t, \epsilon), \quad (\text{IV.1})$$

gde je ϵ beskonačno mali parametar i postavimo uslov, slično ranijem, da za $\epsilon=0$ ove transformacije prelaze u identičnost

$$q_1'(q_k, t, 0) = q_1, \quad t'(q_k, t, 0) = t \quad (\text{IV.2})$$

Kao primeri ovih transformacija mogu nam služiti translacija vremena (II.2), translacija mehaničkog sistema (II.10) kao i njegova rotacija (II.18) u prostoru. Smatrajući vreme $(n+1)$ -vom generalisanom koordina-

tom, gornje transformacije kao i navedeni uslov možemo zajedno napisati i u konciznijem obliku

$$\left. \begin{aligned} q'_\alpha &= q'_\alpha(q_\beta, \epsilon) & q'_\alpha(q_\beta, 0) &= q_\alpha \\ (\alpha, \beta &= 1, 2, \dots, n+1; & q_{n+1} &= t) \end{aligned} \right\} \quad (IV.3)$$

Formirajmo razlike veličina $q'_\alpha(q_\beta, \epsilon)$ za $\epsilon \neq 0$ i $\epsilon=0$, koje usled transformacije vremena odgovaraju totalnim varijacijama i označimo ih ovde sa

$$\Delta^* q_\alpha \triangleq q'_\alpha(q_\beta, \epsilon) - q'_\alpha(q_\beta, 0) \quad (IV.4)$$

Ovako definisane varijacije predstavljaju specijalni slučaj tzv. varijacija generalisanih koordinata u opštem smislu (v. Dodatak IV), koje su ovde izazvane promenom parametra ϵ u transformacionim relacijama (IV.3). One se bitno razlikuju od varijacija kod Hamilton-ovog principa ili principa najmanjeg dejstva, koje se odnose na prelaz sa pravog na zaoobilazni put, zbog čega ih za razliku od ovih označavamo zvezdicom, kao i u odeljku 11. Na sličan način kao što smo postupili i ranije, razvijmo funkcije $q'_\alpha(q_\beta, \epsilon)$ u Taylor-ov red u tački $\epsilon=0$ i zanemarimo više članove

$$q'_\alpha(q_\beta, \epsilon) = q'_\alpha(q_\beta, 0) + \epsilon \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} + \dots,$$

čime u prvoj aproksimaciji dobijamo

$$\Delta^* q_\alpha \approx \epsilon \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \quad (IV.5)$$

Odgovarajuća totalna varijacija dejstva pri ma kakvim varijacijama Δq_α u opštem smislu određena je formulom (II.18), a ako su zadovoljene Lagrange-eve jednačine za potencijalne sile i ako varijacije generalisanih koordinata i vremena shvatimo u gornjem smislu, ona se svodi na

$$\Delta^* W = \left| \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \Delta^* q_\alpha \right|_{t_0}^{t_1},$$

što posle uvrštavanja izraza (IV.5) dobija vid

$$\Delta^* W \approx \epsilon \left| \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \right|_{t_0}^{t_1} \quad (IV.6)$$

Ukoliko pri tome dejstvo ostaje invarijantno, tj. ako je $\Delta^* W=0$, biće

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \right|_{t=t_1} = \left| \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \right|_{t=t_0},$$

a pošto su trenuci t_0 i t_1 potpuno proizvoljni, odavde zaključujemo da pri ovakvoj transformaciji postoji sledeći integral kretanja

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial q'_i}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} - H \left(\frac{\partial t'}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \text{const} \quad (IV.7)$$

Prema tome, svakoj neprekidnoj transformaciji koordinata i vremena pri kojoj Hamilton-ovo dejstvo ostaje invarijantno odgovara jedan prvi integral Lagrange-evih jednačina sa jednim dopunskim članom, koji potiče od transformacije vremena. Ovaj stav predstavlja uopštenje ranije navedene teoreme na slučaj kad se i vreme transformiše i u tom

smislu se može zvati *generalisana teorema Emmy Noether*.

PRIMENA NA DOBIJANJE ZAKONA ODRŽANJA. Razmotrimo prvo translaciju vremena za beskonačno malu vrednost ϵ

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon \quad (q'_i = q_i, i=1, 2, \dots, n) \quad (IV.8)$$

Pošto je vreme u odnosu na inercijalne sisteme homogeno, tj. svi su trenuci ravnopravni, translacija vremena ne sme da utiče na zakone kretanja, a oni su određeni Lagrange-evim jednačinama. Stoga i ove jednačine pri tome moraju ostati nepromenjene, a za to je dovoljno da sama Lagrange-eva funkcija, pa i dejstvo kao njen integral po vremenu ostanu nepromenjeni. Prema tome, ispunjen je uslov $\Delta^* W = 0$ o invarijantnosti dejstva u odnosu na ovu transformaciju, pa postoji odgovarajući prvi integral (IV.7), koji će ovde imati vid

$$\sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = -H \left(\frac{\partial t'}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \text{const}, \quad (IV.9)$$

jer veličine q'_i ne zavise od parametra ϵ .

U ovom slučaju prema (IV.8) nalazimo da je

$$\frac{\partial t'}{\partial \epsilon} = 1 \implies \left(\frac{\partial t'}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = 1,$$

pa se gornji prvi integral s obzirom na definiciju Hamilton-ove funkcije (13.21) svodi na

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = -H = L - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \text{const} \quad (IV.10)$$

Ako su još sve sile koje dejstvuju na čestice posmatranog sistema potencijalne, a njegova kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, Hamilton-ova funkcija predstavljaće ukupnu energiju sistema, tj.

$$- \sum_{\alpha=1}^{n+1} p_\alpha \left(\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = T+U = E = \text{const} \quad (IV.11)$$

Na taj način dolazimo do zaključka da translaciji vremena u inercijalnim sistemima referencije, koja održava dejstvo invarijantnim, prema teoremi Emmy Noether odgovara održanje ukupne energije sistema.

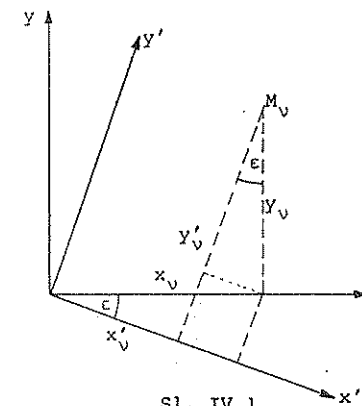
Kao drugi primer uzmimo rotaciju sistema čestica oko Z-ose za beskonačno mali ugao ϵ , odnosno koordinatnog sistema za ugao $-\epsilon$ (sl. IV.1)

$$\begin{aligned} x'_V &= x_V \cos \epsilon - y_V \sin \epsilon, \\ y'_V &= x_V \sin \epsilon + y_V \cos \epsilon \end{aligned}$$

ili aproksimativno

$$x'_V \approx x_V - y_V \epsilon, \quad y'_V \approx x_V \epsilon + y_V \quad (IV.12)$$

Pošto je prostor u odnosu na inercijalne sisteme izotropan, tj. svi su pravci ravnopravni, rotacija sistema ne sme da utiče na zakone kretanja, jer bi u protivnom osa



Sl. IV.1

rotacije predstavljala istaknut pravac. Odatavde proizlazi, sličnim rezonovanjem kao u prethodnom slučaju, da Lagrange-eva funkcija kao i dejstvo moraju ostati nepromenjeni, te je i ovde ispunjen uslov $\Delta^* W = 0$ q invarijantnosti dejstava u odnosu na ovu transformaciju.

Ako se za generalisane koordinate izaberu pravougle koordinate čestica, odgovarajući prvi integral (IV.7) biće

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} p_{\alpha} \left(\frac{\partial q'_{\alpha}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{v=1}^N p_{x_v} \left(\frac{\partial x'_v}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \sum_{v=1}^N p_{y_v} \left(\frac{\partial y'_v}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \text{const}, \quad (\text{IV.13})$$

jer z'_v i t' ne zavise od parametra ε . Izračunavajući ove parcijalne izvode na osnovu (IV.12)

$$\frac{\partial x'_v}{\partial \varepsilon} = -y_v, \quad \frac{\partial y'_v}{\partial \varepsilon} = x_v,$$

koji imaju istu vrednost i za $\varepsilon = 0$, i uvrštavajući ih u (IV.13) dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} p_{\alpha} \left(\frac{\partial q'_{\alpha}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{v=1}^N (x_v p_{y_v} - y_v p_{x_v}) = M_z = \text{const} \quad (\text{IV.14})$$

Ovaj izraz predstavlja z-komponentu momenta impulsa sistema, tj. rotaciju sistema oko z-ose u inercijalnim sistemima referencije, koja održava dejstvo invarijantnim, prema teoremi Emmy Noether odgovara održanje komponente momenta impulsa sistema u pravcu ove ose rotacije.

V. ODNOS IZMEDJU LAGRANGE-EVOG I HAMILTON-OVOG FORMALIZMA

LEGENDRE-OVE TRANSFORMACIJE. Upoznajmo se pre svega sa jednim specijalnim tipom transformacija, koji se često koristi u mnogim granama teorijske fizike. Posmatrajmo na pr. ma kakvu funkciju $f(x,y)$ dveju nezavisno promenljivih, njen totalni diferencijal biće oblika

$$df = u dx + v dy, \quad (\text{V.1})$$

gde je

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{V.2})$$

Ako pak želimo da umesto x uzmemo u kao nezavisno promenljivu, treba iz prve jednačine (V.2), koja je oblika $u = f(x,y)$, naći $x = x(u,y)$ i zatim staviti

$$udx = d(ux) - xdu,$$

čime smo sa dx prešli na du , pa se relacija (V.1) transformiše u

$$d(f-ux) = -xdu + vdy \quad (\text{V.3})$$

Odatavde vidimo da je izraz u u zagradi takav da je njegov diferencijal linearna funkcija od du i dy , te ovaj izraz možemo smatrati funkcijom nezavisno promenljivih u i y

$$g(u,y) = f(x,y) - ux \quad (\text{V.4})$$

Sa ovako uvedenom funkcijom gornji izraz može se napisati u obliku

$$dg = -xdu + vdy, \quad (\text{V.5})$$

pa poredjenjem sa odgovarajućom formulom za totalni diferencijal

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

proizlazi da je

$$x = - \frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{V.6})$$

Transformacije ovog tipa u matematici nazivaju se Legendre-ove transformacije i predstavljaju specijalni slučaj jedne šire klase tzv. kontaktnih transformacija. Njima se sa jedne nezavisno promenljive pod znakom diferencijala prelazi na drugu koja je jednaka parcijalnom izvodu stare funkcije po toj promenljivoj, što je praćeno prelazom sa prvobitne funkcije na novu, koja sad predstavlja funkciju novih nezavisno promenljivih. One se koriste kadgod se ovakvim postupkom može preći na novu nezavisno promenljivu koja je u datim uslovima pogodnija od prvobitne.

Uzmimo kao primer termodinamičke funkcije, određene principima termodinamike. Prema prvom od njih, ako se termodinamičkom sistemu dodeli izvesna količina toplote, koja se prema drugom principu može napisati u obliku $d'Q = T dS$, i na njemu izvrši rad usled promene zapremine $d'A = -p dV$, njihov zbir predstavljaće odgovarajuću promenu unutrašnje energije sistema

$$dU = d'Q + d'A = TdS - pdV \quad (\text{V.7})$$

Ovde su nezavisno promenljive S i V kao veličine pod znakom diferencijala, te unutrašnju energiju U treba smatrati funkcijom ovih veličina. Ako hoćemo da umesto S uzmemo T kao nezavisno promenljivu, stavimo

$$TdS = d(TS) - SdT,$$

čime gornja relacija prelazi u

$$d(U - TS) = -SdT - pdV$$

odnosno, ako izraz u u zagradi označimo sa F

$$dF = -SdT - pdV \quad (\text{V.8})$$

gde je

$$F(T,V) = U(S,V) - TS \quad (\text{V.9})$$

tzv. slobodna energija sistema. Na sličan način, ako stavimo

$$pdV = d(pV) - Vdp,$$

početna relacija (V.7) dobija vid

$$dH = TdS + Vdp, \quad (\text{V.10})$$

gde je

$$H(S,p) = U(S,V) + pV \quad (\text{V.11})$$

tzv. entalpija ili toplotna funkcija sistema.

PRELAZ SA JEDNOG ANALITIČKOG FORMALIZMA NA DRUGI. Primenimo sad ove rezultate na mehaniku i pokažimo da prelaz sa Lagrange-evog formalizma na Hamilton-ov predstavlja jednu Legendre-ovu transformaciju. Kao što smo ranije pokazali, ako podjemo od Lagrange-evih jednačina (II.32)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad (V.12)$$

gde su Q_i^* nepotencijalne generalisane sile i napišemo varijaciju Lagrange-eve funkcije

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i,$$

pa u prvom članu zamenimo $\partial L / \partial \dot{q}_i$ odgovarajućim izrazom iz Lagrange-evih jednačina (V.12) i iskoristimo definiciju generalisanih impulsa $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, dobijamo

$$\delta L = \sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i \quad (V.13)$$

Ukoliko hoćemo da predjemo na Hamilton-ov formalizam, umesto generalisanih brzina $\dot{q}_i$ treba uvesti generalisane impulse $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, po analogiji sa prvom relacijom (V.2), stavljajući saglasno tome

$$p_i \delta \dot{q}_i = \delta(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i \delta p_i,$$

čime se gornja relacija transformiše u

$$\delta(L - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i) = - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i + \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i \quad (V.14)$$

Izraz u zagradi s leve strane, koji prema ovoj relaciji treba smatrati funkcijom veličina q_i i p_i , predstavlja negativnu vrednost Hamilton-ove funkcije

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (V.15)$$

Upoređujući izraz (V.13) sa (V.1), zapažamo da ovde ulogu nezavisno promenljivih x i y igraju $\dot{q}_i$ i q_i ($i=1, 2, \dots, n$), a ulogu promenljivih u i v veličine p_i i $\dot{p}_i - Q_i^*$, što prikažimo u vidu sheme

$$\left. \begin{array}{cccccc} x & y & u & v & f & g \\ \dot{q}_i & q_i & p_i & \dot{p}_i - Q_i^* & L & -H \end{array} \right\} \quad (V.16)$$

Na osnovu toga možemo zaključiti da relacijama (V.6) ovde odgovaraju sledeće

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i - Q_i^* = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (V.17)$$

a to su Hamilton-ove (kanonske) jednačine.

Odavde vidimo da prelaz sa Lagrange-evog na Hamilton-ov formalizam predstavlja Legendre-ovu transformaciju, u kojoj se sa generalisanih brzina kao nezavisno promenljivih prelazi na generalisane impulse i istovremeno sa Lagrange-eve funkcije $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ na Hamilton-ovu funkciju $H(q_i, p_i, t)$. Time se umesto skupa $(q_i, \dot{q}_i)$ uvodi ekvivalentan skup (q_i, p_i) , koji određuje dinamičko stanje sistema, a ovaj prelaz se ostvaruje rešavanjem sistema jednačina $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) po generalisanim brzinama $\dot{q}_i$, što je u klasičnoj mehanici uvek moguće.

Ako pak hoćemo da polazeći od Hamilton-ovog formalizma predjemo na Lagrange-ev, treba poći od varijacije Hamilton-ove funkcije

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i$$

i transformisati je na sličan način, koristeći pri tome Hamilton-ove jednačine

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i \quad (V.18)$$

Stavljajući ovde

$$\dot{q}_i \delta p_i = \delta(p_i \dot{q}_i) - p_i \delta \dot{q}_i$$

gornja relacija prelazi u

$$\delta(H - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - Q_i^*) \delta q_i, \quad (V.19)$$

a izraz u zagradi s leve strane predstavlja negativnu vrednost Lagrange-eve funkcije, pa će odgovarajuće relacije (V.6) u ovom slučaju imati vid

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{p}_i - Q_i^* = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (V.20)$$

a eliminacijom generalisanih impulsa neposredno dobijamo Lagrange-eve jednačine (V.12). Odavde proizilazi da prelaz sa Hamilton-ovog formalizma na Lagrange-ev predstavlja Legendre-ovu transformaciju inverznu prethodnoj, što je u klasičnoj mehanici takodje uvek moguće.

PARALELA IZMEDJU LAGRANGE-EVOG I HAMILTON-OVOG FORMALIZMA. Na osnovu svega ranije izloženoga prikažimo ovde uporedo osnovne karakteristike Lagrange-evog i Hamilton-ovog formalizma, koji oba baziraju na metodu generalisanih koordinata i čine posebnu granu teorijske mehanike, tzv. analitičku mehaniku:

a) U Lagrange-evom formalizmu osnovni cilj je određivanje položaja sistema, odgovarajuće promenljive su skup najmanjeg broja generalisanih koordinata $q_1, q_2, \dots, q_n$, koje su određene funkcije vremena. Nasuprot tome, u Hamilton-ovom formalizmu se kao osnovni cilj postavlja određivanje dinamičkog stanja sistema, a za tu svrhu se koristi skup kanonskih promenljivih: generalisane koordinate i generalisani impulsi $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, koji su takodje funkcije vremena.

b) Osnovna funkcija u Lagrange-evom formalizmu je Lagrange-eve funkcija $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, koja nema neposredan fizički smisao, a ukoliko je $L = T - U$ taj smisao imaju samo posebno kinetička i potencijalna energija sistema. U Hamilton-ovom formalizmu pak tu ulogu igra Hamilton-ova funkcija $H(q_i, p_i, t)$, koja u slučaju kad je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina predstavlja ukupnu energiju sistema.

c) Diferencijalne jednačine kretanja u Lagrange-evom formalizmu su Lagrange-eve jednačine, to je sistem od n simultanih diferencijalnih jednačina drugog reda. Odgovarajuće jednačine u Hamilton-ovom formalizmu su Hamilton-ove (kanonske) jednačine, koje su za razliku od prethodnih sistem od $2n$ simultanih diferencijalnih jednačina prvog reda.

d) Za geometrijski prikaz položaja sistema uvodi se *konfiguracioni prostor*, n -dimenzioni euklidski prostor u kome je tačka skup veličina $(q_1, q_2, \dots, q_n)$. U cilju geometrijskog prikaza dinamičkog stanja sistema služi nam *fazni prostor*, koji predstavlja $2n$ -dimenzioni euklidski prostor u kome ulogu tačke igra skup $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$.

Oдавде se vidi da događ se radi samo o rešavanju čisto mehaničkog problema, tj. o nalaženju konačnih jednačina kretanja ili bar njenih prvih integrala, dovoljan nam je Lagrange-ev formalizam, odnosno odgovarajuće Lagrange-eve jednačine. Međutim, ukoliko želimo da se bavimo proučavanjem dinamičkog stanja sistema, neophodan nam je Hamilton-ov formalizam sa odgovarajućim Hamilton-ovim jednačinama, a posebno u obliku formulisano pomoću Poisson-ovih zagrada. Stoga one grane teorijske fizike koje baziraju na pojmu stanja sistema, a to su pre svega statistička fizika i kvantna mehanika, neposredno se oslanjaju na Hamilton-ov formalizam i bez njega se i ne mogu formulisati.

UPOŠTENJE LAGRANGE-EVOG I HAMILTON-OVOG FORMALIZMA. Poseban i najveći značaj oba ova formalizma analitičke mehanike sastoji se u tome što se oni mogu generalisati i primenjivati u raznim granama teorijske fizike i to u sledećem smislu. Pretpostavimo da su nam poznate osnovne diferencijalne jednačine neke njene oblasti, kao na pr. osnovna jednačina relativističke dinamike, Maxwell-ove jednačine u elektrodinamici, Schrödinger-ova jednačina u kvantnoj mehanici. Postavimo sad pitanje da li se one mogu formalno napisati u obliku Euler-Lagrange-evih jednačina varijacionog računa, koje izražavaju uslove stacionarnosti izvesnog integrala

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} dt = 0 \quad (V.21)$$

i koje za diskretne sisteme imaju vid

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (V.22)$$

(O Euler-Lagrange-evim jednačinama za kontinuirane sisteme biće reči u Dodatku IX, str. 391). Ukoliko se pokaže da je to moguće, odgovarajuća funkcija u tim jednačinama, odnosno u ovom integralu naziva se *lagranžijan* ili *Lagrange-eva funkcija* u širem smislu, a sam integral *dejstvo* za posmatrani sistem, pri čemu ćemo ovako definisan lagranžijan za razliku od Lagrange-eve funkcije $L = T - V$ označiti sa $\tilde{L}$. Drugim rečima, pod lagranžijanom se podrazumeva takva funkcija čije se odgovarajuće Euler-Lagrange-eve jednačine poklapaju sa unapred datim osnovnim jednačinama te oblasti, uz napomenu da za date jednačine lagranžijan nije jednoznačno određen. Za ovako definisan lagranžijan prelaz na Hamilton-ov formalizam vrši se na uobičajeni način, zadržavajući standardne definicije generalisanih impulsa i hamiltonijana

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \tilde{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \dot{q}_i - \tilde{L} \quad (V.23)$$

Na pr. u specijalnoj teoriji relativnosti se nalazi da je osno-

vna jednačina relativističke dinamike

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = f_i,$$

a za generalisano potencijalne sile ona ima vid

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dx} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \quad (V.24)$$

Ako pak napišemo odgovarajuće Euler-Lagrange-eve jednačine, uzimajući za generalisane koordinate pravouglo koordinate posmatrane čestice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} = 0,$$

može se pokazati da će navedeni uslov zadovoljavati sledeća funkcija

$$\tilde{L}(x_i, \dot{x}_i, t) = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(x_i, \dot{x}_i, t), \quad (V.25)$$

koja više nije jednaka razlici kinetičke i potencijalne energije. Naime, ako se ona uvrsti u gornje jednačine, posle sredjivanja ove će se poklopiti sa jednačinama (V.24), odakle zaključujemo da funkcija (V.25) predstavlja lagranžijan ove čestice u polju generalisano potencijalnih sila. Ako bismo formirali generalisane impulse i hamiltonijan prema formulama (V.23), videli bismo da bi i u ovom slučaju hamiltonijan predstavljao ukupnu energiju posmatrane čestice, što ostavljamo čitaocu za vežbu.

