

FIZIČKI FAKULTET UNIVERZITET U BEOGRADU

Laboratorija fizike 1 i 2

- pomoćni udžbenik -

dr Djordje Spasojević

Beograd, 2008.

Djordje Spasojević
LABORATORIJA FIZIKE 1 i 2 – pomoćni udžbenik

Recenzenti: Prof. dr Dragomir Krpić i Prof. dr Stevan Djeniže.

Predgovor

Udžbenik sadrži opis i uputstva za izvođenje studentskih eksperimenata postavljenih tokom 2007. godine u okviru predmeta Laboratorije fizike 1 i Laboratorije fizike 2. Eksperimente je koncipirao i postavio Djordje Spasojević. Eksperimenti iz Laboratorije fizike 1 se izvode na aparaturi "Classic Dynamics System" firme Pasco, USA. Za eksperiment "Određivanje odnosa C_p/C_v za vazduh po metodu Clement–Desormes" je iskorišćena postojeća aparatura, za "Određivanje koeficijenta toplotne provodnosti čvrstih tela" aparaturu su projektovali Srdjan Bukvić i Djordje Spasojević, dok je preostale aparature za Laboratoriju fizike 2 projektovao Djordje Spasojević. Najveći deo aparatura su izradili Savo Tekić i Djura Majstorović. Opisi eksperimenata kojima je posvećen ovaj pomoćni udžbenik se ne sadrže u osnovnom udžbeniku PRAKTIKUM IZ FIZIKE Svetozara Božina i grupe autora.

Djordje Spasojević

Sadržaj

	Deo I Laboratorija fizike 1	1
1	Prigušene oscilacije	3
	1.1 Uvod	3
	1.2 Postavka eksperimenta	6
	1.3 Zadatak	8
2	Oscilacije na strmoj ravni	10
	2.1 Uvod	10
	2.2 Zadatak	14
3	Savijanje i oscilacije elastične ploče	16
	3.1 Uvod	16
	3.2 Opis aparature	19
	3.3 Zadatak	19
	3.4 Dodatak: izvodjenje jednačine neutralne linije	21
	Deo II Laboratorija fizike 2	23
4	Određivanje odnosa C_p/C_V za vazduh po metodu Clement-Desormes	25
	4.1 Uvod	25
	4.2 Opis metode	26
	4.3 Postupak pri merenju	27
5	Proveravanje Meksvel-Bolcmanove raspodele	30
	5.1 Uvod	30
	5.2 Zadatak vežbe	31
6	Provera zakona idealnog gasnog stanja	40
	6.1 Uvod	40
	6.2 Zadatak	41

7	Određivanje linearnog koeficijenta termalnog širenja čvrstih tela i gus- tine vode u funkciji temperature	46
7.1	Uvod	46
8	Određivanje specifične toplote, latentne toplote topljenja i latentne toplote isparavanja za vodu	52
8.1	Uvod	52
8.2	Zadatak	54
8.3	Opis aparature	54
8.4	Postupak merenja	56
8.5	Obrada eksperimentalnih podataka	57
9	Određivanje koeficijenta toplotne provodnosti čvrstih tela	60
9.1	Uvod	60
9.2	Zadatak	62

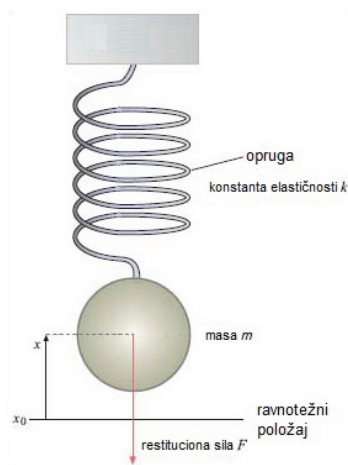
Deo I

Laboratorija fizike 1

1 Prigušene oscilacije

1.1 Uvod

Linearni harmonijski oscilator je sistem koji vrši jednodimenzionalno kretanje (duž x -ose) pod dejstvom rezultujuće sile $F_r = -kx$. Za silu oblika $F = -kx$ se kaže da je *restituciona* jer uvek nastoji da vrati oscilator u ravnotežni položaj $x = 0$. Jednu od najjednostavnijih realizacija linearnog harmonijskog oscilatora dobijamo kada tačkastu masu m okačimo o laku elastičnu oprugu i pustimo je da osciluje duž vertikalnog pravca, slika 1.1.



Slika 1.1 Shematski prikaz linearnog harmonijskog oscilatora.

Linearne harmonijske oscilacije

Orijetišimo x -osu vertikalno **naviše** i ostvarimo kretanje kuglice samo duž ove ose¹. Na kuglicu mase m deluje vertikalno naniže sila zemljine teže $F_g = -mg$ usled koje se opruga isteže. Neka dužina opruge u nedeformisanom stanju iznosi l_0 . Kada je dužina opruge $l \neq l_0$, opruga je deformisana i na njenim krajevima

¹ Ovo se najjednostavnije postiže tako što kuglicu izvedemo vertikalno naniže iz ravnotežnog položaja i pustimo je bez početne brzine.

se javlja elastična sila $F_{el} = k\Delta l$, gde je $\Delta l \equiv l - l_0$ izduženje opruge a k - konstanta elastičnosti opruge. Ova elastična sila deluje na kuglicu te rezultujuća sila na nju iznosi $F_r = k\Delta l - mg$, zbog čega jednačina kretanja kuglice glasi $ma = F_r$. Ravnotežni položaj kuglice je određen uslovom $F_r = 0$, odakle se vidi da će ravnotežna dužina opruge iznositi $l_r = \frac{mg}{k} - l_0$. Obzirom da imamo slobodu izbora koordinatnog početka x -ose, najjednostavniji opis kretanja se dobija kada se taj koordinatni početak postavi u ravnotežni položaj kuglice. Kako je rezultujuća sila $F_r = k\Delta l - mg = k(l - l_r) + k(l_r - l_0) - mg = k(l - l_r)$ to, obzirom na $l - l_0 = x$, gde je x koordinata centra kuglice, konačno daje $F_r = -kx$. Stoga jednačina kretanja kuglice glasi

$$ma = -kx, \quad (1.1)$$

odnosno

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

gde je $\omega_0 \equiv k/m$ - ugaona frekvencija oscilacija. Jednačina (1.2) se naziva jednačinom linearnog harmonijskog oscilatora, a njeno rešenje glasi:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.3)$$

gde je A - amplituda oscilacija, a φ_0 - početna faza oscilovanja². Kako je $\cos(\alpha)$ periodična funkcija ugla α sa periodom 2π , vidimo da je i oscilovanje kuglice periodično u vremenu sa periodom

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (1.4)$$

Recipročna vrednost perioda je *frekvencija* kretanja

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad (1.5)$$

koja predstavlja broj oscilacija kuglice po jedinici vremena. Jedinica za frekvenciju je s^{-1} , ili *herc* (Hz)³.

Oscilovanje kuglice se vrši između dva amplitudna položaja $x = \pm A$ u kojima elongacija $x(t)$ ima maksimalnu apsolutnu vrednost. Amplituda oscilovanja A i početna faza φ_0 su određene početnim uslovima; u najjednostavnijem slučaju kada kuglicu izvedemo vertikalno naniže iz ravnotežnog položaja i pustimo da osciluje bez početne brzine, amplituda je jednaka udaljenju od ravnotežnog položaja a početna faza iznosi $\varphi_0 = -\pi/2$, tako da jednačina kretanja glasi $x(t) = -A \cos(\omega_0 t)$. Brzina oscilovanja $v = dx/dt$ se menja po zakonu

$$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.6)$$

i ima najveću vrednost $v_{max} = \omega_0 A$ pri prolasku kuglice kroz ravnotežni položaj. Kinetička energija kuglice $E_k = mv^2/2$ se tokom vremena menja periodično po zakonu $E_k(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]$, dakle sa

² Veličina $\varphi(t) \equiv \omega t + \varphi_0$ se naziva trenutna faza oscilovanja, a veličina $x(t)$ - elongacija u trenutku vremena t .

³ Jedinica za ugaonu frekvenciju je rad/s.

duplo većom frekvencijom. Analogno tome, potencijalna energija $E_p = kx^2/2$ se menja po zakonu $E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)]$, te (mehanička) energija kretanja $E = E_k + E_p$ ostaje tokom vremena konstantna i iznosi

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 . \quad (1.7)$$

Prigušene oscilacije

Jednom pobudjene, harmonijske oscilacije se periodično ponavljaju u vremenu i traju večno. Sa druge strane, iz običnog života znamo da kuglica neće oscilovati beskonačno dugo i sa konstantnom amplitudom već da će se tokom kretanja njena amplituda smanjivati, te da će se napokon kuglica smiriti u ravnotežnom položaju. Razlog tome je što u realnim sistemima uvek postoje disipativne sile koje dovode do smanjenja mehaničke energije, a koje su u razmatranju harmonijskih oscilacija bile zanemarene. Tako se deo mehaničke energije gubi (pretvara u toplotu) zato što opruga nije idealno elastična. Pored toga, na kuglicu deluje i sila otpora vazduha, koja se opire njenom kretanju kroz vazduh i koja pri malim brzinama ima oblik $F_v = -bv$. Ukoliko ovu silu uzmemo u obzir jednačina kretanja kuglice postaje

$$ma = -kx - bv , \quad (1.8)$$

odnosno

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 = 0 , \quad (1.9)$$

gde je $\beta \equiv b/2m$ - koeficijent prigušenja⁴. Jednačina (1.9) se naziva jednačina prigušenih (linearnih harmonijskih) oscilacija.

Rešenje jednačine prigušenih oscilacija (1.9) zavisi od odnosa ω_0 i β . Pokazuje se da pri slabom prigušenju

$$\beta < \omega_0 , \quad (1.10)$$

rešenje jednačine (1.9) glasi

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) , \quad (1.11)$$

gde je

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (1.12)$$

ugaona frekvencija prigušenih oscilacija; ova frekvencija je manja od *sopstvene* frekvencije neprigušenih oscilacija ω_0 .

Za rešenje (1.11) kažemo da je *kvazi periodično* jer je proizvod jedne periodične funkcije $\cos(\omega t + \varphi_0)$ i jedne aperiodične funkcije

$$A(t) \equiv Ae^{-\beta t} , \quad (1.13)$$

⁴ Koeficijent prigušenja β zavisi od karakteristika sredine u kojoj se vrši oscilovanje i od veličine i oblika oscilatora.

koja pokazuje kako se amplituda oscilacija menja sa vremenom⁵. U skladu sa ovim izrazom, amplituda se tokom jednog perioda smanji

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad (1.16)$$

puta. Veličina $e^{\beta T}$ se naziva *dekrement* prigušenja, a njen prirodni logaritam

$$\lambda = \beta T \quad (1.17)$$

logaritamski dekrement prigušenja; uz to se vreme $\tau = 1/\beta$ potrebno da se amplituda smanji e puta naziva vreme *relaksacije*. Kada je prigušenje malo, tj za $\beta \ll \omega_0$, tada mehanička energija oscilacija opada po zakonu

$$E(t) = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (1.18)$$

gde je E_0 energija u početnom trenutku vremena $t = 0$. Odavde se lako vidi da smanjenje energije tokom jednog perioda $\Delta E \equiv E(t) - E(t+T)$ približno iznosi $\Delta E \approx 2\beta T E(t)$, te se tokom jednom perioda energija u relativnom iznosu smanji

$$\frac{E(t)}{\Delta E} = \frac{1}{2\lambda} \quad (1.19)$$

puta. Od značaja je i *faktor dobrote* (ili *faktor kvaliteta*) oscilatora⁶

$$Q \equiv 2\pi \frac{E}{P}, \quad (1.20)$$

gde je $P \equiv \Delta E/T$ *snaga gubitaka* oscilatora; na osnovu prethodnog on iznosi

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (1.21)$$

1.2 Postavka eksperimenta

Slika aparature koju koristimo za proučavanje prigušenih oscilacija je data na slici 1.2, njena shema na slici 1.3, a osnovne komponente na slici 1.4.

Oscilacije vrši telo - nosač tegova čiju masu dodavanjem tegova možemo menjati. Masa tela se zajedno sa dodatim tegovima meri na digitalnoj vagi koja nije

⁵ Kompletnosti radi, navedimo da je pri jakom prigušenju $\beta > \omega_0$ kretanje *aperiodično*

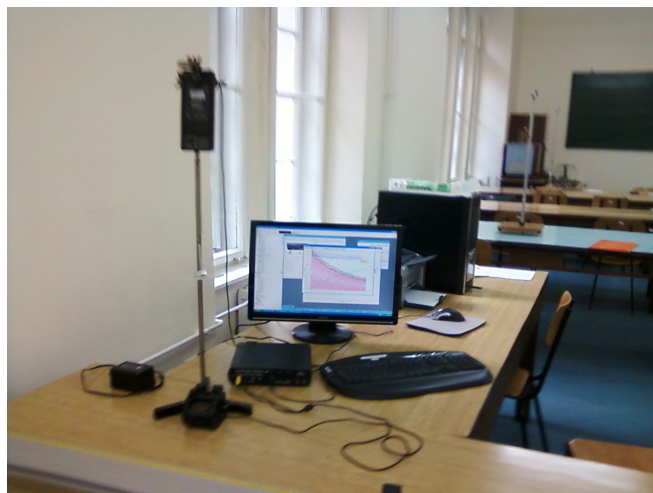
$$x(t) = -\frac{v_0 + \omega_- x_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \exp(-\omega_+ t) + \frac{v_0 + \omega_+ x_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \exp(-\omega_- t), \quad (1.14)$$

gde su x_0 i v_0 početni položaj i početna brzina a $\omega_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, dok je pri *kritičnom prigušenju* $\beta = \omega_0$

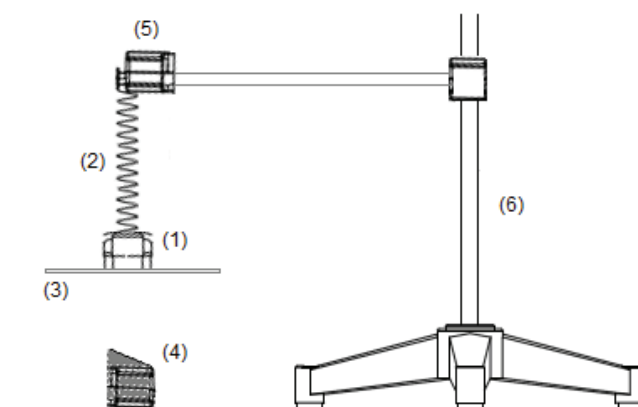
$$x(t) = [x_0(1 + \omega_0 t) + v_0 t] e^{-\omega_0 t}, \quad (1.15)$$

a za kretanje se kaže da je *kritično aperiodično*. Kako se za velike t aperiodično rešenje ponaša kao $x(t) \sim \exp(-\omega_- t)$, i kako su $\omega_- = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ i $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ manji od ω_0 , to se sistem najbrže vraća u ravnotežno stanje pri kritično aperiodičnom kretanju.

⁶ Pokazuje se da ova veličina određuje širinu na polovini visine rezonantne krive oscilatora.



Slika 1.2 Slika aparature za proučavanje prigušenih oscilacija; proizvođač – firma Pasco, USA.



Slika 1.3 Shematski prikaz aparature za proučavanje prigušenih oscilacija. (1) - telo koje osciluje, (2) - opruga, (3) - krilce da se uveća otpor vazduha, (4) - senzor položaja, (5) - senzor sile, (6) - stativ. Senzori položaja i sile su priključeni na sistem za prikupljanje podataka koji nije prikazan na slici.

prikazana na slici 1.2. Na dnu tela se nalazi krilce - lagani homogeni disk prečnika oko 10cm, koji služi da se uveća optor vazduha pri kretanju. Telo je okačeno na izabranu oprugu iz seta opruga, pa preko nje na o senzor sile. Položaj tela se meri senzorom položaja postavljenim tačno ispod tela. Senzori položaja i sile su priključeni na sistem za prikupljanje podataka i dalje na personalni računar.



Slika 1.4 Osnovne komponente aparature se dve prethodne slike. (1) – sistem za prikupljanje (akviziciju) podataka; (2) – senzor sile; (3) – senzor pozicije; (4) – senzor ubrzanja.

1.3 Zadatak

Prvi deo eksperimenta se izvodi uz pomoć prisutnog nastavnika i posvećen je upoznavanju sa osnovnim karakteristikama:

- senzora položaja,
- senzora sile,
- sistema za prikupljanje podataka,
- programskog paketa za obradu eksperimentalnih podataka.

U drugom delu eksperimenta, posvećenom proučavanju prigušenih oscilacija, potrebno je uz pomoć nastavnika izvršiti sledeće:

1. Kalibrisati oprugu, tj. odrediti njen koeficijent elastičnosti k . U tom cilju senzorom položaja izmeriti položaj opruge x u funkciji sile F merene senzorom sile. Pre svakog merenja potrebno je obezbediti da sistem miruje u ravnotežnom položaju. Prvo merenje vršiti bez dodatnih tegova, a zatim postepeno dodavati tegove. Nacrtati grafik sile F u funkciji položaja x . Fitovati eksperimentalne podatke na pravu liniju $F = a + bx$. Odsečak ove prave je $a = F_0 + kx_0$, gde je F_0 izmerena sila a x_0 izmerena pozicija neopterećenog sistema (tj. bez dodatnih tegova). Nagib prave je $b = -k$, te iz njega odrediti konstantu elastičnosti opruge k .
2. Posmatrati kvazi-periodične prigušene oscilacije sistema duž vertikalnog pravca. Da se to obezbedi treba izvesti sistem iz ravnotežnog položaja duž vertikale i pustiti ga bez početne brzine. Pozicija sistema se meri senzorom pozicije, koji takodje meri i brzinu i ubrzanje posmatranog tela.
3. Nacrtati grafik zavisnosti pozicije i brzine oscilovanja od vremena uz pomoć programskog paketa.