Međutim, i u samoj klasičnoj nerelativističkoj mehanici je nadjeno da ima slučajeva kad je i pored delovanja nepotencijalnih sila moguće prikazati diferencijalne jednačine kretanja sistema u obliku Euler-Lagrange-evih jednačina varijacionog računa (B. Milić: Njutnova mehanika, Niš, 1983, str. 269-70). Ograničimo se ovde na sisteme sa jednim stepenom slobode, za koje odgovarajuća Lagrange-eva jednačina ima vid (11.32).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q^*, \quad (V.26)$$

gde je Q^* nepotencijalna generalisana sila i gde je jedino pretpostavljeno da nema neholonomnih veza. Pokušajmo sad da posmatrani sistem opišemo lagranžijanom koji bi bio jednak proizvodu Lagrange-eve funkcije $L = T - V$ i izvesne funkcije vremena

$$\tilde{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) \cdot f(t), \quad (V.27)$$

gde ovu funkciju $f(t)$ treba tako odrediti da se ovim postupkom prvobitna Lagrange-eva jednačina (V.26) transformiše u jednačinu oblika (V.22)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0$$

Ako formiramo odgovarajuće parcijalne izvođe ovako definisanog lagranžijana i uvrstimo ih u prethodnu jednačinu, imaćemo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} f(t) \right] - \frac{\partial L}{\partial q} f(t) = 0,$$

što posle razvijanja i grupisanja daje

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{df}{dt} + f(t) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0. \quad (V.28)$$

Ovde izraz u zagradi prema Lagrange-evoj jednačini (V.26) možemo zameniti sa Q^*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{df}{dt} + Q^* f(t) = 0 \quad (V.29)$$

i to je diferencijalna jednačina za određivanje nepoznate funkcije $f(t)$, a njeno rešenje se može neposredno naći razdvajanjem promenljivih

$$\frac{df}{f} = - \frac{Q^*}{\partial L / \partial \dot{q}}$$

i integracijom obeju strana, čime dobijamo

$$f(t) = C e^{-\int \frac{Q^*}{\partial L / \partial \dot{q}} dt} \quad (V.30)$$

U opštem slučaju izraz $Q^* / (\partial L / \partial \dot{q})$ u eksponentu je izvesna funkcija generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena, a da bismo mogli sprovesti integraciju, moramo znati oblik funkcija $q = q(t)$. Posle toga bi se trebalo vratiti na veličine $q(t)$ i $\dot{q}(t)$, što najčešće nije jednoznačno rešivo i samo ukoliko se ovaj izraz svede na konstantu, za šta je potrebno (ali ne i dovoljno) da Q^* bude srazmerno sa $\dot{q}$, moguće je neposredno izračunati gornji integral i na taj način naći traženu funkciju $f(t)$.

Oдавде vidimo da se i pri delovanju nepotencijalnih sila na čestice sistema sa jednim stepenom slobode, čije je kretanje slobodno ili ograničeno samo holonomnim vezama i kod koga je odnos nepotencijalne sile i generalisanog impulsa konstantan, njegove diferencijalne jednačine kretanja mogu prikazati u obliku Euler-Lagrange-evih jednačina varijacionog računa. Ilustrujmo to na primeru linearnog harmonijskog oscilatora u otpornoj sredini, na koji sem harmonijske dejstvuje i nepotencijalna sila oblika $F^* = -2m\beta\dot{x}$, kad Lagrange-eva funkcija ima vid

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2,$$

a odgovarajuća Lagrange-eva jednačina je

$$m\ddot{x} - m\omega^2 x = -2m\beta\dot{x} \quad (V.31)$$

U ovom slučaju možemo neposredno naći funkciju $f(t)$ prema (V.30), jer se integrand u eksponentu svodi na konstantu

$$f(t) = C e^{-\int \frac{F^*}{\partial L / \partial \dot{x}} dt} = C e^{-2\beta t},$$

pa će traženi lagranžijan (V.27) biti

$$\tilde{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} C e^{-2\beta t} m (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2), \quad (V.32)$$

a neposrednim proveravanjem možemo se uveriti da će se odgovarajuća Euler-Lagrange-eva jednačina zaista svesti na jednačinu (V.31). Generalisani impuls i hamiltonijan koji odgovaraju ovom lagranžijanu možemo tada dobiti na standardni način prema (V.23), ali oni više nemaju uobičajeni

fizički smisao. Međutim, ima i takvih sistema gde je moguće napisati diferencijalne jednačine kretanja u obliku Euler-Lagrange-evih jednačina sa lagranžijanom koji više nije jednak proizvodu Lagrange-ove funkcije i neke druge funkcije, a ne postoji ni kriterijum koji bi nam pokazao kad je to uopšte moguće.

VI. KARAKTERISTIKE DEGENERISANIH SISTEMA

DEFINICIJA I PRIMARNE VEZE. Proučimo ovde detaljnije osnovne karakteristike degenerisanih sistema, sa kojima smo se već ranije upoznali (str. 120-3), a čija se Dirac-ova teorija može sistematski generalisati i na kontinuirane sisteme (D. Djokić-Ristanović: Degenerisani sistemi u klasičnoj teoriji polja, dokt. teza 1975) i primenjivati u raznim granama savremene teorijske fizike (A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim: Constrained Hamiltonian systems, Roma 1976). Kao što smo naveli, pod degenerisanim sistemima se podrazumevaju takvi kod kojih je hesijan lagranžijana (13.105) u odnosu na generalisane brzine jednak nuli

$$\Delta = \left| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_k} \right| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right| = 0, \quad (VI.1)$$

što se u klasičnoj nerelativističkoj mehanici nikad ne može desiti i neka je rang ove determinante $n - R$. U tom slučaju sistem jednačina koji definiše generalisane impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (VI.2)$$

ne može se potpuno rešiti po generalisanim brzinama $\dot{q}_i$, moguće je samo $n - R$ ovih nezavisnih jednačina rešiti po isto toliko generalisanih brzina u funkciji ostalih veličina

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_1, \dots, p_{n-R}, \dot{q}_{n-R+1}, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n-R). \quad (VI.3)$$

Tada prema teoremi o zavisnosti funkcija za ovakve sisteme jednačina postoji R relacija između generalisanih impulsa koje ne sadrže generalisane brzine, tj. relacija oblika

$$\phi_r(p_i, q_i, t) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, R) \quad (VI.4)$$

i to su tzv. primarne veze između kanonskih promenljivih.

LAGRANGE-EVE JEDNAČINE ZA DEGENERISANE SISTEME. Pozabavimo se prvo Lagrange-evim formalizmom za ovakve sisteme i ograničimo se na one sa potencijalnim silama, pa podjimo od odgovarajućih Euler-Lagrange-evih jednačina, koje odgovaraju datom lagranžijanu $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ posmatranog fizičkog sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (VI.5)$$

Ako prvi član napišemo eksplicitno, imajući u vidu da je $\partial L / \partial \dot{q}_i$ izvesna funkcija generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena, prema pravilu za posredno diferenciranje funkcija imaćemo

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} = A_i(q_k, \dot{q}_k, t),$$

što napišimo konciznije u obliku

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k = A_i(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (VI.6)$$

gde je

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \quad (VI.7)$$

i gde smo izraz na desnoj strani označili sa $A_i(q_k, \dot{q}_k, t)$. To je sistem linearnih jednačina po generalisanim ubrzanjima $\ddot{q}_k$, a determinanta odgovarajućih koeficijenata je $|\partial L / \partial \dot{q}_i|$, ista ona koju smo malo pre naveli pri analizi sistema jednačina (VI.2). Pošto je ona u ovom slučaju prema (VI.1) jednaka nuli, sistem Lagrange-evih jednačina za degenerisane sisteme ne može se potpuno rešiti po najvišim izvodima, moguće je samo $n - R$ ovih jednačina rešiti po generalisanim ubrzanjima

$$\ddot{q}_i = \psi_i(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n-R) \quad (VI.8)$$

Kao što je poznato iz matematike, ako je neka kvadratna matrica $A = \{a_{ik}\}$ singularna, tj. ako je determinanta njenih koeficijenata jednaka nuli i to ranga $n - R$, između njenih kolona (ili vrsta) postoji R linearnih relacija

$$\gamma_1^j \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \gamma_2^j \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \gamma_n^j \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = 0,$$

što se može prikazati i u vidu

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k^j a_{ik} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, R) \quad (VI.9)$$

Na osnovu (VI.7) ovde možemo staviti $a_{ik} = a_{ki}$, pa ako potom uzajamno izmenimo indekse i i k , prethodne relacije prelaze u

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^j a_{ik} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, R) \quad (VI.10)$$

Ako sad obe strane Lagrange-evih jednačina (VI.6) pomnožimo sa γ_i^j i saberemo tako dobijene jednačine, posle izmene redosleda sumiranja imaćemo

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^j \sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^n \ddot{q}_k \sum_{i=1}^n \gamma_i^j a_{ik} = \sum_{i=1}^n \gamma_i^j A_i(q_k, \dot{q}_k, t),$$

a izraz na levoj strani prema (VI.10) jednak je nuli, odakle proizlazi da je

$$F_j(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^j A_i(q_k, \dot{q}_k, t) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, R) \quad (VI.11)$$

Odavde vidimo da među linearnim kombinacijama Lagrange-evih jednačina degenerisanih sistema ima R takvih u kojima više ne figurišu generalisana ubrzanja $\ddot{q}_k$. Detaljnija analiza pokazuje da se uticaj degeneracije sistema na Lagrange-eve jednačine sastoji u sledećem: a) samo

$n - R$ Lagrange-evih diferencijalnih jednačina su drugog reda, b) izvestan broj $L \leq R$ ovih jednačina su prvog ili čak nultog reda, c) preostalih $R - L$ jednačina su posledice ostalih, na osnovu kojih se one svode na identičnosti. Time se Lagrange-ev formalizam za degenerisane sisteme bitno razlikuje od ovog za standardne sisteme, gde su sve Lagrange-eve diferencijalne jednačine drugog reda, a sama činjenica da se sistem Lagrange-evih jednačina ne može potpuno rešiti po najvišim izvodima ukazuje na to da ove jednačine pri datim početnim uslovima ovde nemaju jednoznačno rešenje.

PRELAZ NA HAMILTON-OV FORMALIZAM I SEKUNDARNE VEZE. Ako želimo da sa Lagrange-evog formalizma predjemo na Hamilton-ov, treba eliminisati generalisane brzine i zameniti ih generalisanim impulsima. Međutim, u slučaju degenerisanih sistema to nije moguće jedino pomoću jednačina (VI.2), to se može izvesti samo delimično pomoću $n-R$ relacija (VI.3), dobijenih iz njih. Ako se formira hamiltonijan na uobičajeni način prema (13.21), koji ovde označimo sa H_0

$$H_0(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (VI.12)$$

i uzme u obzir R primarnih veza (VI.4), pokazuje se da preostale generalisane brzine automatski ispadaju iz ovog izraza. Zaista, njegov parcijalni izvod po ma kojoj generalisanoj brzini $\dot{q}_i$ biće, na osnovu sistema jednačina (VI.2) ekvivalentnog primarnim vezama

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}_i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (VI.13)$$

odakle se vidi da tako formiran hamiltonijan ne zavisi od generalisanih brzina.

Pri ovom prelazu na Hamilton-ov formalizam dobijaju se i nove veze između kanonskih promenljivih i to na sledeći način. Uočimo one degenerisane Lagrange-eve jednačine (VI.11) koje predstavljaju diferencijalne jednačine prvog (a ne i nultog) reda i nisu posledica ostalih

$$F_j(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, L_1)$$

Ako ovde na gore izloženi način generalisane brzine zamenimo generalisanim impulsima, ove jednačine se transformišu u nove veze između generalisanih impulsa i generalisanih koordinata, koje su nezavisne od primarnih (VI.4)

$$X_j(p_i, q_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, L_1 \leq L) \quad (VI.14)$$

Sam toga, sve navedene relacije, primarne veze (VI.4) i ovako dobijene (VI.14) moraju biti očuvane u toku vremena, te predstavljaju prve integrale i stoga moraju zadovoljavati uslove (13.78)

$$\frac{d\phi_j}{dt} = 0 \quad \frac{dX_j}{dt} = 0 \quad (VI.15)$$

To su tzv. uslovi konzistentnosti i oni mogu dovesti kako do relacija koje su posledica ostalih, tj. identičnosti, tako i do izvesnih novih, naknadnih veza između kanonskih promenljivih istog oblika $X_j(p_i, q_i,$

$t) = 0$, koje se ne sadrže među jednačinama (VI.4) i (VI.14). Ako se ovaj postupak ponovi primenjujući i na ove relacije uslove konzistentnosti, mogu se pojaviti još neke veze između kanonskih promenljivih, a ponavljajući tu proceduru dogod se uslovi konzistentnosti ne svedu na identičnosti dobićemo maksimalni broj ovakvih veza

$$\chi_s(p_i, q_i, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, S) \quad (\text{VI.16})$$

Sve one se nazivaju *sekundarne veze* i iz izloženoga se vidi da one delom potiču od *degenerisanih Lagrange-evih jednačina*, a delom od *uslova konzistentnosti primenjenog na sve veze*.

Oдавde možemo zaključiti da se Hamilton-ov formalizam za degenerisane sisteme karakteriše određenim brojem relacija između kanonskih promenljivih: primarnih i sekundarnih veza, koje sve zajedno napišimo u obliku

$$\theta_\beta(p_i, q_i, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, B = R + S) \quad (\text{VI.17})$$

Medjutim, pokazalo se da je prema uticaju na diferencijalne jednačine kretanja mnogo značajnija jedna drukčija podela svih ovakvih relacija: na veze prve i druge klase, koje se mogu definisati na sledeći način. Za neku funkciju $F(p_i, q_i, t)$ kanonskih promenljivih reći ćemo da je *funkcija prve klase* ako zadovoljava sledeće uslove

$$[F, \theta_\beta] = 0, \quad [F, H_0] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (\text{VI.18})$$

a sve ostale su funkcije druge klase i saglasno tome sve relacije (VI.17) možemo podeliti na *veze prve i druge klase* prema tome da li funkcija $\theta_\beta(p_i, q_i, t)$ spada u prvu ili drugu kategoriju.

Da bismo dobili odgovarajuće Hamilton-ove jednačine, moramo s jedne strane poći od varijacije hamiltonijana (13.20)

$$\delta H_0 = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \delta q_i,$$

a s druge od činjenice da zbog postojanja veza (VI.17) varijacije generalisanih impulsa i generalisanih koordinata više nisu međusobno nezavisne

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_\beta}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta_\beta}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

Stoga se ovde mora primeniti metod množitelja veza i tim putem smo pokazali da se dobijaju *Hamilton-ove jednačine za degenerisane sisteme* u obliku (13.110)

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \sum_{\beta=1}^B \lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \sum_{\beta=1}^B \lambda_\beta \frac{\partial \theta_\beta}{\partial p_i}. \quad (\text{VI.19})$$

Sem toga, ako se potraži totalni izvod ma kakve funkcije $F(q_i, p_i, t)$ kanonskih promenljivih po vremenu

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

i ovde zamene $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ odgovarajućim izrazima iz Hamilton-ovih jednačina (VI.19), dobija se i *opšta jednačina kretanja* (13.111), izražena pomoću

Poisson-ovih zagrada

$$\frac{dF}{dt} = [F, H_0] + \sum_{\beta=1}^B \lambda_\beta [F, \theta_\beta] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{VI.20})$$

ODREĐJIVANJE MNOŽITELJA VEZA I EFEKTIVNA REDUKCIJA BROJA STEPENI SLOBODE. Pokažimo sad kako se mogu odrediti množitelji veza λ_β , koji figurišu u navedenim jednačinama u Hamilton-ovom formalizmu. Pošto oni potiču od jednačina veza (VI.17), primenimo uslov konzistentnosti na ove veze, tj. uslov $d\theta_\beta/dt = 0$, stavljajući $F = \theta_\beta(p_i, q_i, t)$ u opštu jednačinu kretanja (VI.20)

$$\frac{d\theta_\beta}{dt} = [\theta_\beta, H_0] + \sum_{\beta=1}^B \lambda_\beta [\theta_\beta, \theta_\beta] + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial t} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, B) \quad (\text{VI.21})$$

Ako se ovde sve veze $\theta_\beta(p_i, q_i, t) = 0$ smatraju poznatim, to je *sistem linearnih jednačina za određivanje množitelja veza λ_β* , a determinanta odgovarajućih koeficijenata je

$$\Delta' = \left| [\theta_\beta, \theta_\beta] \right|, \quad (\text{VI.22})$$

čiji su elementi Poisson-ove zagrade funkcija veza θ_β . Medjutim, pošto je opšta jednačina kretanja dobijena na osnovu Hamilton-ovih jednačina (VI.19), a ove kao i Lagrange-eve jednačine za degenerisane sisteme nisu sve međusobno nezavisne, rang determinante (VI.22) u opštem slučaju biće manji od B i neka iznosi $B - A$. To znači da se iz ovog sistema *linearnih jednačina može odrediti samo $B - A$ množitelja veza λ_β u funkciji preostalih A, koji ostaju sasvim proizvoljni*.

Ako se potraži opšte rešenje jednačina (VI.21) kao zbir partikularnog rešenja ovog nehomogenog sistema i opšteg odgovarajućeg homogenog sistema jednačina, ono se dobija u obliku

$$\lambda_\beta = \Lambda_\beta(q_i, p_i, t) + \sum_{\alpha=1}^A u_\alpha v_{\alpha\beta}(q_i, p_i, t), \quad (\text{VI.23})$$

gde su $\Lambda_\beta(q_i, p_i, t)$ i $v_{\alpha\beta}(q_i, p_i, t)$ izvesne funkcije kanonskih promenljivih i vremena, a u_α ($\alpha = 1, 2, \dots, A$) *proizvoljne funkcije* istih promenljivih. Uvrštavajući ovo rešenje u opštu jednačinu kretanja (VI.20), može se pokazati da se ona transformiše u

$$\frac{dF}{dt} = [F, H'] + \sum_{\alpha=1}^A u_\alpha [F, \theta_\alpha^*] + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (\text{VI.24})$$

gde je

$$H' = H_0 + \sum_{\beta=1}^B \Lambda_\beta \theta_\beta, \quad \theta_\alpha^* = \sum_{\beta=1}^B v_{\alpha\beta} \theta_\beta \quad (\text{VI.25})$$

Detaljnija analiza dalje pokazuje da *ovako definisane funkcije $H'(q_i, p_i, t)$, tzv. totalni hamiltonijan i $\theta_\alpha^*(q_i, p_i, t)$ predstavljaju funkcije prve klase*, tj. zadovoljavaju uslove (VI.18). Ovim postupkom je opšta jednačina kretanja svedena na oblik u kome su preostale samo ekvivalentne veze prve klase $\theta_\alpha^*(p_i, q_i, t) = 0$ i isto toliko neodređenih funkcija u_α ($\alpha = 1, 2, \dots, A$) u množiteljima veza.