-
4. Poziciju sistema x , snimljenu u funkciji vremena t , fitovati uz pomoć programskog paketa na zakon

$$x(t) = x_0 + Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

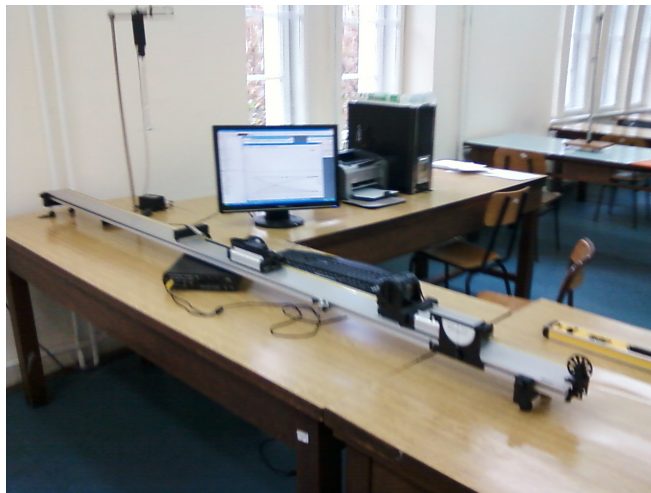
te tako odrediti frekvenciju ω i period T oscilovanja, kao i koeficijent prigušenja β ; uporediti ω sa frekvencijom slobodnih oscilacija $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, gde je m masa sistema.

5. Uz pomoć programskog paketa odrediti kinetičku energiju $E_k(T)$, potencijalnu energiju $E_p(t)$ i mehaničku energiju $E(t)$ i nacrtati odgovarajuće grafike.
6. Odštampati sve nacrtane grafike.

2 Oscilacije na strmoj ravni

2.1 Uvod

Traka sa kolicima, slika 2.1, je jedan od najfleksibilnijih sistema za izučavanje dinamike jednodimenzionalnog kretanja. Ona omogućava izvodjenje većeg broja eksperimenata kao što su: provera II Njutnovog zakona, izučavanje ubranog kretanja niz strmu ravan, održanje impulsa i energije, izučavanje elastičnih i neelastičnih sudara, itd.

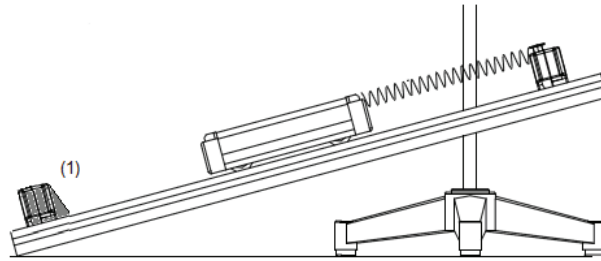


Slika 2.1 Traka sa kolicima (Classic Dynamics System 2.2m firme Pasco, USA).

U eksperimentu o kojem ćemo govoriti se posmatraju oscilacije kolica po nagutoj traci za kretanje, slika 2.2.

Ako se kolica, povezana oprugom za gornji deo trake, izvedu iz ravnotežnog položaja i puste ona počinju da vrše oscilatorno kretanje. Postavimo x -osu duž trake i usmerimo je ka njenom gornjem delu. Po II Njutnovom zakonu, jednačina kretanja kolica duž x -ose glasi:

$$ma = F_x^{(res)} \quad (2.1)$$



Slika 2.2 Traka sa kolicima postavljena u nagnut položaj za izučavanje oscilacija kolica; pozicija kolica se meri senzorom položaja (1).

gde je m – masa kolica, $a = \ddot{x}$ – ubrzanje kolica duž x -ose, dok je $F_x^{(res)}$ projekcija rezultujuće sile na x -osu. Na kolica deluju:

1. sila zemljine teže mg vertikalno naniže,
2. elastična sila opruge $F_{el} = k\Delta l$, gde je k – konstanta elastičnosti opruge dok je Δl - istezanje opruge (razlika tekuće dužine opruge l i dužine opruge l_0 u neistegnutoj stanju); ova sila nastoji da smanji dužinu opruge i u posmatranom sistemu ima pravac i smer x -ose (jer ćemo se ograničiti na kretanje pri kojem je opruga stalno nategnuta).
3. sila trenja kotrljanja F_{tr} koja se opire kotrljanju točkova kolica. Dok se kolica kreću, vektor ove sile ima isti pravac a suprotan smer u odnosu na vektor brzine, dok je intenzitet sile jednak μQ , gde je μ - **efektivni** koeficijent trenja kotrljanja, dok je težina kolica Q na strmoj ravni jednaka normalnoj komponenti sile zemljine teže $mg \cos \alpha$. Stoga možemo pisati $F_{tr} = -\frac{v}{|v|} \mu mg \cos \alpha$, gde je $v = \dot{x}$ brzina kolica duž x -ose, a $\frac{v}{|v|} = \pm 1$ njen znak. Kada kolica miruju, vučna sila¹ je uravnotežena statičkom silom trenja kotrljanja.
4. zanemarujemo ostale sile koje deluju na kolica (npr silu potiska, silu otpora vazduha tokom kretanja kolica, ...) .

Da je trenje kotrljanja zanemarljivo kolica bi vršila linearne harmonijske oscilacije. Zaista, nakon uvrštavanja uslova mirovanja ($a=0$) i izraza za rezultujuću silu, jednačina (2.1) postaje

$$0 = -mg \sin \alpha + k\Delta l \quad (2.2)$$

odakle nalazimo ravnotežno izduženje opruge

$$\Delta l_r = \frac{mg \sin \alpha}{k} . \quad (2.3)$$

U eksperimentu snimamo rastojanje kraja kolica od senzora pozicije i ova veličina određuje položaj kolica. Koristeći slobodu izbora, **koordinatni početak x -ose**

¹ Vučna sila je projekcija na pravac kretanja sume svih sila osim sile trenja.

postavljamo u ravnotežni položaj kraja kolica². Nakon toga, izduženje opruge se može napisati kao $\Delta l = \Delta l_r - x$, gde veličina x pretstavlja x -koordinatu kraja kolica u odnosu na izabrani koordinatni početak. Sledi:

$$F_x^{(res)} = -mg \sin \alpha + k\Delta l = (-mg \sin \alpha + k\Delta l_r) - kx = -kx$$

tako da jednačina (2.1) postaje

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (2.4)$$

što pretstavlja jednačinu linearnih harmonijskih oscilacija sa kružnom frekvencijom

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.5)$$

i periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (2.6)$$

Amplituda i energija ovih oscilacija se ne smanjuju sa vremenom, a potencijalna energija se može napisati u obliku

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.7)$$

Kada se trenje kotrljanja ne može zanemariti, a to je naš slučaj, jednačina kretanja kolica³ pri kretanju u pozitivnom smeru x -ose glasi

$$m\ddot{x} = -kx - \mu Q \quad (2.8)$$

jer je tada znak brzine pozitivan, dok je pri kretanju u negativnom smeru

$$m\ddot{x} = -kx + \mu Q. \quad (2.9)$$

Jednačina (2.8) opisuje linearne harmonijske oscilacije. Zaista, nakon transformacije

$$m\ddot{x} = -kx - \mu Q = -k(x + \mu Q/k)$$

ona se, prelaskom na nove koordinate

$$x^{(+)} \equiv x + \mu Q/k, \quad (2.10)$$

svodi na jednačinu linearnih harmonijskih oscilacija

$$m\ddot{x}^{(+)} = -kx^{(+)} \quad (2.11)$$

² Koordinatni početak možemo izabrati kako nam odgovara i taj izbor ne utiče na jednačine kretanja.

³ Uslov mirovanja kolica glasi $0 = -mg \sin \alpha + k\Delta \tilde{l}_r + F_{tr}$, gde je $\Delta \tilde{l}_r$ ravnotežno istezanje opruge. Odatle, umesto jednačine, nalazimo nejednačinu $mg \sin \alpha - \mu Q \leq k\Delta \tilde{l}_r \leq mg \sin \alpha + \mu Q$ koju zadovoljava $\Delta \tilde{l}_r$. Posledica je da $\Delta \tilde{l}_r$ može uzeti bilo koju od dozvoljenih vrednosti. Konkretna vrednost koju će uzeti $\Delta \tilde{l}_r$ zavisi od predistorije sistema. U prvom trenutku kada brzina padne na nulu a istezanje opruge zadovolji gornju jednakost sila trenja kotrljanja će uravnotežiti vučnu silu, ubrzanje će pasti na nulu, te kretanje prestaje – tj trenutni položaj postaje položaj indiferentne ravnoteže.

oko privremenog ravnotežnog položaja⁴

$$x_r^{(+)} = -\frac{\mu Q}{k}. \quad (2.12)$$

Potpuno analogno jednačina (2.9), koja opisuje kretanje u negativnom smeru x-ose, se prelaskom na nove koordinate

$$x^{(-)} \equiv x - \mu Q/k, \quad (2.13)$$

svodi na jednačinu linearnih harmonijskih oscilacija

$$m\ddot{x}^{(-)} = -kx^{(-)} \quad (2.14)$$

oko drugog privremenog ravnotežnog položaja

$$x_r^{(-)} = +\frac{\mu Q}{k}. \quad (2.15)$$

Kružna frekvencija i period oba tipa oscilacija su jednaki kružnoj frekvenciji (2.4) i periodu (2.5), respektivno.

Detaljniji uvid dobijamo ako pratimo kretanje kolica nakon što ih izvedemo iz ravnotežnog položaja **niz** strmu ravan i pustimo bez početne brzine. Tada će kolica početi da se kreću naviše, dakle u pozitivnom smeru x-ose. U $x^{(+)}$ -koordinatama kretanje je dato sa

$$x^{(+)}(t) = -A_1 \cos \omega t$$

dok u “starim” x -koordinatama isto kretanje glasi

$$x(t) = -A_1 \cos \omega t - \mu Q/k. \quad (2.16)$$

Na navedeni način kolica se kreću u prvom poluperiodu $T_{1/2}=T/2$, tokom kojeg je njihova brzina sve vreme pozitivna. U momentu $t = T_{1/2}$, kada je njihov položaj dat sa $x(T_{1/2}) = A_1 - \mu Q/k$, kolica se trenutno zaustavljaju pa odmah nastavljaju da se kreću, ali sada u **negativnom** smeru x-ose ($v < 0$). Kretanje kolica u drugom poluperiodu se vrši u skladu sa jednačinom (2.13); stoga je

$$x^{(-)}(t) = -A_2 \cos \omega t,$$

odnosno

$$x(t) = -A_2 \cos \omega t + \mu Q/k, \quad (2.17)$$

uz bitnu napomenu da se amplituda promenila. Novu amplitudu A_2 možemo naći iz uslova da u trenutku $t=T_{1/2}$, kada je $\cos \omega T_{1/2} = -1$, obe formule (2.15) i (2.16) daju isti rezultat:

$$A_1 - \mu Q/k = A_2 + \mu Q/k,$$

⁴ Ovo je ravnotežni položaj u ne-transformisanim x -koordinatama; u novim koordinatama je ravnotežni položaj naravno na nuli jer je koordinatni početak novih koordinata smešten u ravnotežni položaj.

odakle je

$$A_2 = A_1 - 2\mu Q/k. \quad (2.18)$$

Nakon drugog poluperioda, kretanje se ponavlja na sličan način. Nakon što se trenutno zaustave, kolica odmah nastavljaju da se kreću u pozitivnom smeru. Ova etapa kretanja je u skladu sa jednačinom (2.10) pri čemu amplituda ima novu vrednost $A_3 = A_2 - 2\mu Q/k$. Zatim nastupa sledeći period u kojem se kolica kreću u negativnom smeru u skladu sa jednačinom (2.12) i sa amplitudom $A_4 = A_3 - 2\mu Q/k$, itd. Možemo zaključiti da:

1. smanjenje amplitude između n -tog i $(n+1)$ -vog poluperioda iznosi

$$A_{n+1} = A_n - 2\mu Q/k, \quad (2.19)$$

2. konačna jednačina kretanja u n -tom poluperiodu glasi:

$$x(t) = -A_n \cos \omega t + (-1)^n \mu Q/k, \quad (2.20)$$

što predstavlja oscilacije oko privremenih ravnotežnih položaja $\pm \mu Q/k$,

1. brzina kretanja u n -tom poluperiodu glasi:

$$v(t) = \omega A_n \sin \omega t. \quad (2.21)$$

2. Kretanje kolica prestaje kada se ispune uslovi navedeni u fusnoti 4.

Iz prethodnih izraza možemo naći kako se mehanička energija $E = E_k + E_p$ menja u toku vremena. Potencijalnu energiju je i dalje pogodno računati u odnosu na koordinatni početak; označavajući sa t' vreme mereno od početka tekućeg poluperioda, možemo se uveriti da je

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} \left[A_n^2 \cos^2 \omega t' + \frac{2\mu Q A_n}{k} \cos \omega t' + \left(\frac{\mu Q}{k} \right)^2 \right], \quad (2.22)$$

dok je $E_k = \frac{m\omega^2}{2} A_n^2 \sin^2 \omega t'$. Stoga mehanička energija zavisi od vremena kao

$$E = \frac{k}{2} A_n^2 + \mu Q A_n \cos \omega t' + \frac{(\mu Q)^2}{2k}, \quad (2.23)$$

gde smo iskoristili $m\omega^2 = k$. Unutar svakog poluperioda je $0 \leq t' \leq T_{1/2}$, te $\cos \omega t'$ opada. Smanjenje amplitude između dva susedna poluperioda potiče od trenja pri kotrljanju.

2.2 Zadatak

NAPOMENA: Eksperimentu je moguće pristupiti nakon eksperimenta "Prigušene oscilacije" u okviru kojeg se student upoznao sa osnovnim karakteristikama aparature traka sa kolicima i pratećeg programskog paketa.

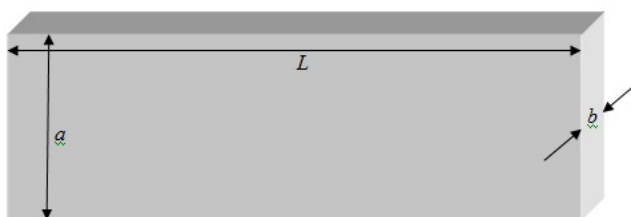
U cilju proučavanja oscilovanja kolica na strmoj ravni izvršićemo sledeća merenja:

1. Izmerimo masu kolica (bez opruge) i masu opruge na digitalnoj vagi.
2. Preko kalibrisane opruge povezati kolica za gornji kraj strme ravni i posmatrati njihovo oscilovanje na strmoj ravni snimajući položaj kolica senzorom pozicije u funkciji vremena. Fitovanjem snimljene pozicije **deo po deo** odrediti kako se menja amplituda oscilovanja u funkciji rednog broja poluperioda i kakvi su privremeni položaji ravnoteže. Uveriti se da se od tekućeg do narednog poluperioda amplituda linearno smanje u skladu sa (2.19) te odrediti efektivni koeficijent trenja kotrljanja μ . Proveriti da li je razlika privremenih položaja ravnoteže jednaka $2\mu Q/k$. Odrediti ravnotežni položaj u kojem bi bila kolica kada ne bi bilo trenja kotrljanja. Zatim kalkulator funkcijom programskog paketa naći kako se tokom vremena menjaju kinetička i potencijalna energija kolica, kao i njihov zbir tj mehanička energija kolica. Izračunati rad trenja kotrljanja u funkciji vremena i proveriti da li je njegov zbir sa mehaničkom energijom kolica približno konstantan.
3. Odštampati sve nacrtane grafike.

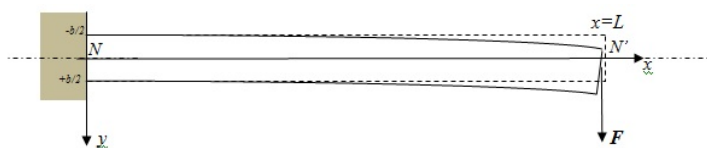
3 Savijanje i oscilacije elastične ploče

3.1 Uvod

Savijanje elastične ploče je jedan od mogućih vidova njenih deformacija. Neka nedeformisana tanka ploča ima oblik kvadra dužine L , širine a i debljine b ($b \ll a < L$) - slika 3.1. Neka je ploča na jednom kraju učvršćena - slika 3.2, dok je drugi kraj ploče slobodan. Ravan simetrije ploče, normalna na debljinu b , se na slici 3.2 vidi kao duž NN' .



Slika 3.1 Nedeformisana ploča.



Slika 3.2 Savijena ploča.

Ploča se savija silom F koja deluje na njen slobodni kraj, paralelno debljini b . Duži paralelne širini ploče se ne deformišu i ostaju paralelne širini ploče. Duži paralelne dužini ploče se krive. One sve menjaju dužinu, osim duži iz ravni simetrije koje se samo krive ne menjajući dužinu. Stoga se za liniju NN' kaže da je *neutralna*. Konačno, duži paralelne visini ploče ne menjaju dužinu, ali menjaju pravac ostajući normalne na neutralnu liniju.