Iz dobijenog rezultata moguće je izvesti niz zaključaka o odnosu između jednačina veza i prirode kanonskih promenljivih, na osnovu

čega se može sprovesti i efektivna redukcija broja stepeni slobode. Pošto su na ovaj način ekvivalentnim vezama prve klase (kojih ima A) pridruženi proizvoljni množitelji veza, preostalim vezama druge klase odgovarajuće određeni množitelji veza. Iz toga proizlazi da su samo veze druge klase analogne vezama za standardne sisteme u analitičkoj mehanici, pomoću kojih se može izvršiti eliminacija zavisnih kanonskih promenljivih i tako svesti ove veličine na nezavisne. Ako se i ovde uvede broj stepeni slobode i definiše kao polovina broja svih nezavisnih kanonskih promenljivih, a njih posle ove redukcije ima $2n - (B-A)$, gde je n broj generalisanih koordinata, odgovarajući broj stepeni slobode biće

$$n' = n - \frac{B-A}{2} \quad (\text{VI.26})$$

S druge strane, iz pojave ovih sasvim proizvoljnih funkcija u_α ($\alpha = 1, 2, \dots, A$) u opštoj jednačini kretanja proizlazi da rešenje problema kretanja degenerisanih sistema pri datim početnim uslovima nije jednoznačno, na šta smo već ukazali i pri analizi Lagrange-ovih jednačina. To na prvi pogled izgleda čudno, jer protivreči principu kauzalnosti, međjutim pokazalo se da se odgovarajuće kanonske promenljive, koje se mogu eliminisati pomoću jednačina veza prve klase, ili menjaju na proizvoljan način ili su čak jednake nuli. Stoga one predstavljaju nefizičke promenljive, koje nisu ni od kakvog fizičkog interesa, tako da raznim vrednostima ovih proizvoljnih funkcija odgovara isto fizičko stanje posmatranog sistema. Ukoliko izostavimo ove nefizičke promenljive, to neće uticati na određivanje dinamičkog stanja sistema, čime se broj kanonskih promenljivih smanjuje za A i ove svode samo na nezavisne fizičke promenljive, a sam broj stepeni slobode time postaje

$$n'' = n' - \frac{A}{2} = n - \frac{B}{2}, \quad (\text{VI.27})$$

što se pokazalo pogodnim i pri prelazu na kvantnomehaničko razmatranje ovakvih sistema.

VII. GENERALISANE KANONSKE TRANSFORMACIJE

Kao što smo ranije videli (str. 123-6), pod kanonskim transformacijama se podrazumevaju takve transformacije kanonskih promenljivih

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k, t), \quad P_i = P_i(q_k, p_k, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (\text{VII.1})$$

koje dozvoljavaju da se ovaj sistem jednačina može rešiti po starim promenljivama q_k i p_k i koje ostavljaju oblik Hamilton-ovih jednačina invarijantnim, tj. prvobitne Hamilton-ove jednačine (13.24) prevode u

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (\text{VII.2})$$

gde je $K(Q_i, P_i, t)$ nova Hamilton-ova funkcija. Pošto su Hamilton-ove jednačine za sisteme sa potencijalnim silama ekvivalentne Hamilton-ovom principu (13.25)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0, \quad (\text{VII.3})$$

transformisanim Hamilton-ovim jednačinama (VII.2) u novim promenljivama mora odgovarati Hamilton-ov princip istog oblika

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0 \quad (\text{VII.4})$$

Iz zahteva da Hamilton-ov princip (VII.3) ovom transformacijom predje u (VII.4) možemo dobiti potreban i dovoljan uslov da posmatrana transformacija (VII.1) bude kanonska u nešto opštijem obliku od onog koji smo ranije naveli i to na sledeći način.

Ako relaciju (VII.4) za nove promenljive (ili odgovarajuću za stare) pomnožimo nekim brojem c i ovaj broj ubacimo pod znak integrala, imaćemo

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} c \left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0$$

Da bi ove dve formulacije Hamilton-ovog principa bile saglasne, podintegralni izrazi moraju biti ili jednaki ili se razlikovati za totalni izvod po vremenu neke funkcije F starih i novih kanonskih promenljivih

$$\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - H = c \left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K \right) + \frac{dF}{dt} \quad (\text{VII.5})$$

odnosno, posle množenja sa dt

$$\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - H dt = c \left(\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt \right) + dF \quad (\text{VII.6})$$

Ovakvo uvedena funkcija F naziva se *generatrisa*, a broj c *valentnost* posmatrane kanonske transformacije, dok ranije navedeni uslov (14.8) predstavlja specijalni slučaj ovog kad je $c = 1$ i to su tzv. *univalentne kanonske transformacije*. Ako ovaj opšti uslov napišemo i za druge moguće promene kanonskih promenljivih za isto vreme dt

$$\sum_{i=1}^n P_i d'Q_i - H dt = c \left(\sum_{i=1}^n P_i d'Q_i - K dt \right) + d'F,$$

oduzimanjem ovih relacija dobijamo, imajući u vidu definiciju pojma varijacije

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i - c \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i = \delta F \quad (\text{VII.7})$$

Prema tome, da bi neka transformacija oblika (VII.1) bila kanonska, potrebno je i dovoljno da postoji takva funkcija F i takav broj c da leva strana uslova (VII.7) bude totalna varijacija ove funkcije. Time je grupa kanonskih transformacija proširena sa uobičajenog slučaja $c = 1$ na onaj kad je $c \neq 1$ i u tom smislu možemo govoriti o generalisanim kanonskim transformacijama. Oдавde istovremeno vidimo da je uslov za kanonsku transformaciju nezavisan od oblika Hamilton-ove funkcije, tj. *kanoničnost ovih transformacija je nezavisna od prirode sistema na koji se odnose polazne kanonske promenljive*. Na primer ako uočimo linearne transformacije

$$Q = a_1 q + \beta_1 p, \quad P = a_2 q + \beta_2 p. \quad (\text{VII.8})$$

one će sa pogodnim izborom valentnosti c , dobijenim iz uslova (VII.7) uvek biti kanonske, dok će u slučaju univalentnih transformacija one biti kanonske samo pri određenoj vezi između koeficijenata.

Ako uzmemo prvi tip generatriše oblika $F_1(q_i, Q_i, t)$ i napišemo uslov (VII.6) u razvijenom obliku

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = c \left(\sum_{i=1}^n p_i dQ_i - K dt \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt,$$

upoređivanjem odgovarajućih koeficijenata uz dq_i , dQ_i i dt dobijamo

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad c p_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad cK = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (\text{VII.9})$$

Ukoliko želimo da predjemo na drugi tip generatriše, treba navedeni uslov Legendre-ovom transformacijom prevesti u

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = - \sum_{i=1}^n c Q_i dp_i - cK dt + d(F_1 + c \sum_{i=1}^n p_i Q_i),$$

odakle vidimo da je tražena generatriša

$$F_2(q_i, p_i, t) = F_1 + c \sum_{i=1}^n p_i Q_i, \quad (\text{VII.10})$$

a razvijanjem izraza dF_2 i upoređivanjem odgovarajućih koeficijenata nalazimo

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad c Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i}, \quad cK = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (\text{VII.11})$$

Ove relacije zamenjuju ranije (14.12) i (14.16) i svode se na njih u slučaju univalentnih kanonskih transformacija. Što se tiče invarijantnosti Poisson-ovih i Lagrange-evih zagrada u odnosu na ove transformacije, sličnim postupkom kao i za $c = 1$ dobili bismo da one ostaju invarijantne do na faktor c odnosno $1/c$

$$\{u, v\}_{Q, P} = c \{u, v\}_{q, p}, \quad \{u, v\}_{Q, P} = \frac{1}{c} \{u, v\}_{q, p}, \quad (\text{VII.12})$$

što ostavljamo čitaocu za vežbu.

PRIMENA NA HAMILTON-JACOBI-EV METOD. Ako zamislimo takvu kanonsku transformaciju pri kojoj je nova Hamilton-ova funkcija identički jednaka nuli

$$K(Q_i, P_i, t) = 0 \quad (\text{VII.13})$$

i uzmemo generatrišu tipa $F_2(q_i, P_i, t)$, koju označimo sa S , Hamilton-ove jednačine u novim promenljivama (VII.2) neposredno daju

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial K}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$$

odakle proizlazi

$$p_i = \alpha_i = \text{const}, \quad Q_i = \beta_i = \text{const} \quad (\text{VII.14})$$

Tada poslednja relacija (VII.11) na osnovu uslova (VII.13) dobija vid

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

a stavimo li u Hamilton-ovoj funkciji prema prvoj relaciji (VII.11) $p_i = \partial S / \partial q_i$, ona prelazi u

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) = 0 \quad (\text{VII.15})$$

To je *Hamilton-Jacobi-eva jednačina* u istom obliku (14.63) kao i za $c=1$, koja određuje generatrišu ovakve kanonske transformacije, a ako nadjemo jedan potpun integral ove jednačine $S=S(q_i, \alpha_i, t)$ i uvrstimo ga u odgovarajući sistem jednačina (VII.11)

$$\frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} = c \beta_i, \quad (\text{VII.16})$$

algebarskim rešavanjem ovih jednačina po kanonskim promenljivama q_i i p_i dobićemo ove veličine kao funkcije vremena. Odavde vidimo da se pri korišćenju neunivalentnih kanonskih transformacija ništa ne menja u rešavanju dinamičkog problema sistema, pošto se sistem jednačina (VII.16) ustvari poklapa sa (14.84) ako $\beta'_i = c \beta_i$ uzmemo za nove konstante.

Pokažimo sad kako se ove kanonske transformacije mogu primeniti i na slučaj kad Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena. Postavimo sledeći problem: naći takvu kanonsku transformaciju pri kojoj su sve nove promenljive Q_i ciklične, tj. kad je nova Hamilton-ova funkcija oblika

$$K = K(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (\text{VII.17})$$

i opet uzmimo generatrišu tipa $F_2(q_i, P_i, t)$, koju ovde označimo sa W . Tada iz prvog para Hamilton-ovih jednačina (VII.2)

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial K}{\partial q_i} = 0$$

zaključujemo da je

$$p_i = \alpha_i = \text{const}, \quad (\text{VII.18})$$

pa nova Hamilton-ova funkcija postaje funkcija od n konstanti, te takodje predstavlja konstantu

$$K = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \gamma = \text{const} \quad (\text{VII.19})$$

Drugi par Hamilton-ovih jednačina (VII.2) tada daje

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = v_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

gde su sa v_i označene konstantne vrednosti dobijene kao rezultat diferenciranja funkcije (VII.19) po α_i , a otuda proizlazi

$$Q_i = v_i t + \beta_i \quad (\text{VII.20})$$

Pošto u ovom slučaju Hamilton-ova funkcija ne zavisi eksplicitno od t , istu osobinu imaće i generatriša W , pa se poslednja relacija (VII.2) svodi na

$$cK(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = H(q_i, p_i)$$

a stavljajući u Hamilton-ovoj funkciji prema prvoj relaciji $p_i = \partial W / \partial q_i$ i imajući u vidu da je leva strana na osnovu (VII.19) konstantna, dobijamo

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = c\gamma = \text{const} \quad (\text{VII.21})$$

To je odgovarajuća Hamilton-Jacobi-eva jednačina za sisteme sa Hamilton-ovom funkcijom oblika $H(q_i, p_i)$ i ona se poklapa sa (14.65).

Oдавде vidimo da karakteristična Hamilton-ova funkcija $W(q_i, a_i)$, ranije definisana relacijom (14.64), predstavlja generatrisu one kanonske transformacije pri kojoj su sve nove promenljive Q_i ciklične. Nadjemo li jedan potpun integral ove jednačine $W = W(q_k, a_k)$ i formiramo odgovarajući sistem jednačina (VII.11)

$$\frac{\partial W(q_k, a_k)}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial W(q_k, a_k)}{\partial a_i} = c(v_i t + s_i), \quad (\text{VII.22})$$

problem nalaženja dinamičkog stanja dobićemo, kao i u prethodnom slučaju, algebarskim rešavanjem ovih jednačina po promenljivama q_i i p_i .

VIII. RELATIVNO KRETANJE ČESTICA (LAGRANGE-EV METOD)

LAGRANGE-EVA FUNKCIJA RELATIVNOG KRETANJA ČESTICE. Proučimo relativno kretanje neke čestice M u odnosu na neinercijalni sistem referencije $AX'Y'Z'$ (sl.VIII.1) i neka je kretanje ovog sistema u odnosu na nepokretni OXYZ određeno brzinom pola $\vec{v}_A(t)$ i ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t)$ kao datim funkcijama vremena. Veličine koje karakterišu kretanje čestice za posmatrača u ovom pokretnom sistemu su njen relativni vektor položaja, relativna brzina i relativno ubrzanje, koji su definisani formulama

$$\vec{r}_{rel} = \vec{r}' = \vec{AM}, \quad \vec{v}_{rel} = \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}_{rel}, \quad \vec{a}_{rel} = \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}_{rel} \quad (\text{VIII.1})$$

Ove relativne izvode možemo povezati sa apsolutnim pomoću relacije (19.29)

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{aps} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{G}, \quad (\text{VIII.2})$$

pri čemu treba imati u vidu da svi izvodi bez ikakvog indeksa predstavljaju apsolutne izvode. Kretanje uočene čestice u odnosu na ovaj neinercijalni sistem $AX'Y'Z'$ potpuno je određeno ako znamo kako se njen relativni vektor položaja menja u toku vremena

$$\vec{r}' = \vec{r}'(t) \iff x'_\alpha = x'_\alpha(t) \quad (\text{VIII.3})$$

i to su konačne jednačine relativnog kretanja. Potražimo sad diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja čestice, koja određuje njen relativni vektor položaja kao funkciju vremena i pokažimo kako se ovaj problem može rešiti Lagrange-evim metodom.*

U tom cilju podjimo od Lagrange-eve funkcije ove čestice u nepokretnom sistemu OXYZ

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U(\vec{r}, t) \quad (\text{VIII.4})$$

i za generalisane koordinate uzmimo pravougle koordinate x_α ($\alpha=1,2,3$) posmatrane čestice. Tada će odgovarajuće Lagrange-eve jednačine (10.32) imati

* Ovaj dokaz je izložen prema sugestiji prof. B. Milića

vid

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^* \quad (\alpha=1,2,3), \quad (\text{VIII.5})$$

što se pomoću pojma parcijalnog gradijenta, definisanog formulom (11.11) može napisati i kao

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{F}^*, \quad (\text{VIII.6})$$

gde $\vec{F}^*$ označava nepotencijalni deo sila koje dejstvuju na ovu česticu. Da bismo mogli proučavati relativno kretanje čestice, predjimo sa apsolutnog vektora položaja $\vec{r}$ na relativni $\vec{r}'$ smenom

$$\vec{r} = \vec{r}_A(t) + \vec{r}' \iff x_\alpha = x_{A\alpha}(t) + x'_\alpha, \quad (\text{VIII.7})$$

Medjutim, ovde treba imati u vidu da se Lagrange-eve jednačine odnose na nepokretni sistem referencije, te i operator d/dt u njima predstavlja operator apsolutnog diferenciranja po vremenu. Radi uskladjivanja ovog prelaza na $\vec{r}'$ sa doslednom primenom Lagrange-evog metoda Lagrange-eve funkcija koja treba da opiše relativno kretanje ove čestice mora biti izražena kao funkcija njenog relativnog vektora položaja i apsolutnog izvoda ovog vektora po vremenu

$$L = L(\vec{r}', \frac{d\vec{r}'}{dt}, t), \quad (\text{VIII.8})$$

bez obzira što $d\vec{r}'/dt$ ne predstavlja ni apsolutnu ni relativnu brzinu. Pri tome se apsolutna brzina čestice $\vec{v}$ može dobiti apsolutnim diferenciranjem relacije (VIII.7) po vremenu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_A + \vec{v}', \quad (\text{VIII.9})$$

gde tačka označava apsolutni izvod po vremenu, pa uvrstimo izraze (VIII.9) i (VIII.7) u Lagrange-evu funkciju (VIII.4)

$$L = \frac{1}{2} m (\vec{v}_A + \vec{v}')^2 - U[\vec{r}_A(t) + \vec{r}', t]$$

odnosno

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + m \vec{v}_A \cdot \vec{v}' + \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - U'(\vec{r}', t) \quad (\text{VIII.10})$$

Ovde smo sa $U'(\vec{r}', t)$ označili rezultat zamene (VIII.7) u izrazu za potencijalnu energiju $U(\vec{r}, t)$ i kadgod se sistem referencije $AX'Y'Z'$ kreće translatorno ovako definisana veličina $U'(\vec{r}', t)$ zavisi eksplicitno od vremena zbog pojavljivanja funkcije $\vec{v}_A(t)$, čak i ako vreme ne figuriše eksplicitno u prvobitnoj Lagrange-evoj funkciji.

To je tražena Lagrange-eve funkcija relativnog kretanja čestice. Ona je izražena samo pomoću relativnog vektora položaja $\vec{r}'$ i apsolutnog izvoda $d\vec{r}'/dt$ ovog vektora po vremenu, saglasno zahtevu (VIII.8), kao i pomoću veličina $(\vec{v}_A, \vec{\omega})$ koje određuju kretanje ovog neinercijalnog sistema u odnosu na nepokretni.

OSNOVNA JEDNAČINA RELATIVNOG KRETANJA ČESTICE. Napišimo sad Lagrange-eve jednačine za posmatranu česticu, uzimajući za generalisane koordinate njene relativne koordinate x'_α ($\alpha=1,2,3$). Ovaj prelaz sa apsolutnih koordinata na relativne, opisan relacijama (VIII.7), predstavlja jed-

nu *punktualnu transformaciju*, a ranije smo videli da u odnosu na ovakve transformacije oblik Lagrange-ovih jednačina ostaje *invarijantan* (v. podatak I). Stoga u novim, relativnim koordinatama čestice x'_α Lagrange-eve jednačine imaju isti vid kao i polazne jednačine (VIII.5), tj.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x'_\alpha} = F'_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (\text{VIII.11})$$

što takodje možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'} = \mathbf{F}'^*, \quad (\text{VIII.12})$$

gde $\mathbf{F}'^*$ označava rezultat prelaza sa $\mathbf{F}$ na $\mathbf{r}'$ u funkciji $F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$.

Imajući u vidu da se parcijalni gradijent skalarnog proizvoda dva vektora nalazi formalno po istom pravilu kao i za proizvod skalarnih funkcija

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha B_\alpha = B_\alpha \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

i da je $\dot{\mathbf{r}}'^2 = \dot{\mathbf{r}}' \cdot \dot{\mathbf{r}}'$, prema (VIII.10) neposredno dobijamo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} = m\dot{\mathbf{v}}_A + m\dot{\mathbf{r}}', \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} = - \frac{\partial U'}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} \quad (\text{VIII.13})$$

Uvrštavajući ove izraze u Lagrange-ovu jednačinu (VIII.12), nalazimo

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{v}}_A + m\dot{\mathbf{r}}') + \frac{\partial U'}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} = \mathbf{F}'^*$$

ili, posle diferenciranja izraza s leve strane

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{F}'^* - m\ddot{\mathbf{a}}_A, \quad (\text{VIII.14})$$

gde je $\ddot{\mathbf{a}}_A = d^2 \mathbf{r}'_A / dt^2$ ubrzanje pola A. Međutim, ovde $d^2 \mathbf{r}' / dt^2$ ne predstavlja relativno ubrzanje čestice, te ova jednačina još nema karakter diferencijalne jednačine njenog relativnog kretanja. Da bismo prešli sa apsolutnih izvoda po vremenu na relativne i tim putem uveli relativnu brzinu i ubrzanje posmatrane čestice, primenimo opštu relaciju (VIII.2) izmedju apsolutnog i relativnog izvoda na vektore $\dot{\mathbf{r}}'$ i $\ddot{\mathbf{v}}'$

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}'}{dt} = \left(\frac{d\dot{\mathbf{r}}'}{dt} \right)_{\text{rel}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}', \quad \frac{d\ddot{\mathbf{v}}'}{dt} = \left(\frac{d\ddot{\mathbf{v}}'}{dt} \right)_{\text{rel}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\mathbf{v}}'$$

što daje, s obzirom na definicije (VIII.1) relativne brzine i relativnog ubrzanja

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}'}{dt} = \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}', \quad \frac{d\ddot{\mathbf{v}}'}{dt} = \ddot{\mathbf{a}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\mathbf{v}}', \quad (\text{VIII.15})$$

Tada diferenciranjem prvog od ovih izraza možemo naći i drugi apsolutni izvod relativnog vektora položaja po vremenu

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{v}}'}{dt} + \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}'}{dt} = \ddot{\mathbf{a}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\mathbf{v}}' + \ddot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}'),$$

pa uvrštavanjem ovog izraza u jednačinu (VIII.14) dobijamo

$$m[\ddot{\mathbf{a}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\mathbf{v}}' + \ddot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}' + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\mathbf{v}}'] = - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{F}'^* - m\ddot{\mathbf{a}}_A,$$

a otuda, stavljajući $\ddot{\mathbf{a}}' = (d^2 \mathbf{r}' / dt^2)_{\text{rel}}$

$$\left. \begin{aligned} m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{\text{rel}} &= - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{F}'^* - m\ddot{\mathbf{a}}_A - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}' - \\ &\quad - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}') - 2m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\mathbf{v}}'), \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.16})$$

što se poklapa sa ranije nadjenom jednačinom (23.7).

To je osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja u obliku sličnom onom za apsolutno kretanje. Ovde s jedne strane figuriše proizvod mase čestice i njenog relativnog ubrzanja, a s druge svi ostali članovi, koji mogu biti uzrok relativnog ubrzanja, te prema opštoj definiciji pojma sile (4.3) u nerelativističkoj mehanici imaju karakter sile. Prva dva člana s desne strane predstavljaju *prave sile*, koje potiču od *uzajamnog dejstva između tela* i samo za njih važe Newton-ovi principi. Svi ostali članovi predstavljaju tzv. *inercijalne sile*, koje potiču od *ubrzanja neinercijalnog sistema referencije* iz koga se posmatra ovo relativno kretanje čestice, o čemu smo ranije već detaljnije govorili (v.str. 236-7).

RELACIJE IZMEDJU DINAMIČKIH VELIČINA. Razmotrimo sad impuls i energiju posmatrane čestice u odnosu na izabrani neinercijalni sistem referencije i njihov odnos sa odgovarajućim veličinama u nepokretnom sistemu. Da bismo formulisali ove veličine, izrazimo pre svega Lagrange-ovu funkciju (VIII.10) na osnovu prve formule (VIII.15) pomoću relativne brzine

$$L(\dot{\mathbf{r}}', \ddot{\mathbf{v}}', t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{v}}_A^2 + m \dot{\mathbf{v}}_A \cdot (\dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}') + \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}')^2 - U(\dot{\mathbf{r}}', t) \quad (\text{VIII.17})$$

Pošto posmatrač u ovom sistemu zapaža samo relativne veličine kao i njihove relativne promene, sve ove dinamičke veličine moramo definisati u tom smislu, koristeći pri tome samo relativne izvode, slično kao u definicijama (VIII.1) relativne brzine i ubrzanja. Saglasno tome, *impuls čestice* shvatimo kao vektor čije su komponente generalisani impulsi koji odgovaraju relativnim koordinatama čestice i prema (13.2) imaju vid

$$p'_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}'_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (\text{VIII.18})$$

gde simbol $(\cdot)$ označava *relativni* izvod po vremenu. Ove tri relacije zajedno možemo napisati i u vektorskom obliku $\partial L / \partial \dot{\mathbf{v}}'$, što posle diferenciranja daje

$$\dot{\mathbf{p}}' \equiv \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}'} = m(\ddot{\mathbf{v}}_A + \ddot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}') \quad (\text{VIII.19})$$

i ovako definisan impuls čestice prema relaciji (22.6) jednak je njenom impulsu u nepokretnom sistemu

$$\dot{\mathbf{p}}' = m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (\text{VIII.20})$$

Odgovarajuća *generalisana energija čestice* određena je opštom formulom (11.6)

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

i brojno je jednaka Hamilton-ovoj funkciji, ali je izražena pomoću Lagrange-ovih promenljivih. Pošto smo za generalisane koordinate uzeli relativne koordinate čestice, ovu veličinu ovde definišimo kao

$$\mathcal{E}'(\vec{r}', \vec{v}'; t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_{\alpha}} \dot{x}'_{\alpha} - L = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} \cdot \vec{v}' - L, \quad (\text{VIII.21})$$

gde smo opet upotreбили relativne izvode. Posle zamene L i $\partial L / \partial \vec{v}'$ odgovarajućim izrazima (VIII.17) i (VIII.19) dobijamo da je generalisana energija čestice

$$\mathcal{E}' = m(\vec{v}'_A + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \cdot \vec{v}' - \frac{1}{2} m v_A^2 - m \vec{v}_A \cdot (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') - \frac{1}{2} m (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + U'(\vec{r}', t)$$

odnosno, posle sredjivanja

$$\mathcal{E}' = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} \cdot \vec{v}' - L = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + U'(\vec{r}'; t) - \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2} m v_A^2 - m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.22})$$

Ovde zbir prva dva člana predstavlja ukupnu energiju posmatrane čestice u neinercijalnom sistemu referencije, a poslednji član

$$U'_{cf} = - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 \quad (\text{VIII.23})$$

može se interpretirati kao dopunska "potencijalna" energija usled rotacije sistema i naziva se centrifugalna potencijalna energija.

Ako je pol A nepokretan, otpadaju treći i četvrti član, a prema relaciji (22.6) možemo staviti $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}'$, pa gornji izraz prelazi u

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} m (\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + U'(\vec{r}', t) - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 - m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + U'(\vec{r}', t) - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$$

odnosno, imajući u vidu da je prema samom načinu formiranja $U'(\vec{r}', t) = U(\vec{r}, t)$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (\vec{v}_A = 0) \quad (\text{VIII.24})$$

Ukoliko se još oba koordinatna početka poklapaju ($\vec{r}' = \vec{r}$), poslednji član može se transformisati na sledeći način

$$m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') = m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times m \vec{v}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M},$$

čime dobijamo

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \vec{\omega} \cdot \vec{M} \quad (\vec{v}_A = 0, \vec{r}' = \vec{r}) \quad (\text{VIII.25})$$

Ova relacija nam pokazuje da je pod navedenim uslovima energija posmatrane čestice u neinercijalnom sistemu manja ili veća od njene energije u nepokretnom sistemu prema tome da li moment impulsa čestice i ugona brzina sistema međusobno grade oštar ili tup ugao.

IX. LAGRANGE-EV I HAMILTON-OV FORMALIZAM ZA KONTINUIRANE SREDINE

PRELAZ SA DISKONTINUUMA NA KONTINUUM. Da bismo prikazali kako se Lagrange-ev i Hamilton-ov formalizam mogu proširiti sa diskretnih na kontinuirane sisteme, zadržimo se najpre na jednom jednostavnom primeru. Posmatrajmo niz malih kuglica iste mase m duž jedne prave na jednakim malim rastojanjima a , uzajamno spojenih pomoću identičnih elastičnih opruga (sl. IX.1) i uzmimo taj pravac za X -osu. Ako se prva kuglica izvede iz ravnotežnog položaja u tom pravcu, posredstvom elastičnih opruga

taj poremećaj će se preneti i na ostale kuglice i one će sve početi da vrše longitudinalne oscilacije oko svojih ravnotežnih položaja. Sile koje dejstvuju na ove kuglice su elastične prirode i srazmerne su promenama dužina ovih opruga, odnosno promenama njihovih međusobnih rastojanja. Stoga, ako sa u_i označimo elongaciju i -te kuglice, osnovna jednačina dinamike za tu kuglicu biće

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}), \quad (\text{IX.1})$$

gde prvi član na desnoj strani predstavlja silu kojom $(i+1)$ -va kuglica dejstvuje na i -tu, a drugi silu kojom $(i-1)$ -va kuglica deluje na i -tu.

Kinetička energija ovog sistema od N kuglica biće

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{u}_i^2, \quad (\text{IX.2})$$

a potencijalna energija koja odgovara ovim konzervativnim silama je

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k(u_{i+1} - u_i)^2 \quad (\text{IX.3})$$

Zaista, ako napišemo eksplicitno članove koji sadrže u_i

$$V = \frac{1}{2} k(u_2 - u_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} k(u_i - u_{i-1})^2 + \frac{1}{2} k(u_{i+1} - u_i)^2$$

i diferenciramo ovaj izraz po u_i , dobićemo

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = k(u_i - u_{i-1}) - k(u_{i+1} - u_i),$$

a to je negativna vrednost sile F_i koja dejstvuje na i -tu kuglicu. Tada će Lagrange-eva funkcija posmatranog sistema kuglica biti jednaka razlici kinetičke i potencijalne energije

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[m \dot{u}_i^2 - k(u_{i+1} - u_i)^2 \right] \quad (\text{IX.4})$$

Odavde proizlazi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = m \dot{u}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial u_i} = - \frac{\partial V}{\partial u_i} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}),$$

pa ako formiramo odgovarajuće Lagrange-eve jednačine

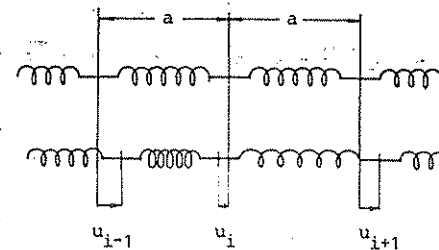
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad (\text{IX.5})$$

i uvrstimo ove parcijalne izvode, one će imati vid

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} - k(u_{i+1} - u_i) + k(u_i - u_{i-1}) = 0,$$

što se poklapa sa jednačinom (IX.1)

Da bismo izvršili prelaz na kontinuum, napišimo Lagrange-ovu funkciju (IX.4) u obliku



Sl. IX.1

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{m}{a} \dot{u}_i^2 - ka \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^2 \right] a = \sum_{i=1}^N L_i a, \quad (\text{IX.6})$$

pa zamislimo da imamo sve veći broj kuglica sve manje mase. U graničnom slučaju kuglice ne možemo više numerisati indeksom, već prostornom koordinatom x , tako da funkcije $u_i(t)$ prelaze u $u(x,t)$ a međusobno rastojanje kuglica a dobija karakter diferencijala dx . Takav granični prelaz je, dakle, okarakterisan sledećom korespondencijom

$$\left. \begin{aligned} i &\rightarrow x, & u_i(t) &\rightarrow u(x,t), \\ a &\rightarrow dx, & \sum_i (\) a &\rightarrow \int (\) dx, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.7})$$

dok $\dot{u}_i$ kao i $(u_{i+1} - u_i)/a$ prelaze u parcijalne izvode funkcije $u(x,t)$ po t i po x

$$\dot{u}_i \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{a} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IX.8})$$

Sem toga, odnos m/a pri tome teži linijskoj gustini ρ , a proizvod ka teži Young-ovom modulu elastičnosti E

$$\frac{m}{a} \rightarrow \rho, \quad ka \rightarrow E, \quad (\text{IX.9})$$

što se može sagledati iz sledećeg rezonovanja. Prema Hooke-ovom zakonu za jednodimenziono elastično telo relativna promena dužine srazmerna je sili koja dejstvuje na ovo telo

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} F,$$

pa ovaj zakon u posmatranom slučaju, za dejstvo $(i+1)$ -ve kuglice na i -tu posredstvom elastične opruge daje

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a} = \frac{1}{E} F = \frac{1}{E} k(u_{i+1} - u_i),$$

odakle proizilazi da je $E = ka$.

Na taj način Lagrange-eva funkcija posmatranog sistema kuglica u obliku (IX.6) u ovako definisanom graničnom slučaju prelazi u

$$L \rightarrow \frac{1}{2} \int \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

što napišimo konciznije kao

$$L = \int \mathcal{L} dx, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\rho \dot{u}^2 - E u_x^2), \quad (\text{IX.10})$$

gde je $\mathcal{L}$ tzv. gustina Lagrange-ove funkcije i gde smo uveli oznake

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IX.11})$$

Odavde vidimo da pri prelazu sa diskontinuum na kontinuum Lagrange-eva funkcija ovog sistema dobija vid integrala po prostornim koordinatama, što važi i za druge sisteme i što je ekvivalentno sumiranju po stepenima slobode u mehanici sistema. Pri tome je prostorna koordinata dobila karakter nezavisno promenljive, ravnopravne sa vremenom, pa će diferencijalna jednačina kretanja ovim graničnim prelazom postati parcijalna diferencijalna jednačina. Tako smo ranije pokazali (v.str. 252-3) da će diferencijalne jednačine kretanja (IX.1) posmatranog sistema kuglica, odnosno odgovarajuće Lagrange-ove jednačine ovim postupkom dobiti vid (25.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{ka^2}{m}$$

Ovde je prema (IX.9) $c^2 = ka/(m/a) = E/\rho$, pa se gornja jednačina može napisati i kao

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{IX.12})$$

i ova parcijalna diferencijalna jednačina je ekvivalentna sistemu od beskonačno mnogo običnih diferencijalnih jednačina kretanja oblika (IX.1) za svaku od kuglica ponaosob.

LAGRANGE-EV FORMALIZAM ZA KONTINUIRANE SREDINE. U opštem slučaju, koji se ne mora odnositi samo na mehaniku kontinuuma, problem se može formulisati na sledeći način. Posmatrajmo neko fizičko polje i neka je ono određeno sa n funkcija polja oblika $\psi_i = \psi_i(x, y, z, t)$, pa pretpostavimo da su nam poznate osnovne diferencijalne jednačine ovog polja. U navedenom primeru takva funkcija polja je elongacija delića $u = u(x, t)$, a u slučaju elektromagnetnog polja to bi bile komponente jačina električnog i magnetnog polja $E_\alpha = E_\alpha(x, y, z, t)$ i $B_\alpha = B_\alpha(x, y, z, t)$, dok bi odgovarajuće osnovne jednačine polja bile gore navedena jednačina (IX.12) odnosno Maxwell-ove jednačine. Pri tome se može postaviti pitanje, slično kao i za diskretne sisteme, da li se ove jednačine mogu formalno napisati u obliku Euler-Lagrange-evih jednačina varijacionog računa, koje izražavaju stacionarnost izvesnog integrala

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (\text{IX.13})$$

pod uslovom da su varijacije funkcija polja $\delta \psi_i$ na vremenskim i prostornim granicama jednake nuli

$$\delta \psi_i(t_0) = \delta \psi_i(t_1) = 0, \quad \delta \psi_i(x_\alpha^0) = \delta \psi_i(x_\alpha^1) = 0 \quad (\text{IX.14})$$

Ukoliko se pokaže da je to moguće, podintegralna veličina u ovom integralu naziva se *lagranžijan* ili *Lagrange-eva funkcija*, a sam integral *dejstvo* u širem smislu. U posmatranom slučaju ova veličina će imati vid integrala po prostornim koordinatama

$$L = \int_V \mathcal{L}(\psi_i, \psi_{i,\alpha}, \dot{\psi}_i, x_\alpha, t) dV \quad (\psi_{i,\alpha} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\alpha}), \quad (\text{IX.15})$$

gde je $\mathcal{L}$ gustina lagranžijana, tako da relacija (IX.13) odnosno odgovarajući Hamilton-ov varijacioni princip prelazi u

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \mathcal{L} dV dt = 0 \quad (\text{IX.16})$$

Da bismo našli eksplicitni oblik Euler-Lagrange-evih jednačina, potražimo varijaciju dejstva ne varirajući same nezavisno promenljive

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \delta \mathcal{L} dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \delta \dot{\psi}_i + \sum_{i,\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,\alpha}} \delta \psi_{i,\alpha} \right) dV dt \quad (\text{IX.17})$$

Drugi član pri integraciji po vremenu može se transformisati parcijalnom integracijom, imajući u vidu da je ovde varijacija izvoda jednaka izvodu varijacije

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} d\dot{\psi}_i = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \frac{d}{dt} (\delta \psi_i) dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \delta \psi_i \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta \psi_i dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \right) \delta \psi_i dt,$$

a na sličan način, treći član pri integraciji po ma kojoj koordinati x_α svodi se na

$$\int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha^1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \delta \dot{\psi}_{i,\alpha} dx_\alpha = \int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha^1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\delta \psi_i) dx_\alpha = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \delta \psi_i \right|_{x_\alpha^0}^{x_\alpha^1} - \int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha^1} \delta \psi_i dx_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} = - \int_{x_\alpha^0}^{x_\alpha^1} \frac{d}{dx_\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \right) \delta \psi_i dx_\alpha,$$

jer zbog uslova (IX.14) integrisani delovi otpadaju. Ovde se prema samom načinu parcijalne integracije vidi da se izvodi u poslednjim članovima odnose na *potpuno* parcijalno diferenciranje po odgovarajućoj promenljivoj t odnosno x_α , kako neposredno tako i preko funkcija polja $\psi_i(x_\alpha, t)$ i njihovih izvoda. Na taj način varijacija dejstva (IX.17) dobija vid

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \right) \delta \psi_i dV dt, \quad (IX.18)$$

a iz postuliranog Hamilton-ovog principa (IX.16), tj. iz uslova da varijacija dejstva bude jednaka nuli, zbog proizvoljnosti varijacija $\delta \psi_i$ oavde proizilazi da mora biti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (IX.19)$$

To su odgovarajuće *Lagrange-eve jednačine* za posmatrano fizičko polje, čija rešenja $\psi_i = \psi_i(x, y, z, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) predstavljaju takve funkcije za koje dejstvo ima stacionarnu vrednost. Na pr. za navedeni primer sistema kuglica vezanih elastičnim oprugama ona glasi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_x} = 0, \quad (IX.20)$$

pa stavljajući ovde prema (IX.10)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \rho \dot{u}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_x} = -E u_{,x}$$

nalazimo

$$\frac{d}{dt}(\rho \dot{u}) - \frac{d}{dx}(E u_{,x}) = 0, \quad (IX.21)$$

a to je ranije dobijena jednačina (IX.12). Odavde vidimo da se razmatra ni problem zaista može razmatrati na dva ekvivalentna načina: kako prelazeći sa diskontinuum na kontinuum, tako i polazeći od Hamilton-ovog principa sa pogodno izabranom gustinom lagranžijana.

Ove jednačine mogu dobiti formalno sličan oblik kao i odgovarajuće jednačine iz mehanike sistema ako uvedemo tzv. *funkcionalni (ili varijacioni) izvod*

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \quad (IX.22)$$

Ovakav izvod funkcionele karakteriše se promenom njene brojne vrednosti usled izmene oblika funkcija $\psi_i(x, y, z, t)$ u okolini date tačke prostora,

pod uslovom da zavisnost ovih funkcija od t pri tome ostane nepromenjena, a dublji smisao ovog pojma može se sagledati na bazi računa funkcionela, koji je razvio V. Volterra (v. tom III, str. 365-72). Ako zamenimo ψ_i sa $\dot{\psi}_i$, imaćemo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i},$$

jer $\mathcal{L}$ ne zavisi od $\dot{\psi}_{i,\alpha} = (\partial/\partial x_\alpha)(\partial \psi_i/\partial t)$, pa se Lagrange-eve jednačine (IX.19) mogu napisati u vidu

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}_i(x)} - \frac{d}{dt} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}_i(x)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (IX.23)$$

Pri tome vrednost lagranžijana (IX.15) zavisi od oblika svih funkcija $\psi_i(x, y, z, t)$ kao i $\dot{\psi}_i(x, y, z, t)$, a takodje i od vremena t kao parametra, te ovaj lagranžijan predstavlja funkcionelu tipa

$$L = L[\psi_i(x_\alpha, t), \dot{\psi}_i(x_\alpha, t); t] \quad (IX.24)$$

Tada se varijacija lagranžijana može naći poredjenjem $\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt$ sa formulom (IX.17), u kojoj se samo poslednji član transformiše parcijalnom integracijom

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d}{dx_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{i,\alpha}} \right) \delta \psi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \delta \dot{\psi}_i \right] dV dt,$$

odakle proizilazi da je

$$\delta L = \int_V \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}_i} \delta \dot{\psi}_i \right) dV \quad (IX.25)$$

Uporedimo li ove rezultate sa odgovarajućim iz mehanike sistema, vidimo da osnovne relacije i jednačine u mehanici kontinuumu imaju formalno isti oblik kao i u mehanici sistema ako funkcije zamenimo funkcionalima, a parcijalne izvode odgovarajućim funkcionalnim izvodima. Pri tome ulogu indeksa preuzimaju i prostorne koordinate, pa sumiranje po diskretnim indeksima treba zameniti kako sumiranjem po diskretnim tako i po kontinuiranim indeksima, tj. integracijom po prostornim koordinatama.