Uvedimo koordinatu x duž neutralne linije pre savijanja, y koordinatu usmerimo duž sile F , a koordinatni početak postavimo u tačku N - slika 3.2. U ovom

sistemu koordinata jednačina neutralne linije (vidi dodatak) pri malim deformacijama glasi

$$y(x) = \frac{6F}{EAb^3}x^2 \left(L - \frac{x}{3} \right), \quad (3.1)$$

odakle pomeranje y kraja ploče ($x = L$) pod dejstvom sile F iznosi

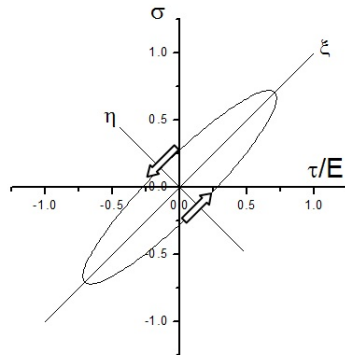
$$y = \frac{4L^3}{Eab^3}F. \quad (3.2)$$

Neka je na kraj ploče pričvršćena masa M znatno veća od mase ploče. Kada se masa izvede iz ravnotežnog položaja pomeranjem u **horizontalnoj** ravni i pusti, javiće se prugušene oscilacije. Prigušenje nastaje prvenstveno usled elastičnog histerezisa u materijalu ploče.

Za idealno elastičan materijal je relativna deformacija $\sigma = \tau/E$, gde je τ tangencijalni napon, a E modul elastičnosti materijala ploče. Za realne materijale σ kasni, te se javlja histerezisna petlja - slika 3.3. Kada se deformacija i napon menjaju **harmonijski** petlja je elipsa. Veličina:

$$\varepsilon = \frac{\text{dužina male ose elipse}}{\text{dužina velike ose elipse}} \quad (3.3)$$

je parametar histerezisa koji zavisi od frekvencije. Površina elipse je proporcionalna gubitku energije usled histerezisa tokom jednog ciklusa.



Slika 3.3 Shematski prikaz histerezisa materijala; τ je napon, E je modul elastičnosti, σ je relativna deformacija.

Kada je ploča savijena tada, na osnovu formule (3.2), na pričvršćenu masu deluje sila

$$F = \frac{Eab^3}{4L^3}y \quad (3.4)$$

koja se javlja usled elastičnih napona u ploči; ova sila igra ulogu restitutionone sile za kretanje mase M . Stoga bi jednačina **neprigušenih** oscilacija glasila:

$$M\ddot{y} = -\frac{Eab^3}{4L^3}y, \quad (3.5)$$

na osnovu čega bi sopstvena ugaona frekvencija oscilacija iznosila

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Eab^3}{4ML^3}}. \quad (3.6)$$

Zbog histerezisnih gubitaka u materijalu ploče oscilacije su prigušene. Da bi uzeli u obzir efekte histerezisa, uvedimo koordinatu ξ duž velike, a koordinatu η duž male ose histerezisne elipse, slika 3.3. Pri harmonijskom kretanju sa ugaonom frekvencijom ω ove veličine se menjaju po zakonu

$$\xi = A \cos(\omega t), \quad \eta = \varepsilon A \sin(\omega t). \quad (3.7)$$

gde je A velika, a εA mala poluosa elipse. Kako je

$$\frac{\tau}{E} = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}, \quad \sigma = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad (3.8)$$

na osnovu slike 3.3, to je pri malom $\varepsilon \ll 1$ ispunjeno

$$\frac{\tau}{E} \approx \sigma + 2 \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sigma. \quad (3.9)$$

gde je uzeto u obzir i da je $\omega \approx \omega_0$ pri malom ε .

Na osnovu izraza (3.4), na slobodnom kraju ploče je

$$\tau = \frac{-F}{ab}, \quad \sigma = \frac{b^2}{4L^3} y, \quad (3.10)$$

gde je F sila koja deluje na masu $>$. Odavde nalazimo da jednačina kretanja $M\ddot{y} = F$ mase M približno glasi

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (3.11)$$

što je jednačina prigušenih oscilacija. Na taj način period oscilovanja $T = 2\pi/\omega$ iznosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4ML^3}{Eab^3}}, \quad (3.12)$$

odakle se vidi da je kvadrat perioda linearna funkcija kuba dužine:

$$T^2 = \frac{16\pi^2 M}{Eab^3} L^3. \quad (3.13)$$

Nagib prave $T^2 = f(L^3)$ je

$$k = \frac{16\pi^2 M}{Eab^3}, \quad (3.14)$$

te modul elastičnosti E materijala ploče iznosi

$$E = \frac{16\pi^2 M}{kab^3}. \quad (3.15)$$

Tokom prigušenih oscilacija sa slabim prigušenjem amplituda oscilacija se eksponencijalno smanjuje kao $A(t) = A_0 \exp(-\beta t)$, pri čemu je ovde $\beta = \varepsilon\omega_0$. Stoga je n -ta amplituda ($t_n = nT = 2\pi n/\omega_0$) oblika

$$E = \frac{16\pi^2 M}{kab^3} - , \quad (3.16)$$

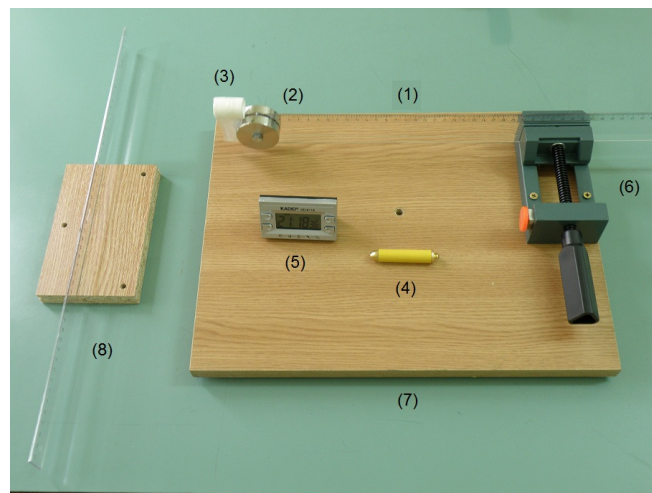
što znači da se snimanjem A_n u funkciji od n i linearizacijom

$$\ln(A_n) = \ln(A_0) - (2\pi\varepsilon)n \quad (3.17)$$

može odrediti parametar histerezisa ε iz koefcijenta pravca ove linearne zavisnosti.

3.2 Opis aparature

Aparatura (slika 3.4) se sastoji iz: plastičnog lenjira (1), mase (2) pričvršćene na lenjir (uzeti vrednost od tehničkog saradnika), postolja za laser (3), lasera (4), digitalnog hronometra (5), stege (6), postolja (7) i lenjira za očitavanje laserskog spota (8). Pored ovoga na raspolaganju su: metarska traka, nonijus i mikrometar.



Slika 3.4 Slika aparature.

3.3 Zadatak

1. Izmeriti parametre lenjira: širinu a i debljinu b . Radi jednostavnijeg pristupa zanemariti suženja debljine lenjira duž skale, tj smatrati da je lenjir kvadar. Širinu a i debljinu b izmeriti na najmanje 5 različitih pozicija na ploči. Rezultate merenje uneti u tabelu 3.1. Na osnovu njih odrediti srednju vrednost za širinu a i debljinu b .
2. Za najmanje 6 izabranih dužina lenjira L izmeriti period oscilacija T . Merenja L vršiti metarskom trakom, a merenja perioda digitalnim hronometrom. Pri svakom L izmeriti 3 puta trajanje $t_{10}^{(i)}$ deset oscilacija, odatle naći srednju

Table 3.1 Širina a i debljina b ploče – zaglavlje tabele.

No.	a [mm]	b [mm]
1		

vrednost $\bar{t}_{10} = (t_{10}^{(1)} + t_{10}^{(2)} + t_{10}^{(3)})/3$, a odatle period $T = \bar{t}_{10}/10$. Proceniti grešku ΔT za T . Podatke uneti u tabelu 3.2

Table 3.2 Merenje perioda oscilacija – zaglavlje tabele.

No.	L [mm]	$t_{10}^{(i)}$ [s]	\bar{t}_{10} [s]	$\Delta\bar{t}_{10}$ [s]	T [s]	ΔT [s]	L^3 [m ³]	T^2 [s ²]	ΔT^2 [s ²]
1									

- Nacrtati grafik zavisnosti $T^2 = f(L^3)$, ucrtati najbolju pravu grafičkom metodom, odrediti njen koeficijent pravca k i odatle izračunati modul elastičnosti E . Proceniti greške za k i E .
- Odrediti k i E metodom najmanjih kvadrata i naći njihove greške; na prethodni grafik ucrtati pravu dobijenu metodom najmanjih kvadrata. Uporediti rezultate dobijene grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata.
- Odrediti parametar histerezeza ε . Pri izabranoj početnoj amplitudi A_0 3 puta izmeriti niz od 10 parnih amplituda $A_2^{(1)}, A_4^{(1)}, \dots, A_{20}^{(1)}$; $A_2^{(2)}, A_4^{(2)}, \dots, A_{20}^{(2)}$; $A_2^{(3)}, A_4^{(3)}, \dots, A_{20}^{(3)}$. Merenja amplituda vršiti očitanjem položaja laserskog spota na (pomoćnom) lenjiru (8) – slika 3.4.