HAMILTON-OV FORMALIZAM ZA KONTINUIRANE SREDINE. Pokažimo sad kako se sa Lagrange-evog formalizma prelazi na Hamilton-ov u slučaju ma kog fizičkog polja, a po analogiji sa mehanikom sistema. U tom cilju vratimo se opet na ranije razmatrani primer sistema malih kuglica vezanih elastičnim oprugama, kad je lagranžijan dat izrazom (IX.6)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{m}{a} \dot{u}_i^2 - k a \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \right)^2 \right] a = \sum_{i=1}^N L_i a$$

Za ovaj sistem generalisani impuls koji odgovara elongaciji u_i kao generalisanoj koordinati prema (13.2) biće

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\partial L_i}{\partial \dot{u}_i} a, \quad (IX.26)$$

jer samo L_i zavisi od i -te elongacije i njenog izvoda, što pri prelazu sa diskontinuum na kontinuum prelazi u

$$P_i \rightarrow P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} dx \quad (IX.27)$$

Odavde vidimo da ovako definisan generalisan impuls teži nuli i jedino

impuls po jedinici dužine predstavlja konačnu veličinu

$$\pi = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_i}{a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i. \quad (\text{IX.28})$$

To nam sugerira da se i u opštem slučaju, kad je lagranžijan dat u obliku ma kakvog integrala tipa (IX.15), uvede gustina generalisanog impulsa kao odgovarajući impuls po jedinici zapremine

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (\text{IX.29})$$

gde se $\mathcal{L}$ odnosi na jedinicu zapremine, što se pomoću pojma funkcionalnog izvoda (IX.22) može napisati i kao

$$\pi_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}_i(x)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (\text{IX.30})$$

Rezultat ovog diferenciranja biće izvesna funkcija od funkcija polja ψ_i i njenih izvoda po koordinatama i po vremenu, tako da će gustine generalisanih impulsa biti funkcije ovih promenljivih

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_1} = f_1(\psi_k; \dot{\psi}_k; \psi_{k,a}; x_a, t) \\ &\vdots \\ \pi_n &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_n} = f_n(\psi_k; \dot{\psi}_k; \psi_{k,a}; x_a, t) \end{aligned} \right\}$$

Ako je sledeći jakobijan različit od nule

$$\Delta \equiv \left| \frac{\partial \pi_i}{\partial \dot{\psi}_k} \right| = \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i \partial \dot{\psi}_k} \right| \neq 0 \quad (\text{IX.31})$$

ovaj sistem od n jednačina može se rešiti po vremenskim izvodima funkcija polja

$$\dot{\psi}_i = \dot{\psi}_i(\pi_k; \psi_k; \psi_{k,a}; x_a, t), \quad (\text{IX.32})$$

a ukoliko uslov (IX.31) nije ispunjen, posmatrani kontinuirani sistem biće degenerisan.

Sam hamiltonijan imaće, kao i odgovarajući lagranžijan, vid integrala po prostornim koordinatama, gde se hamiltonijan po jedinici zapremine formira po analogiji sa Hamilton-ovom funkcijom (13.21).

$$H = \int_V \mathcal{H} dV, \quad \mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \pi_i \dot{\psi}_i - \mathcal{L} \quad (\text{IX.33})$$

i ovako definisano $\mathcal{H}$ naziva se *gustina hamiltonijana*. Ako se u ovom izrazu eliminišu vremenski izvodi $\dot{\psi}_k$ pomoću (IX.32), dobijenih rešavanjem sistema jednačina (IX.29), gustina hamiltonijana dobiće se kao funkcija sledećih veličina

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\psi_k; \pi_k; \psi_{k,a}; x_a, t) \quad (\text{IX.34})$$

Medjutim, vrednost hamiltonijana posle integracije ove funkcije po koordinatama zavisice od oblika funkcija $\psi_i(x_a, t)$ i $\pi_i(x_a, t)$, kao i od vremena t , tj. biće funkcionala tipa

$$H = H[\psi_i(x_a, t), \pi_i(x_a, t); t] \quad (\text{IX.35})$$

Pri tome podvucimo da je ovde, za razliku od mehanike sistema, ovaj prelas

sa Lagrange-evog formalizma na Hamilton-ov okarakterisan eliminacijom samo vremenskih izvoda $\dot{\psi}_k$ (a ne i izvoda po prostornim koordinatama) funkcija polja i njihovom zamenom odgovarajućim gustinama π_k generalisanih impulsa. Zavisnost hamiltonijana kao funkcionele (IX.35) od kanonskih promenljivih formalno je ista kao i kod Hamilton-ove funkcije $H = H(q_i, p_i, t)$ u mehanici sistema, slično kao i u slučaju lagranžijana, što omogućava dalju formalnu analogiju sa odgovarajućim relacijama i jednačinama iz mehanike sistema.

Da bismo dobili Hamilton-ove jednačine za ovakve sisteme, formirajmo varijaciju hamiltonijana (IX.33)

$$\delta H = \int_V \delta \mathcal{H} dV = \int_V \left(\sum_i \pi_i \delta \dot{\psi}_i + \sum_i \dot{\psi}_i \delta \pi_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \delta \dot{\psi}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i - \sum_{i,a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,a}} \delta \psi_{i,a} \right) dV \quad (\text{IX.36})$$

Ovde se na osnovu definicije (IX.29) gustine generalisanih impulsa prvi i četvrti član u integrandu uzajamno poništavaju, što potvrđuje da gustina hamiltonijana ne zavisi od vremenskih izvoda funkcija polja. Poslednji član može se pak transformisati parcijalnom integracijom, kao što smo malo pre pokazali

$$\int_{x_a^0}^{x_a^1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,a}} \delta \psi_{i,a} dx_a = - \int_{x_a^0}^{x_a^1} \frac{d}{dx_a} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,a}} \right) \delta \psi_i dx_a,$$

čime smo prešli na varijacije samo kanonskih promenljivih, pa imamo

$$\delta H = \int_V \left[\sum_i \dot{\psi}_i \delta \pi_i - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \sum_a \frac{d}{dx_a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,a}} \right) \delta \psi_i \right] dV \quad (\text{IX.37})$$

Izraz u maloj zagradi možemo zameniti odgovarajućim izrazom iz Lagrange-evih jednačina (IX.19), pri čemu iskoristimo i definiciju gustine generalisanih impulsa

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \sum_{a=1}^3 \frac{d}{dx_a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,a}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = \frac{d\pi_i}{dt} = \dot{\pi}_i$$

Na taj način u ovaj dokaz su uključene i same Lagrange-eve jednačine, koje hoćemo da zamenimo ekvivalentnim sistemom jednačina nižeg reda, a gornji izraz time dobija vid

$$\delta H = \int_V \sum_{i=1}^n (\dot{\psi}_i \delta \pi_i - \dot{\pi}_i \delta \psi_i) dV \quad (\text{IX.38})$$

S druge strane, ako neposredno formiramo varijaciju hamiltonijana (IX.33), uzimajući u obzir da je njegova gustina tipa (IX.34), nalazimo

$$\delta H = \int_V \delta \mathcal{H} dV = \int_V \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} \delta \pi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \sum_{i,a} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_{i,a}} \delta \psi_{i,a} \right) dV, \quad (\text{IX.39})$$

a ovde poslednji član pri integraciji po ma kojoj koordinati x_a takodje

na sličan način možemo transformisati parcijalnom integracijom, zamjenjujući samo $\mathcal{L}$ sa $\mathcal{X}$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi_{i,a}} \delta \psi_{i,a} dx_a = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx_a} \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi_{i,a}} \right) \delta \psi_{i,a} dx_a,$$

odakle proizlazi

$$\delta H = \int_V \left[\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi_i} - \sum_a \frac{d}{dx_a} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi_{i,a}} \right) \delta \psi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \pi_i} \delta \pi_i \right] dV \quad (IX.40)$$

Pošto je, prema definiciji (IX.22) funkcionalnog izvoda

$$\frac{\delta H}{\delta \pi_i} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \pi_i} - \sum_a \frac{d}{dx_a} \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \pi_{i,a}} \right) = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \pi_i},$$

jer $\mathcal{X}$ ne zavisi od $\pi_{i,a}$, prethodni izraz se može prikazati i kao

$$\delta H = \int_V \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta H}{\delta \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \delta \pi_i \right) dV \quad (IX.41)$$

Ovaj rezultat je u potpunoj saglasnosti sa ranije dobijenim zaključkom da pri prelazu na kontinuum parcijalne izvode treba zameniti funkcionalnim, a sumiranje po diskretnim indeksima treba proširiti i na sumiranje po kontinuiranim, tj. na integraciju po prostornim koordinatama. Ako uporedimo odgovarajuće koeficijente u integrandima izraza (IX.38) i (IX.40), dobićemo

$$\dot{\pi}_i = - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi_i} + \sum_a \frac{d}{dx_a} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \psi_{i,a}}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \pi_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (IX.42)$$

što možemo napisati i pomoću funkcionalnih izvoda u obliku

$$\dot{\pi}_i = - \frac{\delta H}{\delta \psi_i(x)}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i(x)} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (IX.43)$$

Ove jednačine predstavljaju *Hamiltonove (kanonske) jednačine* za posmatrano fizičko polje, pri čemu zapazimo, u saglasnosti sa navedenim zaključkom, da one imaju isti oblik kao i u mehanici sistema ako Hamilton-ovu funkciju H zamenimo funkcionalom tipa $H = \int \mathcal{X} dV$, a parcijalne izvode odgovarajućim funkcionalnim. To je sistem od $2n$ simultanih parcijalnih diferencijalnih jednačina sa nepoznatim funkcijama $\psi_i(x_a, t)$ i $\pi_i(x_a, t)$, rešenih po prvim vremenskim izvodima ovih funkcija, ali za razliku od mehanike sistema ovde figurisu i izvodi ovih funkcija po prostornim koordinatama. Na pr. za razmatrani primer sistema malih kuglica vezanih elastičnim oprugama gustina generalisanog impulsa je data izrazom (IX.28), a gustina hamiltonijana prema (IX.33) biće

$$\mathcal{X} = \pi \dot{u} - \mathcal{L} = \pi \dot{u} - \frac{1}{2}(\rho \dot{u}^2 + E u_{,x}^2) = \frac{1}{2}(\rho \dot{u}^2 + E u_{,x}^2),$$

pa ako eliminišemo $\dot{u}$ stavljajući $\dot{u} = \pi/\rho$, dobijamo

$$\mathcal{X}(u, \pi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{\rho} + E u_{,x}^2 \right) \quad (IX.44)$$

Odgovarajuće Hamilton-ove jednačine (IX.43) naći ćemo izračunavajući sledeće funkcionalne izvode

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_{,x}} = - \frac{d}{dx} (E u_{,x}) = - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kao i

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \pi} = \frac{1}{\rho} \pi,$$

tako da ove jednačine za posmatrani sistem glase

$$\dot{\pi} = - \frac{\delta H}{\delta u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \dot{u} = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{1}{\rho} \pi \quad (IX.45)$$

i one određuju veličine u i π kao funkcije položaja i vremena.

Posmatrajmo još ma kakvu funkcionalu kanonskih promenljivih $F[\psi_i(x, t), \pi_i(x, t), t]$ i potražimo njen totalni izvod po vremenu. Pri tome se oslonimo na odgovarajuću formulu iz mehanike sistema

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

i primenimo navedenu korespondenciju, prema kojoj pri prelazu na kontinuum funkcije treba zameniti funkcionalama, parcijalne izvode funkcionalnim, a sumiranje po diskretnim indeksima proširiti integracijom po prostornim koordinatama. Ako pri tome još imamo u vidu da je F funkcionala od $\psi_i(x_a, t)$ i $\pi_i(x_a, t)$, ali obična funkcija od t , na osnovu ovakve korespondencije imaćemo

$$\frac{dF}{dt} = \int_V \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta F}{\delta \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\delta F}{\delta \pi_i} \dot{\pi}_i \right) dV + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (IX.46)$$

a ovde možemo $\dot{\psi}_i$ i $\dot{\pi}_i$ zameniti odgovarajućim izrazima iz Hamilton-ovih jednačina (IX.43)

$$\frac{dF}{dt} = \int_V \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta F}{\delta \psi_i} \frac{\delta H}{\delta \pi_i} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i} \frac{\delta H}{\delta \psi_i} \right) dV + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (IX.47)$$

Dobijeni rezultat nam sugerise da uvedemo *Poisson-ove zagrade* dveju bilo kakvih funkcionala F i G kanonskih promenljivih, definišući ih formulom

$$[F, G] = \int_V \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta F}{\delta \psi_i} \frac{\delta G}{\delta \pi_i} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i} \frac{\delta G}{\delta \psi_i} \right) dV, \quad (IX.48)$$

što takodje odgovara navedenom pravilu korespondencije, pa prethodna relacija dobija isti oblik kao i u mehanici sistema

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (IX.49)$$

Ova jednačina može se interpretirati kao *opšta jednačina kretanja* za dato fizičko polje, jer su u njeno izvodjenje uključene Hamilton-ove jednačine polja. Odavde neposredno proizlazi potreban i dovoljan uslov da neka veličina F bude prvi integral, tj. da bude $dF/dt = 0$, naime mora biti

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (IX.50)$$

Posebno, stavljajući ovde $F = H$ i uzevši u obzir da je $[H, H] = 0$, zaključujemo da ako hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena, on predstavlja prvi integral Hamilton-ovih jednačina. Pri tome, i pored toga što lagranžijan često nema ni neposredni ni posredni fizički smisao, ipak u priličnom broju slučajeva hamiltonijan predstavlja ukupnu energiju posmatranog fizičkog polja, kao na pr. u navedenom primeru, a iz daljeg izlaganja videćemo da će to važiti i za elektromagnetno polje (v. tom III, str. 397-9).

X. POLJE ELEMENTARNIH POMERANJA (EULER-OV METOD)

POJAM ČESTICE I POJAM POLJA U MEHANICI KONTINUUMA. Kao što je poznato, u mehanici deformabilnih tela nije moguće primenjivati metode mehanike sistema, kako zbog toga što bismo morali koristiti ogroman broj jednačina, tako i stoga što najčešće ne znamo početne uslove pojedinačnih čestica. Stoga se ovde kao aproksimativan metod pri makrofizičkom proučavanju kretanja deformabilnih tela koristi *metod aproksimacije kontinuumom* (v.str. 251-2), koji se sastoji u sledećem. Posmatrano deformabilno telo zamislimo podeljeno na takve male delove čiji je broj molekula s jedne strane vrlo mali u odnosu na ukupni broj ($\Delta N \ll N$), a s druge strane i vrlo veliki u odnosu na jedinicu ($\Delta N \gg 1$), tako da oni sadrže dovoljno mnogo molekula. Tada u prvoj aproksimaciji možemo uzeti da je u svakom ovakvom elementu zapremine materija raspoređena kontinuirano i sa tako prihvaćenim modelom mehanika deformabilnih tela postaje mehanika kontinuum.

Ovako shvaćen mali deo deformabilnog tela, u kome se zanemaruje njegova unutrašnja struktura, tj. uzima da svi njegovi molekuli imaju istu brzinu, nazivaćemo *fizički beskonačno mala čestica* ili *delić sredine* u užem smislu. Pri tome se položaj ovako definisane čestice, koja zauzima fizički beskonačno mali element zapremine ΔV , određuje vektorom položaja $\vec{r}$ njenog centra mase, usrednjenog po fizički beskonačno malom intervalu vremena Δt oko uočenog trenutka t , a samo njeno kretanje time postaje ekvivalentno kretanju njenog centra mase kao materijalne tačke, u kojoj bi bila skoncentrisana celokupna masa ove čestice. Ukoliko pak posmatramo mali, ali konačni deo deformabilnog tela, čiji pojedinačni molekuli imaju različite brzine, takav deo sredine pod uslovom da je i ovde $\Delta N \ll N$ može se nazvati *delić sredine* u širem smislu. Na pr. pri razmatranju Lagrange-evog metoda u mehanici kontinuum pod delićem sredine treba podrazumevati fizički beskonačno malu česticu, odnosno delić u užem smislu, dok pri proučavanju rotacionog kretanja delića fluida pojam delića mora se shvatiti u širem smislu, jer samo ako razne tačke tog delića imaju različite brzine može se uopšte govoriti o njegovoj rotaciji.

Pri ovakvom aproksimativnom metodu proučavanja kretanja deformabilnih tela ono će biti određeno ako znamo kolika je brzina svake fizički beskonačno male čestice kao materijalne tačke u ma kojoj tački prostora u ma kom trenutku, tj. ako znamo brzinu čestica kao funkciju položaja i vremena

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \quad (X.1)$$

Kompletno rešenje problema imaćemo ako su nam poznate i ostale mehaničke karakteristike sredine kao funkcije položaja i vremena, na pr. kod fluida ako znamo pritisak i gustinu u obliku

$$p = p(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t) \quad (X.2)$$

Pri tome se pretpostavlja da su sve ove veličine *neprekidne funkcije* prostornih koordinata i vremena, tj. da se one beskonačno malo menjaju kad se iz jedne tačke prostora u nekom trenutku pomerimo u drugu beskonačno blisku tačku ili u drugi beskonačno blizak trenutak. Uopšte, svaki kontinuirani fizički sistem predstavlja izvesno *fizičko polje* u smislu da je to oblast u kojoj vladaju specifični fizički uslovi. To polje može biti određeno skupom veličina koje su izvesne neprekidne funkcije položaja i vremena

$$\psi_i = \psi_i(x, y, z, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (X.3)$$

a prema prirodi ovih veličina polja mogu biti skalarna, vektorska ili tranzorska. Na pr. u gore razmatranom slučaju to su funkcije (X.1) i (X.2), koje određuju mehaničko stanje pri kretanju fluida i na taj način problem određivanja kretanja deformabilnih tela sveden je na nalaženje polja brzina i ostalih mehaničkih karakteristika sredine.

POLJE ELEMENTARNIH POMERANJA. Posmatrajmo sad jedan mali konačni deo deformabilnog tela kao kontinuum i neka se on u trenutku t nalazi u položaju I, a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju II (sl.X.1).

Uočimo neku tačku A kao pol i neku drugu tačku M u posmatranom delu sredine sa relativnim vektorom položaja $\vec{r}'$ u odnosu na tačku A, koji je sa apsolutnim vektorima položaja ovih tačaka povezan relacijama

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}', \quad \Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_A + \Delta \vec{r}' \quad (X.4)$$

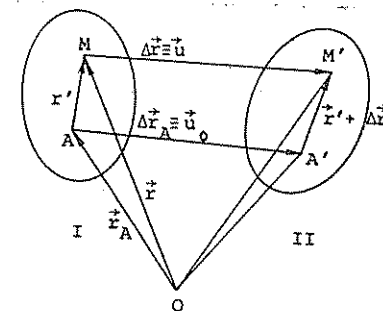
Neka za ovo vreme Δt tačka A pređe u položaj A', a tačka M u položaj M', pomerivši se pri tome za $\Delta \vec{r}_A = \vec{u}_0$ odnosno $\Delta \vec{r} = \vec{u}$, a relativni vektor položaja $\vec{r}'$ neka se pri tome promeni za $\Delta \vec{r}'$. Ako koristimo malo pre izloženi Euler-ov metod, ovde imamo *polje elementarnih pomeranja*, koje je određeno ako za sve fizički beskonačno male čestice kao materijalne tačke znamo ove veličine kao funkcije položaja i vremena

$$\Delta \vec{r} = \vec{u}(\vec{r}, t), \quad \Delta \vec{r}_A = \vec{u}(\vec{r}_A, t) \equiv \vec{u}_0 \quad (X.5)$$

Postavimo sad pitanje kako promena $\Delta \vec{r}'$ relativnog vektora položaja zavisi od položaja tačke M u odnosu na pol A. U tom cilju podjimo od relacija (X.4) i napišimo ih na osnovu (X.5) u obliku

$$\Delta \vec{r}' = \Delta \vec{r} - \Delta \vec{r}_A = \vec{u}(\vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{r}_A, t) \quad (X.6)$$

Ako pretpostavimo da su *deformacije posmatrane sredine vrlo male*, na čemu bazira celokupna standardna linearna mehanika kontinuum, možemo vektorsku funkciju $\vec{u}(\vec{r}, t)$ razviti u Taylor-ov red u tački A i zanemariti više članove



Sl.X.1

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}_A, t) + (\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right)_0 + \dots \approx \vec{u}(\vec{r}_A, t) + \vec{r}' \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right)_0 \quad (\text{X.7})$$

Poslednji član možemo napisati na sledeći način

$$\vec{r}' \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right)_0 = (\vec{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \vec{u} = (\vec{r}' \cdot \nabla) \vec{u},$$

gde je ∇ Hamilton-ov operator, pa imamo

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \approx \vec{u}(\vec{r}_A, t) + (\vec{r}' \cdot \nabla) \vec{u},$$

a izraz (X.6) time dobija vid

$$\Delta \vec{r}' = \vec{u}(\vec{r}, t) - \vec{u}(\vec{r}_A, t) \approx (\vec{r}' \cdot \nabla) \vec{u}. \quad (\text{X.8})$$

Da bismo našli i odgovarajuće skalarne jednačine, napišimo eksplicitno operator $\vec{r}' \cdot \nabla$ primenjujući poznatu formulu za skalarni proizvod

$$\Delta \vec{r}' = \left(\sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \vec{u} = \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_\beta},$$

pa projicirajmo ovu relaciju na bilo koju koordinatnu osu

$$\Delta x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 x'_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta},$$

što prikazimo konciznije kao

$$\Delta x'_\alpha = u_\alpha - u_{0\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta\alpha} x'_\beta \quad (\alpha=1,2,3), \quad (\text{X.9})$$

gde smo stavili

$$\epsilon_{\beta\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (\text{X.10})$$

Oдавде vidimo da su komponente $\Delta x'_\alpha$ promene relativnog vektora položaja, odnosno komponente $u_\alpha - u_{0\alpha}$ vektora elementarnog pomeranja tačke M u odnosu na translaciju homogene linearne funkcije relativnih koordinata x'_α ove tačke u odnosu na pol A, što možemo napisati i simbolički u operatorskom, tenzorskom obliku

$$\Delta \vec{r}' = \tau \cdot \vec{r}' \quad (\text{X.11})$$

Ovako definisan tenzor τ , odnosno skup odgovarajućih komponenta $\epsilon_{\beta\alpha}$ naziva se tenzor elementarnog pomeranja i on karakteriše posmatrano polje elementarnih pomeranja u uočenom malom delu sredine oko tačke A. Ako znamo vrednosti ovih komponenti u tački A, relacije (X.9) nam za svaku tačku M sa koordinatama x'_α daju odgovarajuću promenu $\Delta \vec{r}'$ relativnog vektora položaja, odnosno razliku pomeranja $\vec{u} - \vec{u}_0$ ove tačke i pola A za vreme Δt .

Ovaj tenzor možemo prikazati i u drugom vidu, iz čega se može bolje sagledati njegov smisao. Na osnovu definicije dijade relaciju (X.8) možemo napisati kao (v. Dj. Mušicki i B. Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, str. 64-5, 73-4)

$$\Delta \vec{r}' = (\vec{r}' \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{r}' \cdot \{ \nabla, \vec{u} \}, \quad (\text{X.12})$$

gde je $\{ \nabla, \vec{u} \}$ dijadski proizvod Hamilton-ovog operatora ∇ i vektora $\vec{u}$, tzv. lokalni tenzor pridružen vektoru elementarnog pomeranja $\vec{u}$. Ako napišemo eksplicitno ∇ i $\vec{u}$ razložene duž koordinatnih osa, dobićemo lokalni tenzor u obliku

$$\{ \nabla, \vec{u} \} = \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \vec{e}_\alpha, \sum_{\beta=1}^3 u_\beta \vec{e}_\beta \right\} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \{ \vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta \}, \quad (\text{X.13})$$

odakle vidimo da su komponente ovog tenzora $\partial u_\beta / \partial x_\alpha$. S druge strane, na osnovu pravila $\vec{A} \cdot \vec{\tau} = \vec{\tau}^* \cdot \vec{A}$, gde je $\vec{\tau}^*$ konjugovani tenzor sa komponentama $(\tau^*)_{\alpha\beta} = (\tau)_{\beta\alpha}$, u gornjoj relaciji (X.12) možemo izmeniti redosled članova uz zamenu lokalnog tenzora konjugovanim

$$\Delta \vec{r}' = \{ \nabla, \vec{u} \}^* \cdot \vec{r}'. \quad (\text{X.14})$$

Poredjenjem ovog rezultata sa (X.11) neposredno dolazimo do zaključka da je

$$\tau = \{ \nabla, \vec{u} \}^*, \quad (\text{X.15})$$

gde se komponente konjugovanog lokalnog tenzora dobijaju uzajamnom izmenom indeksa komponenta tenzora (X.13), tj.

$$\{ \nabla, \vec{u} \}^* = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \{ \vec{e}_\beta, \vec{e}_\alpha \} \quad (\text{X.16})$$

Prema tome, tenzor elementarnog pomeranja predstavlja konjugovani lokalni tenzor pridružen vektorskom polju ovih pomeranja $\vec{u}(x_\alpha, t)$ sa komponentama $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$, u saglasnosti sa prethodnim relacijama (X.9) i (X.10).

Rastavimo sad ovaj tenzor na simetrični i antisimetrični deo, stavljajući

$$\epsilon_{\beta\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right)$$

$$\text{odnosno, označavajući ove članove sa } \epsilon_{\beta\alpha}^{(a)} \text{ i } \epsilon_{\beta\alpha}^{(s)} \quad \epsilon_{\beta\alpha} = \epsilon_{\beta\alpha}^{(a)} + \epsilon_{\beta\alpha}^{(s)} \quad \longleftrightarrow \quad \tau = \tau^{(a)} + \tau^{(s)} \quad (\text{X.17})$$

gde je

$$\epsilon_{\beta\alpha}^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right), \quad \epsilon_{\beta\alpha}^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (\text{X.18})$$

Na taj način relacije (X.9) takodje se mogu rastaviti na dva dela

$$\Delta x'_\alpha = u_\alpha - u_{0\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta\alpha}^{(a)} x'_\beta + \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta\alpha}^{(s)} x'_\beta,$$

a otuda

$$u_\alpha = u_{0\alpha} + \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta\alpha}^{(a)} x'_\beta + \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta\alpha}^{(s)} x'_\beta \quad (\text{X.19})$$

Zadržimo se najpre na drugom članu, koji određuje komponente onog pomeranja $\vec{u}$ tačke M koje potiče samo od antisimetričnog dela ovog tenzora. U tom cilju napišimo eksplicitno komponente $\epsilon_{\beta\alpha}^{(a)}$ ovog dela tenzora

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{23}^{(a)} &= -\epsilon_{32}^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_1, \\ \epsilon_{31}^{(a)} &= -\epsilon_{13}^{(a)} = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_2, \quad \epsilon_{12}^{(a)} = -\epsilon_{21}^{(a)} = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.20})$$

i uvedimo vektor

$$\vec{\Delta a} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}, \quad (\text{X.21})$$

čije komponente možemo izraziti pomoću komponenta $\epsilon_{\alpha\beta}^{(a)}$

$$\left. \begin{aligned} \Delta a_1 &= \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_1 = \epsilon_{23}^{(a)}, \quad \Delta a_2 = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_2 = \epsilon_{31}^{(a)}, \\ \Delta a_3 &= \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_3 = \epsilon_{12}^{(a)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.22})$$

Tada se drugi član u izrazu (X.19) za $\alpha = 1$ može prikazati na sledeći način

$$u_1^{(a)} = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta 1}^{(a)} x'_\beta = \epsilon_{11}^{(a)} x'_1 + \epsilon_{21}^{(a)} x'_2 + \epsilon_{31}^{(a)} x'_3 = \\ = \Delta \alpha_2 x'_3 - \Delta \alpha_3 x'_2 = (\vec{\Delta} \alpha \times \vec{r}')_1,$$

a na sličan način dobijamo i ostale komponente za $\alpha = 2$ i $\alpha = 3$, tako da je

$$u_\alpha^{(a)} = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta \alpha}^{(a)} x'_\beta = (\vec{\Delta} \alpha \times \vec{r}')_\alpha \quad (X.23)$$

ili u vektorskom obliku

$$\vec{u}^{(a)} = \tau^{(a)} \cdot \vec{r}' = \vec{\Delta} \alpha \times \vec{r}'. \quad (X.24)$$

Što se tiče trećeg člana u izrazu (X.19), koji potiče od simetričnog dela tenzora τ , njega možemo transformisati uvodeći veličinu

$$\psi = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\beta \gamma}^{(s)} x'_\beta x'_\gamma \quad (X.25)$$

Formiramo li parcijalni izvod ove veličine po koordinati x'_α , izdvajajući u ovoj sumi članove sa $\beta = \alpha$ i $\gamma = \alpha$ i stavljajući u prvom delu $\epsilon_{\alpha \alpha}^{(s)} = \epsilon_{\gamma \gamma}^{(s)}$, imaćemo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha \gamma}^{(s)} x'_\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta \alpha}^{(s)} x'_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\gamma \alpha}^{(s)} x'_\gamma + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta \alpha}^{(s)} x'_\beta = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta \alpha}^{(s)} x'_\beta$$

Oдавде proizlazi da se ovaj deo komponentata elementarnog pomeranja može prikazati u obliku

$$u_\alpha^{(s)} = \sum_{\beta=1}^3 \epsilon_{\beta \alpha}^{(s)} x'_\beta = \frac{\partial \psi}{\partial x'_\alpha} \quad (X.26)$$

odnosno, koristeći pojam parcijalnog gradijenta

$$\vec{u}^{(s)} = \tau^{(s)} \cdot \vec{r}' = \text{grad}_{\vec{r}'} \psi, \quad (X.27)$$

čime je ovo vektorsko polje pomeranja svedeno na polje skalara ψ , koji predstavlja kvadratnu funkciju relativnih koordinata tačke M, pridruženu simetričnom delu tenzora $\tau^{(s)}$.

OSNOVNA HELMHOLTZ-OVA TEOREMA. Na osnovu dobijenih rezultata (X.24) i (X.27) prethodna relacija (X.19), koja određuje komponente ukupnog elementarnog pomeranja uočene tačke M, dobija vid

$$u_\alpha = u_{\alpha a} + (\vec{\Delta} \alpha \times \vec{r}')_\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial x'_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (X.28)$$

ili simbolički, tj. vektorski kao

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\Delta} \alpha \times \vec{r}' + \text{grad}_{\vec{r}'} \psi. \quad (X.29)$$

Prvi član, pomeranje pola A za vreme Δt , predstavlja translacioni deo elementarnog pomeranja tačke M uočenog dela sredine, tj. onaj njegov deo koji prikazuje translaciju ovog dela kao celine za vrednost $\vec{u}_0$. Smisao drugog člana može se sagledati ako zapazimo da rezultat (X.24) ima isti oblik kao i formula (19.24), koja određuje pomeranje odgovarajuće tačke krutog tela pri njegovoj elementarnoj rotaciji za $\vec{\Delta} \alpha$. Oдавде vi-

dimo da se drugi član, koji odgovara antisimetričnom delu tenzora τ , može interpretirati kao pomeranje tačke M pri elementarnoj rotaciji uočenog dela sredine kao krutog tela oko ose koja prolazi kroz tačku A. Najzad, treći član prikazuje onaj deo elementarnog pomeranja iz koga je isključena translaciona i rotaciona komponenta. To znači da poslednji član, koji odgovara simetričnom delu tenzora τ , predstavlja specifično pomeranje tačke M koje potiče od čiste deformacije uočenog dela sredine.

Prema tome, elementarno pomeranje ma koje tačke M nekog malog konačnog dela neprekidne sredine sastoji se iz pomeranja usled translacije i rotacije ovog dela sredine kao krutog tela i pomeranja usled čiste deformacije, tj. promene njegovog oblika i zapremine. Ovaj stav naziva se osnovna Helmholtz-ova teorema i predstavlja osnovni stav u kinematici kontinuiranih sredina, generališući Chasles-ovu teoremu (v.str.194-5) sa krutih tela na deformabilna.

XI. ZAKON ODRŽANJA ENERGIJE KOD FLUIDA

Kao što je poznato, u mehanici sistema svi prvi integrali su vremenskog tipa, tj. oni prikazuju održanje izvesnih dinamičkih veličina u toku vremena. Međutim, u mehanici deformabilnih tela, gde sem vremena i prostorne koordinate igraju ulogu nezavisno promenljivih, imamo kako integrale vremenskog tipa tako i integrale prostornog tipa. Na primer održanje energije jedinice mase fluida u toku vremena je tipični primer integrala vremenskog tipa, slično kao u mehanici sistema, a održanje ove iste energije duž strujnih linija, opisano tzv. Bernoulli-evom jednačinom, predstavlja integral prostornog tipa.

Pozabavimo se ovde pitanjem pod kojim uslovima važi zakon održanja energije kod fluida u toku vremena, a radi jasnijeg sagledavanja ovog problema podsetimo se kako se dobija odgovarajući zakon održanja u mehanici sistema. U tom cilju podjimo od osnovne jednačine dinamike primenjene na svaku česticu posmatranog sistema

$$m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} = -\text{grad}_v U + \vec{F}_v^*, \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (XI.1)$$

gde smo sile na v -tu česticu rastavili na potencijalne i nepotencijalne. Pomnožimo obe strane svake od ovih jednačina skalarno sa $\vec{v}_v$ i potom saberimo tako dobijene relacije

$$\sum_{v=1}^N m_v \vec{v}_v \cdot \frac{d\vec{v}_v}{dt} = - \sum_{v=1}^N \vec{v}_v \cdot \text{grad}_v U + \sum_{v=1}^N \vec{v}_v \cdot \vec{F}_v^*,$$

a izraz na levoj strani može se neposredno prikazati u obliku vremenskog izvoda kinetičke energije sistema

$$\frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N \frac{1}{2} m_v \vec{v}_v^2 = \frac{dT}{dt} = - \sum_{v=1}^N \vec{v}_v \cdot \text{grad}_v U + \sum_{v=1}^N \vec{F}_v^* \cdot \vec{v}_v \quad (XI.2)$$

Prvi član s desne strane može se transformisati polazeći od toga da je potencijalna energija u opštem slučaju funkcija oblika $U(x_v, y_v, z_v, t)$,

gde su koordinate čestica funkcije vremena, pa imamo

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial y_j} \dot{y}_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial z_j} \dot{z}_j + \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \vec{v}_j \cdot \text{grad}_j U + \frac{\partial U}{\partial t},$$

a otuda

$$\sum_{j=1}^N \vec{v}_j \cdot \text{grad}_j U = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t} \quad (\text{XI.3})$$

Uvrštavajući ovaj izraz u gornju relaciju, možemo je napisati kao

$$\frac{dT}{dt} = - \left(\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^* \cdot \vec{v}_j$$

ili posle grupisanja srodnih članova

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^* \cdot \vec{v}_j \quad (\text{XI.4})$$

Oдавде neposredno možemo zaključiti pod kojim uslovima važi zakon održanja energije u mehanici sistema, naime

$$\left. \begin{array}{l} \text{ako } \partial U / \partial t = 0 \\ \text{i } \sum \vec{F}_j^* \cdot \vec{v}_j = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E = T + U = \text{const} \quad (\text{XI.5})$$

Dakle, ako potencijalna energija, odnosno odgovarajuće potencijalne sile ne zavise eksplicitno od vremena i ako nema nepotencijalnih sila ili je bar $\sum \vec{F}_j^* \cdot \vec{v}_j = 0$, ukupna mehanička energija sistema ostaje stalna u toku vremena.

Primenimo sad sličan postupak za dobijanje analognog zakona održanja energije kod fluida i pretpostavimo da je posmatrani fluid idealan i barotropan, tj. da se zanemaruje viskoznost i da karakteristična jednačina ima oblik $\rho = f(p)$. U tom slučaju u opštoj jednačini kretanja idealnih fluida (31.4)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (\text{XI.6})$$

poslednji član može se prikazati kao grad ψ (v.str.320), gde je

$$\psi = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{f(p)}, \quad (\text{XI.7})$$

a ako se rastavi $\vec{f}$ na potencijalne i nepotencijalne sile, stavljajući

$$\vec{f} = -\text{grad } \epsilon_p + \vec{f}^*,$$

gde $\vec{f}^*$ označava gustinu nepotencijalnih zapreminskih sila, a ϵ_p je potencijalna energija jedinice mase fluida u polju potencijalnih zapreminskih sila, gornja jednačina dobija vid

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}(\epsilon_p + \psi) + \vec{f}^* \quad (\text{XI.8})$$

Pomnožimo obe strane ove jednačine skalarno sa $\vec{v}$, slično kao u prethodnom slučaju

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) = -\vec{v} \cdot \text{grad}(\epsilon_p + \psi) + \vec{v} \cdot \vec{f}^*, \quad (\text{XI.9})$$

gde izraz na levoj strani predstavlja izvod po vremenu kinetičke energije makrofizičkog kretanja jedinice mase fluida. Da bismo transformisali izraz na desnoj strani, zapazimo da je u Euler-ovom metodu totalni izvod makve funkcije oblika $F(x, y, z, t)$ jednak

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial t} = \vec{v} \cdot \text{grad } F + \frac{\partial F}{\partial t},$$

odakle proizilazi

$$\vec{v} \cdot \text{grad } F = \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{XI.10})$$

Tada se gornja jednačina može napisati na sledeći način

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) = - \frac{d}{dt} (\epsilon_p + \psi) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_p + \psi) + \vec{f}^* \cdot \vec{v}$$

a posle grupisanja srodnih članova dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \epsilon_p + \psi \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_p + \psi) + \vec{f}^* \cdot \vec{v}. \quad (\text{XI.11})$$

Ovde $Q = \epsilon_p + \psi$ predstavlja potencijalnu energiju fluida po jedinici mase, tzv. gustinu potencijalne energije, koja potiče kako od zapreminskih tako i od površinskih sila, pa izraz u zagradi prikazuje ukupnu makrofizičku mehaničku energiju jedinice mase fluida, tj. gustinu ove energije. Stoga gornja relacija izražava, analogno relaciji (XI.4), opšti zakon promene gustine ukupne energije fluida po jedinici vremena, odakle neposredno dolazimo do sledećeg zaključka

$$\left. \begin{array}{l} \text{ako } \partial (\epsilon_p + \psi) / \partial t = 0 \\ \text{i } \vec{f}^* \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + \epsilon_p + \psi = \text{const} \quad (\text{XI.12})$$

Prema tome, ako je fluid idealan i barotropan, ako gustina potencijalne energije ne zavisi eksplicitno od vremena i ako nema nepotencijalnih sila ili je bar $\vec{f}^* \cdot \vec{v} = 0$, ukupna gustina energije fluida ostaje stalna u toku vremena. Gornji zakon (XI.11) opšte promene makrofizičke mehaničke energije fluida sa vremenom predstavlja specijalni slučaj zakona (27.59), proširen i na zapreminske nepotencijalne sile i pokazuje karakterističnu analogiju sa odgovarajućim zakonom (IX.4) iz mehanike sistema. Pri tome, ulogu potencijalne energije iz mehanike sistema ovde preuzima gustina potencijalne energije, koja delom potiče i od površinskih sila, koje su karakteristične za sve sredine čiji molekuli interaguju silama kratkog dometa. Sem toga, postoje i dopunske, specifične razlike u odnosu na mehaniku sistema, koje su povezane sa osobinama idealnosti i barotropnosti fluida kao bitnim uslovima za važenje ovog zakona održanja. Naime, ukoliko bi fluid bio viskozan, imali bismo nepotencijalne površinske sile trenja, a ako bi u karakterističnoj jednačini figurisala i temperatura, sem mehaničke imali bismo i unutrašnju energiju, te u oba slučaja ne bi važio zakon održanja mehaničke energije.

XII. STACIONARNO PROTICANJE VISKOZNIH FLUIDA KROZ CEVI

POLAZNI SISTEM JEDNAČINA. Pri proučavanju kretanja viskoznog fluida kroz cevi pretpostavimo da je ovaj fluid *nestišljiv*, a njegovo kretanje *stacionarno*. Pod tim uslovima potpun sistem jednačina svodi se na Navier-Stokes-ovu jednačinu (33.30) bez prvog člana i jednačinu kontinuiteta (27.54)

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} &= 0 \quad (\rho = \text{const}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.1})$$

Ako napišemo eksplicitno operator s leve strane prema formuli za skalar-ni proizvod $\vec{v} \cdot \nabla = \sum v_\beta \partial / \partial x_\beta$ odgovarajuće sklarne jednačine u Descar-tes-ovim pravouglim koordinatama imaće oblik

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\beta=1}^3 v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} &= f_\alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\eta}{\rho} \Delta v_\alpha \quad (\alpha=1,2,3) \\ \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} &= 0 \quad (\rho = \text{const}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.2})$$

Ukoliko se koristi drugi koordinatni sistem, zavisno od geometrije prob-lema treba izračunati izraze $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ i $\Delta \vec{v}$ u tom sistemu, imajući u vi-du da ortovi koordinatnih osa tada više nisu konstantni.

Stacionarno kretanje viskoznih fluida kroz cevi može imati vi-še uzroka: a) *gradijent pritiska*, koji izaziva strujanje fluida od mesta višeg ka mestu nižeg pritiska, b) *dejstvo zapreminskih sila*, kao na pr. uticaj Zemljine teže i c) *kretanje graničnih površi*, koje povlači za so-bom fluid koji prijanja uz njih. Ovi podaci moraju biti unapred dati, a u prvom i trećem slučaju oni predstavljaju granične uslove problema, ko-ji omogućavaju određivanje integracionih konstanti iz rešenja Navier-Stokes-ove jednačine.