Rezultate merenja uneti u tabelu 3.3, naći $\bar{A}_{2m} = (A_{2m}^{(1)} + A_{2m}^{(2)} + A_{2m}^{(3)})/3$, a zatim i $\ln(\bar{A}_{2m})$.

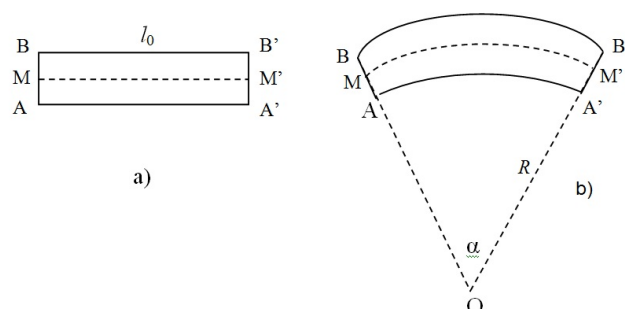
Table 3.3 Merenje parametra histerezeza – zaglavlje tabele.

n	$A_n^{(1)}$ [mm]	$A_n^{(2)}$ [mm]	\bar{A}_n [mm]	$\Delta\bar{A}_n$ [mm]	$\ln(\bar{A}_n)$	$\Delta \ln(\bar{A}_n)$
2						
4						

- Grafički predstaviti zavisnost logaritama srednjih vrednosti $\ln(\bar{A}_{2m})$ od rednog broja amplitude $n = 2m$.
- Ucrtati najbolju pravu grafičkom metodom, odrediti joj koeficijent pravca i na osnovu njega izračunati parametar histerezeza ε . Proceniti greške.
- Isti koeficijent pravca naći metodom najmanjih kvadrata, izračunati parametar histerezeza ε i proceniti greške. Uporediti rezultate dobijene grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata.

3.4 Dodatak: izvodjenje jednačine neutralne linije

Uočimo pre savijanja delić između dva poprečna preseka ploče AB i $A'B'$ – slika 4a; rastojanje l_0 između preseka je veoma mala veličina, a MM' deo neutralne linije između preseka.



Slika 3.5 Delić ploče a) pre savijanja; b) nakon savijanja.

Oblik delića nakon savijanja je dat na slici 4b - to je isečak cilindričnog sloja debljine b , visine a , srednjeg poluprečnika R i ugla iseka α (α je mali ugao); centar sloja je tačka O . Uočimo da je R poluprečnik, a O centar **krivine** za segment MM' neutralne linije. Vredi $l_0 = R\alpha$ jer je luk MM' deo neutralne linije. Uvedimo koordinatu ρ duž radijusa od M ka B ; tački A odgovara $\rho = -b/2$, tački M odgovara $\rho = 0$, a tački B odgovara $\rho = +b/2$. Uočimo pre savijanja duž sa koordinatom ρ , paralelnu neutralnoj liniji; njena dužina je l_0 . Nakon savijanja ova duž postaje luk poluprečnika $R+\rho$ i dužine $l = (R+\rho)\alpha$ obzirom da se ρ usled savijanja ne menja. Stoga je $\Delta l = l - l_0 = \rho\alpha$ apsolutno istezanje, a $\Delta l/l_0 = \rho/R$ relativno istezanje koje igra ulogu relativne deformacije $\sigma \equiv \Delta l/l_0$. Stoga se na krajevima linije javlja napon $\tau = E\Delta l/l_0 = E\rho/R$. Ukupnu elastičnu silu F_e na poprečnom preseku AB nalazimo integracijom napona τ po poprečnom preseku AB

$$F_e = \int \tau dS = \int_{-b/2}^{b/2} E \frac{\rho}{R} a d\rho, \quad (3.18)$$

odakle se nalazi da je elastična sila $F_e = 0$.

Ukupni moment sile koji stvara opisana raspodela elastičnih napona iznosi

$$M_e = \int \rho \tau dS = \frac{Ea}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \rho^2 d\rho = \frac{Eab^3}{12R}.$$

Obzirom da je $F_e = 0$, moment sile ne zavisi od izbora pola u odnosu na koji se računa. U x - y sistemu koordinata, poluprečnik krivine R je

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}, \quad (3.19)$$

gde su y' i y'' prvi i drugi izvod po x jednačine neutralne linije $y = y(x)$. Za male deformacije je $y' \ll 1$, te je $R \approx 1/y''$. Stoga je

$$M_e \approx \frac{Eab^3}{12} y'' . \quad (3.20)$$

Uočimo sada deo ploče od njenog slobodnog kraja pa do poprečnog preseka sa koordinatom x . Na kraju ploče deluje sila F , a na poprečnom preseku elastični naponi nastali delovanjem dela ploče od njenog učvršćenog početka pa do uočenog poprečnog preseka. Kako su deformacije male, x komponente daju rezultantu $F_e = 0$ čiji je moment M_e , dok y komponente napona daju silu F' koja uravnotežava silu F i sa njom obrazuje spreg sila sa momentum $(L - x)F$ koji uravnotežava elastični moment M_e . Tako nalazimo

$$y'' = \frac{12F}{Eab^3} (L - x) . \quad (3.21)$$

Dvostrukom integracijom ovog izraza po x i korišćenjem uslova $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$ dobijamo

$$y(x) = \frac{6F}{Eab^3} x^2 \left(L - \frac{x}{3} \right) , \quad (3.22)$$

što je tražena jednačina neutralne linije savijene ploče.

Deo II

Laboratorija fizike 2

4 Odredjivanje odnosa C_p/C_V za vazduh po metodu Clement-Desormes

4.1 Uvod

Adijabatskim procesom se naziva proces pri kojem posmatrani sistem ne razmenjuje toplotu sa okolinom ($\Delta Q = 0$). Reverzibilne adijabatske promene zapremine (ekspanzija ili kompresija) idelanih gasova kada nema razmene supstance sa okolinom su opisane *jednačinom adijabate*:

$$pV^\gamma = \text{const} , \quad (4.1)$$

gde je p pritisak gasa, V zapremina gasa¹, dok je eksponent adijabate γ veličina koji se naziva *Poasonova konstanta*. Pri tome je

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} , \quad (4.2)$$

gde je C_p molarna specifična toplota gasa pri konstantnom pritisku, dok je C_V molarna specifična toplota gasa pri konstantnoj zapremini².

Eksponent adijabate γ zavisi od vrste gasa. Na osnovu molekularno-kinetičke teorije

$$C_V = \frac{j}{2}R , \quad (4.3)$$

gde je j broj pobudjenih stepeni slobode molekula gasa ($j = 3$ za jednoatomne gasove, dok je za većinu gasova sa dvoatomnim molekulima $j = 5$ pri temperaturama bliskih sobnoj).

¹ Vrednost konstante *const* koja se javlja na desnoj strani jednačine adijabate (4.5) zavisi od "početnih uslova"; ako je V_0 neka zapremina koju je imao gas pri posmatranom procesu, a p_0 pritisak pri toj zapremini V_0 , tada je $\text{const} = p_0 V_0^\gamma$.

² Molarna specifična toplota gasa pri konstantnoj zapremini je brojno jednaka onoj količini toplote ΔQ koju je potrebno dovesti jednom molu gasa da bi mu se temperatura povisila za 1K pri konstantnoj zapremini analogno za C_p , ali pri konstantnom pritisku. Pokazuje se da za idealne gasove vredi $C_p - C_V = R$, gde je $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ univerzalna gasna konstanta.

4.2 Opis metode

Merenje Poasonove konstante γ za vazduh se po Clement-Desormes-ovoj³ metodi vrši na sledeći način. U balon zapremine oko 10 lit se upumpa vazduh pod pritiskom p_1 nešto većim od atmosferskog - vidi sliku 4.1.⁴ Kada se slavina na balonu naglo otvori, vazduh iz balona ističe sve dok se pritisak u balonu ne izjednači sa atmosferskim pritiskom p_a . Isticanje vazduha iz balona je naglo, te se može smatrati adijabatskim. Kada se isticanje vazduha završi, slavina na balonu se zatvori. Tako u balonu preostaje neka količina vazduha za koju se može smatrati da je pre otvaranja slavine zauzimala neku zapreminu V_1 , te da se za vreme dok je slavina bila otvorena adijabatski (kvazi)reverzibilno proširila na celu zapreminu balona V . Stoga je

$$p_1 V_1^\gamma = p_a V^\gamma . \quad (4.5)$$

Pri opisanoj adijabatskoj ekspanziji, vazduh u balonu se hladi te je njegova temperatura niža od sobne u trenutku zatvaranja slavine. Stoga se, nakon zatvaranja slavine, vazduh koji je preostao u balonu greje sve dok ne dostigne sobnu temperaturu. Neka pritisak vazduha zaostalog u balonu tada iznosi p_2 .

Iz istog početnog stanja (p_1, V_1) u isto krajnje stanje (p_2, V) se vazduh zaostao u balonu može prevesti i jednim *izotermskim* procesom, obzirom da su temperature oba stanja iste (tj. jednake sobnoj temperaturi). Stoga je

$$p_1 V_1 = p_2 V . \quad (4.6)$$

Eliminacijom zapremina V i V_1 , iz jednačina (4.5) i (4.6) se dobija

$$\frac{p_2}{p_a} = \left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{1-1/\gamma} . \quad (4.7)$$

Kako je hidrostatički pritisak $\rho g h_1$ mali u odnosu na atmosferski pritisak p_a , i kako je $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha \epsilon$ za $\epsilon \ll 1$, to je

$$\left(\frac{p_1}{p_a} \right)^{1-1/\gamma} \approx 1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\rho g}{p_a} h_1 , \quad (4.8)$$

te uvrštavanjem približnog izraza (4.8) u desnu stranu jednačine (4.7) i nakon neznatnih sredjivanja, konačno nalazimo

$$h_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) h_1 . \quad (4.9)$$

Na osnovu poslednje jednačine, postoji linearna zavisnost $h_2 = a h_1$ izmedju h_2

³ Nicolas Clement-Desormes, francuski naučnik i industrijalac (1779-1848).

⁴ Pritisak p vazduha u balonu se meri otvorenim manometrom:

$$p = p_a + \rho g h , \quad (4.4)$$

gde je p_a atmosferski pritisak, ρ je gustina manometarske tečnosti, dok je h razlika nivoa manometarske tečnosti u kracima manometra.

i h_1 . Koeffcijent pravca a ove zavisnosti je

$$a = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right), \quad (4.10)$$

odakle je Poasonova konstanta

$$\gamma = \frac{1}{1 - a}. \quad (4.11)$$

4.3 Postupak pri merenju

Merenje količnika C_p/C_V se, po metodu Clement-Desromes-a, vrši sledećim **postupkom**:

1. Podesiti slavinu B u položaj 1 u kojem je balon povezan sa pumpicom C, a veza balona sa atmosferom prekinuta.
2. Pumpicom C upumpati nešto vazduha u balon i tako u njemu ostvariti pritisak veći od atmosferskog. Razliku pritisaka kontrolisati posmatranjem razlike nivoa h manometarske tečnosti u kracima manometra A.
Upozorenje: h ne sme da premaši vrednost $h_{\max} = 30$ cm.
3. Nakon što je približno ostvarena željena vrednost h , okretanjem slavine za 90° stepeni u smeru kazaljke na satu dovesti slavinu u položaj 2 u kojem je prekinuta veza balona i sa pumpicom i sa atmosferom. Sačekati dok se h ne ustali, a zatim očitati h na manometarskoj skali D, i tu vrednost uzeti za razliku nivoa h_1 koja odgovara pritisku p_1 .
4. Slavina se **brzo** okrene za 90° stepeni u smeru kazaljke na satu i tako dovede u položaj 3 pri kojem vazduh iz balona može slobodno da ističe u atmosferu. Tada dolazi do adijabatske ekspanzije gasa u balonu tokom koje se pritisak u balonu smanjuje od p_1 do p_a . Tom prilikom, razlika nivoa h opada od vrednosti h_1 do $h = 0$. Usled adijabatske ekspanzije temperatura vazduha u balonu pada ispod sobne temperature.
5. Sačekati nekoliko sekundi dok se nivoi manometarske tečnosti u kracima manometra ne izjednače. Tada je $h = 0$, dok je $p = p_a$. Odmah nakon toga, okretanjem slavine za 90° stepeni u **suprotnom** smeru, **brzo vratiti** slavinu u položaj 2. Pri ovom položaju slavine, balon je zatvoren i ne razmenjuje vazduh sa okolinom.
6. Pošto mu je temperatura niža od sobne, vazduh koji se nalazi u zatvorenom balonu se greje te pritisak u balonu raste. Usled toga raste i h . Prestanak zagrevanja konstatujemo po tome što h , dostigavši svoju maksimalnu vrednost h_2 , prestaje da raste. Da se ovo desi potrebno sačekati od 5 do 10 minuta.

U cilju eksperimentalnog određivanja zavisnosti $h_2 = ah_1$ potrebno je ponoviti korake opisanog postupka za najmanje 6 različitih vrednosti h_1 izabranih u in-

tervalu od 8cm do 26cm. Razliku nivoa h odrediti iz

$$h = h^{(d)} - h^{(l)},$$

gde je $h^{(d)}$ visina stuba manometarske tečnosti u desnom kraku manometra, dok je $h^{(l)}$ visina stuba manometarske tečnosti u levom kraku manometra; $h^{(d)}$ i $h^{(l)}$ se dobijaju očitavanjem na skali manometra.

Podatke dobijene merenjem uneti u tabelu

No.	$h_1^{(d)}$ [mm]	$h_1^{(l)}$ [mm]	$h_2^{(d)}$ [mm]	$h_2^{(l)}$ [mm]	h_1 [mm]	h_2 [mm]
1						

i na osnovu njih izračunati

$$h_1 = h_1^{(d)} - h_1^{(l)}, \quad h_2 = h_2^{(d)} - h_2^{(l)},$$

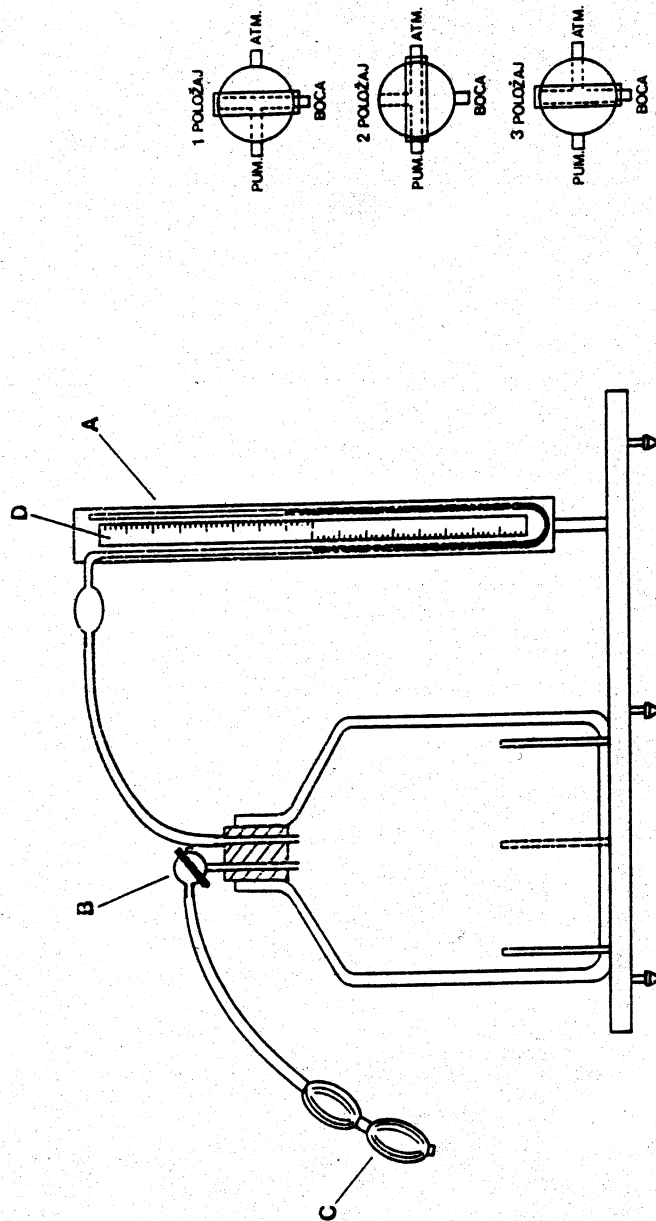
koji se unose u poslednje dve kolone tabele.

Na osnovu podataka iz tabele nacrtati grafik h_2 u funkciji od h_1 . Fitovanjem dobijenog grafika na linearnu funkciju

$$h_2 = ah_1 + b,$$

odrediti metodom najmanjih kvadrata parametre $a \pm \Delta a$ i $b \pm \Delta b$ ove zavisnosti, ucrtati na grafik najbolju pravu, te na osnovu (4.11) odrediti

$$\gamma \pm \Delta\gamma = \frac{1}{1-a} \pm \frac{\Delta a}{(1-a)^2}. \quad (4.12)$$



Slika 4.1 Shematski prikaz aparature.