Navedimo ovde neke geometrijski jednostavne slučajeve, u kojima je moguće sprovesti integraciju polaznog sistema jednačina i to sa ele-mentarnim funkcijama.

PRAVOLINIJSKO-PARALELNO KRETANJE VISKOZNOG FLUIDA. U ovom slu-čaju kretanje fluida je definisano sledećim uslovima, ako pravac njego-vog kretanja uzmemo za X-osu

$$v_x = v(y,z), \quad v_y = v_z = 0 \quad (\text{XII.3})$$

Jednačina kontinuiteta, tj. uslov nestišljivosti ovde se svodi samo na $\partial v_x / \partial x = 0$, što i opravdava našu polaznu pretpostavku da komponenta v_x zavisi samo od y i z . Ako izraz $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ napišemo eksplicitno

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z},$$

prvi član otpada jer $\vec{v}$ ne zavisi od x , a drugi i treći jer je $v_y = v_z = 0$, tako da je ovaj izraz zbog ovakve geometrije strujanja fluida iden-tički jednak nuli

$$\vec{v} = v(y,z) \vec{e}_x \implies (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0, \quad (\text{XII.4})$$

pa Navier-Stokes-ove jednačine (XII.2) dobijaju vid

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.5})$$

Razložimo li pritisak u fluidu na statički p_0 i dinamički p'

$$p = p_0 + p', \quad (\text{XII.6})$$

gde prvi odgovara uslovu mirovanja

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0, \quad f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad (\text{XII.7})$$

a drugi potiče usled kretanja, prethodne jednačine se uprošćavaju i u njima preostaje samo dinamički pritisak

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial p'}{\partial x}, \\ \frac{\partial p'}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.8})$$

Oдавде proizlazi da je dinamički pritisak funkcija samo od x , pa su u pr-voj jednačini razdvojene promenljive i ona se raspada na dve

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = A, \quad \frac{1}{\eta} \frac{dp'}{dx} = A, \quad (\text{XII.9})$$

gde je A konstanta razdvajanja. Tada prva od njih, tzv. *Poisson-ova jed-načina* uz navedene granične uslove omogućava da se odredi profil brzine u posmatranom slučaju, tj. oblik funkcije $v_x = v(y,z)$, a druga određuje dinamički pritisak kao funkciju od x , tj. $p' = p'(x)$.

PRIMER: KRETANJE FLUIDA KROZ CILINDRIČNE CEVI. Posmatrajmo pro-ticanja viskoznog fluida kroz prostor između dva koaksijalna cilindra poluprečnika R_1 i R_2 ($R_1 > R_2$) paralelno njihovoj zajedničkoj osi (sl.XII.1). Zbog aksijalne simetrije ovde brzina fluida za-visi samo od rastojanja r od ose cilindra

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_x, \quad (\text{XII.10})$$

pa je pogodnije u ravni YOZ uzeti polarne koordinate (r, φ) . Tada

se laplasijan na levoj strani Poisson-ove jednačine (XII.9) može izrazi-ti u polarnim koordinatama (v.str. 349), pa ova jednačina glasi

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = A,$$

što se može napisati i kao

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = A. \quad (\text{XII.11})$$

Prva integracija ove jednačine daje

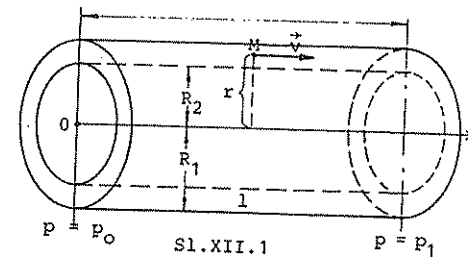
$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} A r^2 + C_1,$$

a ponovnom integracijom dobijamo

$$v = \frac{1}{4} A r^2 + C_1 \ln r + C_2, \quad (\text{XII.12})$$

čime je određen profil brzine između cevi, tj. zavisnost $v = v(r)$. In-tegracione konstante nalaze se iz graničnih uslova, na pr. ako se ova dva cilindra kreću uniformno u pravcu X-ose datim brzinama v_1 i v_2 , mo-ra biti

$$v(R_1) = v_1, \quad v(R_2) = v_2 \quad (\text{XII.13})$$



što nam daje dve jednačine za određivanje ovih dveju integracionih konstanti.

Što se tiče pritiska u fluidu, njega možemo naći pomoću druge jednačine (XII.9)

$$\frac{1}{\eta} \frac{dp'}{dx} = A,$$

odakle integracijom dobijamo

$$p' = A x + C_3 \quad (\text{XII.14})$$

Ako su vrednosti dinamičkog pritiska na početku ($x = 0$) i na kraju ($x = l$) cevi p_0 i p_1 , imaćemo

$$p_0 = C_3, \quad p_1 = A l + C_3,$$

pa oduzimanjem nalazimo

$$p_0 - p_1 = \Delta p = -A l, \quad A = -\frac{\Delta p}{l}$$

Na taj način, uvrštavajući nadjene vrednosti za C_3 i A u jednačinu (XII.14), dolazimo do rezultata

$$p' = p_0 - \frac{\Delta p}{l} x \quad (\Delta p = p_0 - p_1), \quad (\text{XII.15})$$

tj. pritisak u fluidu opada linearno duž ose cilindra.

KRUŽNO STACIONARNO KRETANJE VISKOZNOSTI FLUIDA. Posmatrajmo sad takvo kretanje viskoznog fluida koje se odvija po koncentričnim krugovima u međusobno paralelnim ravnima. Ovakvo kretanje fluida je u cilindričnim koordinatama, ako osu rotacije uzmemo za Z-osu, definisano sledećim uslovima

$$v_\varphi = v(r, z), \quad v_r = v_z = 0, \quad (\text{XII.16})$$

pri čemu jednačina kontinuiteta opravdava pretpostavku da v_φ ne zavisi od φ . Međutim, u ovom slučaju izraz $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ i laplasijsan $\Delta \vec{v}$ ne mogu se neposredno projicirati na ose cilindričnog sistema, pošto je ort $\vec{e}_\varphi$ funkcija položaja. Koristeći vektorsku identičnost (31.28) kao i formulu za rot rot $\vec{v}$, ove izraze možemo izračunati na sledeći, indirektan način

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}, \\ \Delta \vec{v} &= \text{grad} \text{div} \vec{v} - \text{rot} \text{rot} \vec{v} = -\text{rot} \text{rot} \vec{v}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.17})$$

jer je zbog nestišljivosti fluida $\text{div} \vec{v} = 0$.

Ako se ovi izrazi razviju u cilindričnim koordinatama, prema poznatim formulama iz vektorske analize (v.na pr. Dj. Mušicki i B. Milić: Matematičke osnove teorijske fizike, str. 52-6) dobijaju se dosta složeni izrazi, koji imaju komponente u pravcu ortova $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\varphi$. Stoga se ovde ograničimo samo na jedan specijalan, ali vrlo važan slučaj sa aksijalnom simetrijom.

PRIMER: KRETANJE FLUIDA IZMEDJU DVA ROTIRAJUĆA CILINDRA. Ako se fluid nalazi izmedju dva koaksijalna cilindra poluprečnika R_1 i R_2 koji

se obrću datim ugaonim brzinama ω_1 i ω_2 (sl.XII.2), nastaje čisto kružno kretanje fluida sa brzinom oblika

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_\varphi \quad (\text{XII.18})$$

U ovom slučaju primenimo opšte formule za gradijent i rotor u ma kojim ortogonalnim generalisanim koordinatama

$$\begin{aligned} \text{grad} \phi &= \sum_{a=1}^3 \frac{1}{h_a} \frac{\partial \phi}{\partial x_a} \vec{e}_{q_a}, & \text{rot} \vec{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_{q_1} & h_2 \vec{e}_{q_2} & h_3 \vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{12.19})$$

Prema ovim formulama izračunajmo navedene veličine

u cilindričnom koordinatnom sistemu sa Z-osom u pravcu zajedničke ose ovih cilindra, imajući u vidu da su ovde Lamé-ovi koeficijenti $h_r = h_z = 1$, a $h_\varphi = r$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{h_a} \frac{\partial}{\partial q_a} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \vec{e}_{q_a} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \vec{e}_r,$$

tj.

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = v(r) \frac{dv}{dr} \vec{e}_r, \quad (\text{XII.20})$$

a rot $\vec{v}$ će biti

$$\text{rot} \vec{v} = \frac{1}{h_r h_\varphi h_z} \begin{vmatrix} h_r \vec{e}_r & h_\varphi \vec{e}_\varphi & h_z \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_r v_r & h_\varphi v_\varphi & h_z v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r v(r) & 0 \end{vmatrix}$$

odnosno

$$\text{rot} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v(r)] \vec{e}_z \quad (\text{XII.21})$$

Na osnovu ovih rezultata rot rot $\vec{v}$ imaće vid

$$\text{rot} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \text{rot}_z \vec{v} \end{vmatrix} = -\vec{e}_\varphi \left\{ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v) \right] \right\}$$

dakle

$$\text{rot} \text{rot} \vec{v} = -\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v(r)] \right\} \vec{e}_\varphi, \quad (\text{XII.22})$$

a $\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}$ biće jednak

$$\vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = v(r) \vec{e}_\varphi \times \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v(r)] \vec{e}_z$$

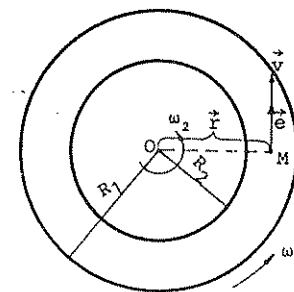
tj.

$$\vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \frac{v(r)}{r} \left[v(r) + r \frac{dv}{dr} \right] \vec{e}_r \quad (\text{XII.23})$$

Tada se izraz $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ može naći prema prvoj relaciji (XII.17)

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v \frac{dv}{dr} \vec{e}_r - \frac{v}{r} (v + r \frac{dv}{dr}) \vec{e}_r$$

odnosno



Sl.XII.2

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{v} = - \frac{v^2(r)}{r} \vec{e}_r, \quad (\text{XII.24})$$

a laplasijan $\Delta \vec{v}$ prema drugoj relaciji (XII.17)

$$\Delta \vec{v} = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v(r)] \right\} \vec{e}_\varphi. \quad (\text{XII.25})$$

U ovom slučaju zbog aksijalne simetrije i pritiska u fluidu može zavistiti samo od koordinate r , tako da prema prvoj formuli (XII.19) imamo

$$\text{grad } p = \frac{1}{h_r} \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{dp}{dr} \vec{e}_r \quad (\text{XII.26})$$

Uvrštavanjem svih ovih izraza u Navier-Stokes-ovu jednačinu (XII.1) dobijamo

$$- \frac{v^2(r)}{r} \vec{e}_r = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \vec{e}_r + \frac{\eta}{\rho} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v(r)] \right\} \vec{e}_\varphi,$$

a izjednačavanjem koeficijenata uz ortove $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\varphi$ s obe strane odavde proizlaze odgovarajuće skalarne diferencijalne jednačine

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \quad \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r v(r)] \right\} = 0 \quad (\text{XII.27})$$

Iz druge jednačine neposredno možemo naći profil brzine, naime prva integracija daje

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) = C_1,$$

a ponovnom integracijom dobijamo

$$v = \frac{1}{2} C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (\text{XII.28})$$

pri čemu su integracione konstante određene graničnim uslovima

$$v(R_1) = \omega_1 R_1, \quad v(R_2) = \omega_2 R_2 \quad (\text{XII.29})$$

Uvrštavanjem nadjenog rešenja u prvu jednačinu (XII.27) i njenom integracijom možemo naći i pritisak kao funkciju od r

$$p = \rho \int \frac{v^2(r)}{r} dr \quad (\text{XII.30})$$

Pri tome zapazimo da je ovde ispao koeficijent viskoznosti η i da svi dobijeni rezultati zavise samo od jedne nezavisno promenljive - koordinate r , tako da je mehaničko stanje fluida isto u svim ravnama normalnim na osu rotacije.

L I T E R A T U R A

1. А и з е р м а н М. "Классическая механика", Изд. "Наука", Москва, 1980.
2. А м е н з а д е Ю. "Теория упругости", Изд. "Высшая школа", Москва, 1971.
3. А н д ж е л и ć Т. и С т о ј а н о в и ć Р. "Racionalna mehanika", Zавод за изд. udžbenika, Beograd 1966.
4. А н д ж е л и ć Т. "Основи механике непрекидних средина", Научна knjiga, Beograd 1950.
5. А р р е л л Р. "Traité de mécanique rationnelle", том I-II, Gauthier Villars, Paris 1953.
6. В е с к е р R. "Introduction to Theoretical Mechanics", Mc Graw Hill, New York 1954.
7. В и л и м о в и ć А. "Racionalna mehanika", том I-IV, Научна knjiga i SAN, Beograd 1950-55.
8. С о r b e n Н. and S t e h l e Ph. "Classical Mechanics", John Wiley and sons, New York 1965.
9. Ч е р н ы х К. /редактор/ "Введение в механику сплошних сред", Изд. Ленингр. Унив, Ленинград 1984.
10. Д о б р о я р а в о в В. "Основы аналитической механики", Изд. Высшая школа, Москва 1976.
11. Г а н т м а х е р Ф. "Лекции по аналитической механике", Изд. "Наука", Москва 1966.
12. G o l d s t e i n Н. "Classical Mechanics", Addison-Wesley Co, Cambridge 1953.
13. Г р е ч к о Л, С у г а к о в В, Т о м а с е в и ч О. и Ф е д о р ч е н к о А. "Сборник задач по теоретической физике", Изд. Высшая школа, Москва 1972.
14. G r o e s b e r g S. "Advanced Mechanics", John Wiley and sons, New York 1968.
15. J o o s G. "Lehrbuch der Theoretischen Phystik", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1934.
16. K a h a n Т. "Précis de physique théorique moderne", том I (vol.1-2), Presses universitaires de France, Paris 1960.
17. К о ч и н Н, К и б е л ь И. и Р о з е Н. "Теоретическая гидромеханика", Гостехиздат, Москва 1955.

18. К о м п а н е е ц А. "Курс теоретической физики", Том I, Изд. Просвещение, Москва 1972.
19. К о с м о д е м ь я н с к и й А. "Курс теоретической механики", том I-II, Изд. Просвещение, Москва 1965.
20. К о т к и н Г. и С е р б о В. "Сборник задач по классической механике", Изд. Наука, Москва 1977.
21. Л а н д а у Л. и Л и ф ш и ц Е. "Краткий курс теоретической физики, том I - Механика и Электродинамика", Изд. Наука, Москва 1969.
22. Л а н д а у Л. и Л и ф ш и ц Е. "Теоретическая физика, том I - Механика", Изд. Наука, Москва 1973.
23. L e e s c h J. "Classical Mechanics", Methuen, London 1965.
24. Л о я ц я н с к и й Л. "Механика жидкости и газа", Гостехиздат, Москва 1957.
25. Л у р ь е А. "Аналитическая механика", физматгиз, Москва 1961.
26. M a s e G. "Theory and Problems of Continuum Mechanics" - Schaum's outline series, Mc Graw-Hill, New York 1970.
27. M e r s i e r A. "Analytical and Canonical Formalism in Physics", North-Holland Co, Amsterdam 1959.
28. М е щ е р с к и й И. "Сборник задач по теоретической механике", Гостехиздат, Москва 1972.
29. M i l i ć B. "Kurs klasične teorijske fizike, I deo - Njutnova mehanika", Izd. Univ, Niš 1983.
30. M i l i ć B. "Zbirka zadataka iz teorijske fizike, I deo - Mehanika sistema i neprekidnih sredina", Beograd, izd. Grafički zavod, Beograd 1971.
31. M u š i c k i D j. i M i l i ć B. "Matematičke osnove teorijske fizike - sa zbirkom rešenih zadataka", Naučna knjiga, Beograd 1975.
32. Н е в з г л я д о в В. "Теоретическая механика", физматгиз, Москва 1959.
33. О л ь х о в с к и й И. "Курс теоретической механики для физиков", Изд. Моск. Унив, Москва 1974.
34. О л ь х о в с к и й И, П а в л е н к о Ю. и К у з ь м е н к о в Л. "Задачи по теоретической механике для физиков", Изд. Моск. Унив, Москва 1977.
35. П е т к е в и ч В. "Теоретическая механика", Изд. Наука, Москва 1981.
36. П о л а к Л. "Вариационные принципы механики", физматгиз, Москва 1960.

37. P r a g e r W. "Einführung in die Kontinuumsmechanik", Birkhäuser Verlag, Basel 1961.
38. П я т н и ц к и й Е, Т р у х а н Н, Х а н у к а е в Ю. и Я к о в е н к о Г. "Сборник задач по аналитической механике", Изд. Наука, Москва 1980.
39. R a š k o v i ć D. "Mehanika", tom I-III, Naučna knjiga, Beograd 1971-72.
40. S c h a e f e r C. "Einführung in die Theoretische Physik, tom I - Mechanik", Walter de Gruyter und Co, Berlin 1944.
41. С е д о в Л. "Механика сплошной среды", том I-II, Изд. Наука, Москва 1970.
42. S l a t e r J. and F r a n k N. "Mechanics", Mc Graw-Hill, New York 1947.
43. С л е з к и н Н. "Динамика вязкой несжимаемой жидкости", Гостехиздат, Москва 1955.
44. S p i e g e l M. "Theory and Problems of Theoretical Mechanics" - Schaum's outline series, Schaum Publishing Co, New York 1967.
45. S u d a r s h a n E. and M u k u n d a N. "Classical Dynamics: A Modern Perspective", John Wiley and sons, New York 1974.
46. S u p e k I. "Teorijska fizika i struktura materije", tom I, Školska knjiga, Zagreb, 1974.
47. V o r o n j e s K. i O b r a d o v i ć N. "Mehanika fluida", Gradjevinska knjiga, Beograd 1960.
48. W e i z e l W. "Lehrbuch der Theoretischen Physik", tom I, Springer Verlag, Berlin 1955.
49. W h i t t a k e r E. "Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies", University Press, Cambridge 1959.
50. Ž a r d e s k i V. "Hidromehanika" (litografisano), Beograd 1932.

R E G I S T A R

- Appell 4
- Appell-ov princip 49
- Arhimed 3
- Arhimed-ov zakon 326
- Bernoulli 3
- Bernoulli-eva jednačina 328
- Binet-ov obrazac 171
- Broj, Reynolds-ov 351
 - stepeni slobode 71,73
 - -- efekt.redukcija kod de-
 - generisanih sistema 380
 - -- krutog tela 189
- Brzina, čestice 9
 - -- komponente 10
 - -- kvadrat brzine 10
 - -- pri relativnom kretanju 234
 - -- projekcije na gener. ko-
 - ord. ose 18
 - prenosna 234
 - prostiranja malih poremeća-
 - ja 293
 - -- u fluidu 340
 - -- u žici 303
 - relativna 234
 - sektorska 103
 - tačke krutog tela 202
 - ugaona krutog tela 198
 - -- projekcije na koord.ose 201
 - -- veza sa Euler-ovim uglovima 200
 - zvuka u gasovima 341
- Cartan 4
- Cauchy-Lagrange-ev integral 332
- Centar masa (centar inercije) 34
 - krutog tela 203
- Cev, strujna 313
 - vrtložna 313
- Chasles-ova teorema 195
- Cikloida 15
- Ciolkovski 4
- Cirkulacija, brzine 314
- ubrzanja 334
- Čestica 6
 - fizički beskonačno mala 398
 - u elektromagnetnom polju 113
- d' Alembert 3
- d' Alembert-Lagrange-ev princip 49,51
 - primena 52,61,77
 - u generalisanim koordinatama 78
- Deformacija sredine 255
- Deformacije, beskonačno male 257,282
 - linearne 256
- Degenerisan sistem 121
 - kontinuiran 394
- Dejstvo, Hamilton-ovo 96
 - Lagrange-evo 99
- Delić kontinuirane sredine 252,398
- Determinizam mehanički 54
- Dinamika 1
- Dirac 121
- Efekat sila 30
- Einstein 4
- Elipsoid inercije 206
- Emmi Noether-ina teorema 100
 - generalisana 366
 - primena na dobijanje zakona održanja 100,367
- Energija, generalisana 86
 - -- pri relativnom kretanju 388
 - kinetička 35
 - -- krutog tela 214
 - -- u generalisanim koordinatama 76
 - potencijalna 32
 - -- centrifugalna 388
 - ukupna 36, 86
- Euler 3
- Euler-Lagrange-eve jednačine varijacionog računa 92,392
- Euler-Lagrange-ev princip najmanjeg dejstva 361
- Euler-ova jednačina za fluide 318,321

Euler-ova teorema 194
 Euler-ova transformisana jednačina 323
 Euler-ove jednačine za kruta tela 222
 Euler-ove promenljive 254
 Euler-ovi uglovi 190
 Euler-ov metod, za kontinuirane sredine 254,398
 -- za fluide 309, 320
 -- za kruta tela 222
 Euler-ov obrazac 196
 Euler-ov slučaj kretanja krutog tela 229
 Fizičko polje 391,399
 Fluid 309
 -- barotropan 312
 -- idealan 309
 -- viskoznan 309, 341
 Fluks mase kontinuirane sredine 276
 Frekvencije sistema svojstvene 162
 Funkcija, Hamilton-ova 105,108,394
 -- glavna 137
 -- karakteristična 136
 -- Lagrange-eva 79, 102,391
 -- u širem smislu 372
 -- sile 31
 Galilei 3
 Galilei-eve transformacije 6
 Galilei-ev princip relativnosti 6,28
 Gauss-ov princip 49
 Generatrisa, Hamilton-Jacobi-eva 135
 -- kanonske transformacije 124,381
 Granice važenja klasične mehanike 3
 Gromeko-Lamb-ova jednačina 323
 Gustina fluksa čestica 185
 Hamilton 4
 Hamiltonijan 394
 -- gustina 394
 Hamilton-ova funkcija 105,108,394
 -- glavna 137

-- karakteristična 136
 Hamilton-ove (kanonske) jednačine 105
 -- generalisane 120
 -- u obliku Poisson-ovih zagrada 114
 -- za degenerisane sisteme 122,378
 -- za kontinuirane sisteme 396
 Hamilton-ov formalizam 104-10
 -- homogeni 359
 -- paralela sa Lagrange-evim 371
 -- uopštenje 372
 -- za kontinuirane sisteme 393-7
 Hamilton-ovo dejstvo 96
 Hamilton-ov princip 49,97,106
 -- karakter stacionarnosti 363
 -- za kontinuirane sisteme 391
 Hamilton-Jacobi-eva generatrisa 135
 Hamilton-Jacobi-eva jednačina 135
 Hamilton-Jacobi-ev metod 136
 Helmholtz-ova jednačina 324
 Helmholtz-ova teorema, druga 337
 -- osnovna 258
 -- prva 336
 -- treća 338
 Helmholtz-ov princip 49
 Hertz-ov princip 49
 Hodograf brzine 12
 Homogenost, prostora 5,84
 -- vremena 5,84
 Hooke-ov zakon 287
 -- generalisan 283
 Identičnost Jacobi-eva 115
 Impuls čestice 23
 -- pri relativnom kretanju 387
 Impuls generalisan 102
 -- gustina 394
 -- uopšten 118
 Integral, Bernoulli-ev 327
 -- Cauchy-Lagrange-ev 332
 -- energije 36
 -- impulsa 38
 -- kretanja 116

-- momenta impulsa 40
 -- prostornog tipa 403
 -- vremenskog tipa 403
 Integralna invarijanta, Poincaré-Cartana 133
 -- Poincaré-ova 133
 Integralne invarijante apsolutne 134
 Invarijante kanonskih transformacija 128
 Izotropija prostora 5,84
 Izvod supstancijalni 273
 Izvod vektora, apsolutni 199
 -- relativni 199
 Jacobi 4
 Jacobi-eva identičnost 115
 Jacobi-eva teorema 139
 Jacobi-ev princip 49
 Jačina vrtloga 338
 Jednačina, Bernoulli-eva 328
 -- diferencijalna relativnog kretanja čestice 236,387
 -- dinamike osnovna 27
 -- idealnog fluida (Euler-ova jednačina) 318
 -- Euler-ova transformisana (Gromeko-Lamb) 323
 -- Hamilton-Jacobi-eva 135
 -- Helmholtz-ova 324
 -- karakteristična, za fluide 312
 -- za male oscilacije 162
 -- za tenzor inercije 218
 -- kontinuiteta 277
 -- kretanja opšta 114
 -- za degenerisane sisteme 123,378
 -- Laplace-ova 331
 -- longitudinalnih oscilacija žice 303
 -- Meščerskog 246
 -- Poisson-ova 407
 -- transverzalnih oscilacija žice 302
 Jednačine, diferencijalne, malih oscilacija 162

-- slobodnog kretanja 52
 -- Euler-ove za kruta tela 222
 -- Euler-Lagrange-eve varijacionog računa 92,392
 -- Hamilton-ove (kanonske) 105
 -- generalisane 120
 -- u obliku Poisson-ovih zagrada 114
 -- za degenerisane sisteme 122,378
 -- za kontinuirane sisteme 396
 -- konstitucione (naponskog stanja) 280
 -- kretanja, deformabilne sredine (Navier) 272, 275
 -- diferencijalne 27, 53
 -- elastičnih tela (Lamé) 289
 -- konačne 9,54
 -- viskoznih fluida (Navier-Stokes) 347
 -- Lagrange-eve (druge vrste) 78
 -- kovarijantnost 354
 -- za degenerisane sisteme 376
 -- za kontinuirane sisteme 392
 -- za potencijalne sile 79
 -- prirodne, prinudnog kretanja čestice 66, 67
 -- slobodnog kretanja čestice 53
 -- sa množiteljima veza (Lagrange-eve prve vrste) 63
 -- veza 41
 Kepler-ov problem 139,173,178
 Kepler-ov zakon, drugi 169
 -- prvi 174
 -- treći 176
 Kinematika 1
 Kinetički fokus sistema 363
 Klatno, cikloidno 82
 -- fizičko 227
 -- redukovana dužina 227
 -- matematičko 152
 -- male oscilacije 157
 -- period oscilacija 157
 -- sila reakcije 68
 Koeficijent, elastičnosti Poisson-ov 286

- viskoznosti kinematički 347
- Koeficijenti, elastičnosti 284-6
 - Lamé-ovi metrički 17
 - viskoznosti 343
- Količina kretanja 23
- Konstante elastičnosti Lamé-ove 283
- Koordinate, ciklične 81, 109
 - generalisane, deformabilnog tela 265
 - -- krutog tela 190
 - -- sistema čestica 72
 - -- tačke 17
 - -- normalne (glavne) 163
- Korespondencija između klasične i kvantne mehanike 115
- Kos hitac 55
- Kretanje, apsolutno 4, 233
 - centralno 168
 - -- jednačine putanje 171
 - -- opšte osobine 169
 - -- čestice, jednodimenziono 145
 - -- relativno 233, 384
 - -- fluida, aciklično 331
 - -- ciklično 331
 - -- laminarno 350
 - -- potencijalno (bezvrtložno) 329
 - -- stacionarno 327
 - -- turbulentno 350
 - -- vrtložno 332
 - krutog tela, oko nepomične ose 226
 - -- oko nepomične tačke 229
 - -- Euler-ov slučaj 229
 - -- Lagrange-ev slučaj 230
 - -- ravno 224
 - -- na Zemlji koja rotira 238
 - prenosno 233
 - prinudno 41
 - rakete 247
 - relativno 233
 - sa promenljivom masom 243
 - slobodno 41
- Lagrange 3
- Lagrange-eva funkcija 79, 391
- relativnog kretanja čestice 385
- u širem smislu 372
- Lagrange-eve jednačine, (druge vrste) 78
 - -- kovarijantnost 354
 - -- za degenerisane sisteme 376
 - -- za kontinuirane sisteme 392
 - -- za potencijalne sile 79
 - -- prve vrste 63
- Lagrange-eve zgrade 130
- Lagrange-ev formalizam 77-81
 - paralela sa Hamilton-ovim 371
 - uopštenje 372
 - za kontinuirane sisteme 391-3
- Lagrange-ev metod, za kontinuirane sredine 254
 - -- za fluide 309
 - -- za kruta tela 221
- Lagrange-ev princip mogućih pomeranja 49, 51
- Lagrange-ev slučaj kretanja krutog tela 230
- Lagrange-evo dejstvo 99
- Lagranžijan 391
 - gustina 391
- Lamé-ove jednačine za elastična tela 289
- Lamé-ove konstante elastičnosti 283
- Lamé-ovi koeficijenti metrički 17
- Laplace-ova jednačina 331
- Libracije 141
- Linija čvorna 190
- Linije, strujne (linije toka) 313, 327
 - vrtložne 313, 332
- Ljapunov 4
- Masa, čestice 23
 - redukovana 177
 - tela 2
- Materijalna tačka 8
- Matrica ortogonalne transformacije 192
- Maupertuis-Lagrange-ev princip 49, 99
- Mehanika kontinuuma, 1, 252

- Mehanika sistema 1
- Meščerski 4
- Metod, Euler-ov, za kontinuirane sredine 254
 - -- za fluide 309, 320
 - -- za kruta tela 222
 - generalisanih koordinata (analitički) 71
 - Hamilton-Jacobi-ev 136
 - Lagrange-ev, za kontinuirane sredine 254
 - -- za fluide 309
 - -- za kruta tela 221
 - mehanike deformabilnih tela 252
 - množitelja veza 61
 - opštih zakona dinamike za kruta tela 220
 - razdvajanja promenljivih 137
 - vektorski 71
- Metrika u generalisanim koordinatama 17
- Množitelji veza 46
- Modul, elastični Young-ov 286
 - kompresije 284
 - smicanja (torzije) 284
- Moment, angularni 104
 - impulsa (kinetički moment) 30
 - -- krutog tela 215
 - -- inercije krutog tela 204
 - -- tenzorski karakter 210, 217
 - -- zakoni transformacije 207
 - -- zavisnost od pravca ose rotacije 205
 - sile 30
 - -- u odnosu na osu rotacije 206
 - vektora u odnosu na pol 30
- Momenti inercije glavni 218
- Napon 266
 - idealnog fluida 311
- Naponi glavni 275
- Navier-ove jednačine za deformabilne sredine 273
- Navier-Stokes-ove jednačine za viskozne fluide 347
- Navier-Stokes-ov zakon 343
- Newton 3
- Newton-ovi principi mehanike 2
- Newton-ov zakon, gravitacije 25
 - za viskozne fluide 341, 343
- Nutacija 232
- Obrazac, Binet-ov 171
 - Euler-ov 196
 - Rodrigues-ov 197
- Oscilator, linearni 146
 - -- čisto harmonijski 147
 - -- sa otpornom silom 148
 - -- sa prinudnom silom 150
 - prostorni 56
- Oscilacije žice, Bernoulli-evo rešenje 305
 - longitudinalne 302
 - svojstvene funkcije 307
 - svojstvene vrednosti 307
 - transverzne 299
- Ose, glavne tenzora napona 275
 - inercije glavne 218
 - slobodne 228
- Parametar sudara 184
- Pascal-ov zakon 326
- Period oscilacija talasa 297
- Pfaff-Bilimovičev princip 49
- Poincaré 4
- Poincaré-Cartan-ova integralna invarijanta 133
- Poincaré-ova integralna invarijanta 133
- Poiseuille-ev zakon 350
- Poisson 4
- Poisson-ova teorema 117
- Poisson-ove zgrade 114
 - invarijantnost 130
 - osnovne 115
 - osobine 115
 - za kontinuirane sisteme 397
- Poisson-ov koeficijent elastičnosti 286
- Pol krutog tela 189
- Polje, brzine fluida 310

-- elementarnih pomeranja, Euler-ov metod 398
 -- -- Lagrange-ev metod 255
 -- fizičko 391, 399
 -- gustine fluida 310
 -- pritiska fluida 310
 Pomeranja, moguća 44
 -- virtuelna 44
 Poredjenje mehanike sistema i mehanike fluida 319
 Postulat o postojanju inercijalnih sistema 5
 Postulati sile 24
 Potencijal, brzine 330
 -- sila 32
 -- ubrzanja 320
 -- uopšteni 78
 Precesija, pseudoregularna 232
 -- regularna 230
 Presek rasejanja efikasn 186
 Princip, akcije i reakcije 2, 24
 -- Appell-ov 49
 -- d'Alembert-Lagrange-ev 49, 51
 -- -- primena 52, 61, 77
 -- -- u generalisanim koordinatama 78
 -- dejstva sile 2
 -- Euler-Lagrange-ev najmanjeg dejstva 361
 -- Gauss-ov 49
 -- Hamilton-ov 49, 97, 106
 -- Helmholtz-ov 49
 -- Hertz-ov 49
 -- inercije 2, 5, 23
 -- Jacobi-ev 49
 -- kauzalnosti mehanički 54
 -- Lagrange-ev mogućih pomeranja 49, 51
 -- Maupertuis-Lagrange-ev 49, 99
 -- mehanike opšti 49
 -- Pfaff-Bilimovičev 49
 -- relativnosti Galilei-ev (ili klasični) 6, 28
 -- superpozicije 24
 -- termodinamike prvi 280

Principi mehanike, diferencijalni 49
 -- integralni 49
 -- Newton-ovi 2
 -- postulati sile 24
 Pritisak fluida 311
 -- dinamički 406
 -- statički 406
 Problem, Ciołkovskog 247
 -- Kepler-ov 139, 173, 178
 Proizvod inercije 206
 Promena brzine, konvektivna 321
 -- lokalna 321
 -- totalna (supstancijalna) 321
 Promenljive, dejstva 142
 -- Euler-ove 254
 -- kanonske 102, 120, 394
 -- -- združene 109
 -- Lagrange-eve 254
 -- ugaone 143
 Prostor, apsolutni 1, 4
 -- fazni 110
 -- konfiguracioni 93
 Proticanje viskoznog fluida kroz cevi 348
 -- kružno stacionarno 403
 -- pravolinijsko-paralelno 406
 Putanja čestice 8
 Put sistema, pravi 92
 -- zaobilazni (okolni) 92
 Rad sila 29
 -- pri pomeranju krutog tela 213
 -- u generalisanim koordinatama 74
 Rasejanje čestica 183
 -- odredjivanje ugla skretanja 185
 Reakcije, idealne 46
 -- neidealne 46
 Reynolds-ov broj 351
 Rezonancija 151
 Rodrigues-ov obrazac 197
 Rotacija 142
 -- krutog tela 193
 -- -- elementarna 197
 -- -- konačna 195

Sila 23
 -- aktivna 45
 -- centralna 168
 -- centrifugalna 237
 -- -- u širem smislu 237
 -- Coriolis-ova 237
 -- disipativna 33
 -- efektivna 45
 -- generalisana 74
 -- girokopska 33
 -- inercije fiktivna 50
 -- konzervativna 31, 36
 -- potencijalna 32, 75
 -- -- sa uoštenim potencijalom 78
 -- prenosna 237
 -- reakcije 45
 -- reaktivna 246
 -- trenja 47
 Sile, električne 25, 281
 -- elektromagnetne 25
 -- gravitacione 25
 -- inercijalne 25, 236
 -- osnovni tipovi uzajamnog dejstva 26
 -- površinske 252, 266
 -- prave 25
 -- spoljašnje 37, 266
 -- unutrašnje 37, 266
 -- zapreminske 252, 265
 Sistem, čestica, degenerisan 121
 -- -- holonoman 42
 -- -- izolovan (zatvoren) 26
 -- -- konzervativan 31
 -- -- neholonoman 42
 -- -- neizolovan 26
 -- -- neslobodan 41
 -- -- slobodan 41
 -- integrala kretanja, u involuciji 117
 -- -- zatvoren 117
 -- jednačina potpun, za deformabilne sredine 280
 -- -- za fluide 322
 -- koordinatni, centra masa 178
 -- -- inercijalni 5

-- -- laboratorijski 178
 -- -- neinercijalni 236
 Sistemi, jedinica 3
 -- koordinatni 7, 17
 Slobodan pad na Zemlji 241
 Smisao, divergencije hidrodinamički 315
 -- rotora, hidrodinamički 316
 -- -- kod krutog tela 202
 Snaga 30
 Stanje naponsko 267
 -- elastičnog tela 281
 -- idealnog fluida 310
 -- viskoznog fluida 342
 Statika 1
 Steiner-ova teorema 208
 Sudar čestica elastičan 178
 -- brzine posle sudara 178
 -- gubitak energije 182
 Tačka materijalna 8
 Talas, kompresioni (bezzvrtložni) 292
 -- longitudinalni 293
 -- površinski 299
 -- ravan 292
 -- -- harmonijski (monohromatski) 296
 -- sferni 297
 -- stojeći 297
 -- transverzalni 293
 -- vrtložni (ekvivolumni) 292
 Talasna dužina 297
 Talasni broj 296
 Talasni vektor 296
 Talasno prostiranje malih poremećaja 290
 -- u fluidu 338
 -- u žici 303
 Telo, deformabilno 251
 -- elastično 281
 -- kruto 189
 -- -- odredjivanje položaja 189
 -- -- osnovno (promenljiva masa) 243
 Tenzor, brzine deformacije 264
 -- deformacije 260
 -- -- smisao komponenata 260

- elementarnog pomeranja 257
- Gauss-ova teorema 271
- inercije 210, 217
- -- svojstveni problem 218
- kao operator 216
- lokalni 400
- napona 269
- -- elastičnog tela 283
- -- idealnog fluida 312
- -- simetričnost 275
- -- viskoznog fluida 343
- Teorema, Chasles-ova 195
- Emmy Noether 100
- -- generalisana 366
- -- primena na dobijanje zakona održanja 100, 367
- Euler-ova 194
- Helmholtz-ova, druga 337
- -- osnovna 258
- -- prva 336
- -- treća 338
- Jacobi-eva 139
- Lejeune-Dirichlet-ova 159
- Poisson-ova 117
- Steiner-ova 208
- Thomson-ova 334
- Torricelli-eva 329
- Thomson-ova teorema 334
- Torricelli-eva teorema 329
- Trajektorija čestice 8
- Transformacije, Galilei-eve 6
- kanonske 124, 126
- -- generalisane 381
- -- infinitezimalne 127
- kontaktne 369
- Legendre-ove 369
- -- primena na mehaniku 370
- ortogonalne 192
- punktualne 353
- Translacija krutog tela 193
- Ubrzanje, centripetalno 203
- Coriolis-ovo 235
- čestice 11
- -- komponente 12
- -- pri relativnom kretanju 235

- -- prirodne komponente 13
- -- projekcije na gener. koord. ose 19
- konvektivno 321
- lokalno 321
- normalno 14
- prenosno 235
- relativno 234
- tačke krutog tela 203
- tangencijalno 14
- Udar talasni 168
- Ugao, nutacije 190
- precesije 190
- rotacije 190
- Uslov nestišljivosti sredine 277
- stabilne ravnoteže 159
- Uslovi, granični 252
- konzistentnosti veza 377
- početni 53, 252
- Uticaj pograničnog sloja 351
- Valentnost kanonske transformacije 381
- Varijacija, generalisane koordinate 74, 94
- -- totalna (asinhrona) 95
- -- -- u opštem smislu 355
- Hamilton-ovog dejstva 97
- -- opšta (sa promenljivim graničama) 132
- -- totalna (asinhrona) 358
- izvoda generalisane koordinate 95
- -- totalna (asinhrona) 357
- Vektor, elementarne rotacije 198
- gustine fluksa mase 276
- položaja 7
- talasni 296
- Verzor konačne rotacije 197
- Veze, holonomne (konačne) 42
- idealne 46
- neholonomne (diferencijalne) 42
- nestacionarne (reonomne) 42
- primarne 375
- prve i druge klase 378
- sekundarne 378
- stacionarne (skleronomne) 42

- zadržavajuće 42
- Viskoznost 309, 341
- Vreme apsolutno 1, 4
- Zagrade, Lagrange-eve 130
- Poisson-ove 114
- -- invarijantnost 130
- -- osnovne 115
- -- osobine 115
- -- za kontinuirane sisteme 397
- Zakon, Arhimed-ov 326
- Hooke-ov 287
- -- generalisan 283
- impulsa 37
- -- za prinudno kretanje 48
- Kepler-ov, drugi 169
- -- prvi 174
- -- treći 176
- kinetičke energije 36
- -- za prinudno kretanje 48
- momenta impulsa 40
- -- za prinudno kretanje 48

- Navier-Stokes-ov 343
- Newton-ov, gravitacije 25
- -- za viskozne fluide 341, 343
- održanja, generalisane energije 85
- -- impulsa 38, 87, 101
- -- mehaničke energije, deformabilne sredine 279
- -- -- idealnog fluida 405
- -- -- sistema čestica 36, 86, 404
- -- -- za prinudno kretanje 48
- -- momenta impulsa 41, 89
- Pascal-ov 326
- Poiseuille-ev 350
- promene mehaničke energije, deformabilne sredine 279
- -- idealnog fluida 405
- -- sistema čestica 404
- puta
- Zakoni dinamike opšti 35
- Young-ov modul elastičnosti 286