5 Proveravanje Meksvel-Bolcmanove raspodele

5.1 Uvod

U stanju termodinamičke ravnoteže idealni sistemi^{1,2} identičnih, klasičnih³ i bezstrukturnih⁴ čestica se pokoravaju *Meksvel-Bolcmanovoj raspodeli*

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\epsilon}{k_B T} \right]. \quad (5.1)$$

gde je

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} + \epsilon_p(\vec{r}). \quad (5.2)$$

ukupna energija čestice, jednaka zbiru njene kinetičke energije $\epsilon_k = mv^2/2$ i potencijalne energije $\epsilon_p(\vec{r})$. U izrazu (5.1) smo sa $f(\vec{r}, \vec{v})$ označili *funkciju raspodele*⁵,

- ¹ Idealnim sistemima čestica nazivamo sisteme kod kojih je interakcija čestica sistema zanemarljiva. Stoga je energija idealnih sistema E_N od N čestica zbir $E_N = \sum_{i=1}^N E_1(i)$ jednočestičnih energija $E_1(i)$ pojedinačnih čestica sistema. Čestice sistema mogu da interaguju sa konzervativnim spoljašnjim poljima (npr. gravitacionim) koja se smatraju zadatim. U ovakvim poljima svaka čestica ima potencijalnu energiju $\epsilon_p(\vec{r})$ koja zavisi samo od njenog položaja \vec{r} .
- ² Interakcija čestica idealnih sistema se javlja jedino u njihovim sudarima u kojima se čestice ponašaju kao krute sfere. Osim toga, čestice sistema se sudaraju i sa zidovima suda u kojem se nalaze. Ukoliko su ovi sudari elastični za zidove kažemo da su adijabatski. Stanje termodinamičke ravnoteže nije moguće uspostaviti u sistemu neinteragujućih čestica sa adijabatskim zidovima.
- ³ Sistemi čestica su kvantni sistemi. Ako je temperatura T dovoljno visoka, a koncentracija čestica n dovoljno mala, tada i klasična fizika daje zadovoljavajuće tačan (i znatno jednostavniji) opis.
- ⁴ Stanje bezstrukturne čestice mase m je opisano njenim impulsom $\vec{p} = m\vec{v}$ (ili brzinom \vec{v}) i njenim vektorom položaja \vec{r} . Energija E čestice koja nema unutrašnju strukturu je zbir $E = mv^2/2 + \epsilon_p(\vec{r})$ kinetičke energije $mv^2/2$ i potencijalne energije $\epsilon_p(\vec{r})$. Za opis stanja čestica sa unutrašnjom strukturom su, pored \vec{p} i \vec{r} , potrebni i dodatni stepeni slobode, a izrazu za energiju se mora dodati kinetička energija rotacije i unutrašnja energija složene čestice.
- ⁵ Fizički, veličina $f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3\vec{r}d^3\vec{v}$ predstavlja broj čestica (usrednjen po ansamblu) takvih da se u trenutku vremena t njihov vektor položaja nalazi u infinitezimalnoj okolini $d^3\vec{r}$ vektora \vec{r} , a njihova brzina u infinitezimalnoj okolini $d^3\vec{v}$ vektora \vec{v} . U početnom trenutku vremena t_0 funkcija raspodele može biti bilo koja nenegativna funkcija parametara \vec{r}, \vec{v} koja zadovoljava uslov normiranja $\int d^3\vec{r} \int d^3\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t_0) = N$. U stacionarnim stanjima, funkcija raspodele ne zavisi više od vremena, dok je u ravnotežnim stanjima funkcija raspodele Meksvel-Bolcmanova, i data je izrazom (5.1).

sa m masu čestica, sa $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ Bolcmanovu konstantu, sa T apsolutnu temperaturu sistema čestica, a sa n_0 koncentraciju čestica u tačkama \vec{r} u kojima je $\epsilon_p(\vec{r}) = 0$. Integracijom funkcije raspodele po svim brzinama \vec{v} pri fiksiranom \vec{r} dobija se *koncentracija čestica*

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}, \quad (5.3)$$

u tački prostora \vec{r} . Specijalno, integracijom raspodele (5.1) dobijamo *Bolcmanovu raspodelu*:

$$n(\vec{r}) = n_0 \exp \left[-\frac{\epsilon_p(\vec{r})}{k_B T} \right], \quad (5.4)$$

koja opisuje koncentraciju čestica u termodinamički ravnotežnim stanjima. Na osnovu (5.4), koncentracija $n(\vec{r})$ čestica u tački \vec{r} zavisi samo od temperature sistema T i potencijalne energije $\epsilon_p(\vec{r})$ koju čestica ima u toj tački. Korišćenjem Bolcmanove raspodele (5.4) se Meksvel-Bolcmanova raspodela (5.1) može napisati u obliku proizvoda

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = n(\vec{r}) f_M(\vec{v}), \quad (5.5)$$

Bolcmanove raspodele $n(\vec{r})$ i *Meksvelove raspodele*

$$f_M(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T} \right], \quad (5.6)$$

koja predstavlja verovatnoću da čestica ima brzinu \vec{v} . Na osnovu faktorizacije (5.5) i izraza (5.6) se vidi se da je raspodela čestica po brzinama, nezavisno od potencijalne energije čestica, ista u svim tačkama prostora, što predstavlja posledicu međučestičnih sudara.

5.2 Zadatak vežbe

Zadatak vežbe je da se proveriti:

1. Meksvelova raspodela,
2. Bolcmanova raspodela

Opis metode

1) Proveravanje Meksvelove raspodele: Elektroni emitovani iz metalnih uzoraka u procesu termoelektronske emisije⁶ imaju Meksvelovu raspodelu po

⁶ Termoelektronska emisija pretstavlja pojavu emitovanja elektrona iz metalnih uzoraka zagrejanih na visoku temperaturu. Zapremina uzorka pretstavlja potencijalnu jamu u kojoj se kreću slobodni elektroni. Raspodela slobodnih elektrona po brzinama je

brzinama. Zamislamo da imamo dve paralelne ravne ploče od kojih se jedna greje te tako pretstavlja izvor termoelektrona. Uobičajeno je da se između ploča uspostavlja napon takav da ploča sa koje se emituju elektroni pretstavlja elektrodu na nižem potencijalu - katodu. Električno polje koje se tom prilikom javlja ubrzava elektrone ka suprotnoj ploči - anodi - koja se nalazi na višem potencijalu. Ako se ploče spoje provodnikom, u tako nastalom kolu će teći struja, tim jača što je veći napon između anode i katode. Ova struja će u zatvorenom kolu da teče i ako je napon između anode i katode jednak nuli, pa čak i ako je ovaj napon negativan. Tada se električno polje u oblasti između katode i anode suprotstavlja kretanju elektrona, te se za takav napon kaže da je *zadržavajući*.

Neka je x-osa normalna na elektrode. Lako se vidi da će do anode stići samo oni elektroni čija kinetička energija $mv_x^2/2$ kretanja duž x-ose veća od eU - razlici potencijalne energije koju elektron ima neposredno uz anodu i neposredno uz katodu pri zadržavajućem naponu U . Uočimo sada elektrone čija brzina kretanja duž x-ose leži u intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$, gde je $v_x > \sqrt{2eU/m}$; ovde je m - masa elektrona, dok je $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ elementarno naelektrisanje (naelektrisanje elektrona je $-e$). Doprinos dI ukupnoj struji I termoelektrona je proporcionalan proizvodu v_x i broja takvih elektrona:

$$dI \sim v_x dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right]$$

te za $I = \int dI \sim \int_{\sqrt{2eU/m}}^{+\infty} v_x \exp[-mv_x^2/2k_B T] dv_x$ nalazimo

$$I = I_0 \exp \left[-\frac{eU}{k_B T} \right], \quad (5.7)$$

Fermi-Dirakova:

$$dn = \frac{2m^3}{h^3} \frac{d^3\vec{v}}{\exp\left[\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}\right] + 1},$$

gde je dn broj slobodnih elektrona po jedinici zapremine metala čije brzine leže u intervalu brzina $d^3\vec{v}$, dok je $\epsilon = p^2/2m$ - energija slobodnih elektrona a μ - njihov hemijski potencijal; ova raspodela se znatno razlikuje od Meksvelove raspodele. Na granici metal-vakuum postoji potencijalna barijera koju mogu savladati samo elektroni čija je kinetička energija veća od energije barijere. Stoga je pri niskim temperaturama kinetička energija termalnog kretanja elektrona nedovoljna za savladavanje ove barijere. No, ako se temperatura uzorka dovoljno poveća, tada elektroni sa najvećom kinetičkom energijom počinju da napuštaju metal. Koncentracija ovih elektrona (termoelektrona) je $10^{12} - 10^{13}$ puta manja od koncentracije slobodnih elektrona u metalu, a njihova raspodela po brzinama se praktično svodi na Meksvelovu raspodelu.

gde je I_0 termostruja pri zadržavajućem potencijalu $U = 0$. Na taj način se snimanjem jačine termostruje I u funkciji zadržavajućeg napona U može proveriti da li je raspodela termoelektrona po brzinama Meksvelova⁷.

2) Proveravanje Bolcmanove raspodele: Koncentracija čestica n u razblaženim koloidnim rastvorima se pokorava Bolcmanovoj raspodeli

$$n(h) = n_0 \exp \left[-\frac{m'g(h - h_0)}{k_B T} \right], \quad (5.8)$$

gde je $n(h)$ - koncentracija čestica na visini h merenoj od nekog arbitrarno izabranog nivoa, n_0 - koncentracija čestica na visini h_0 u odnosu na isti nivo, a m' - efektivna masa koloidne čestice povezana sa njenom masom m formulom

$$m' = m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad (5.9)$$

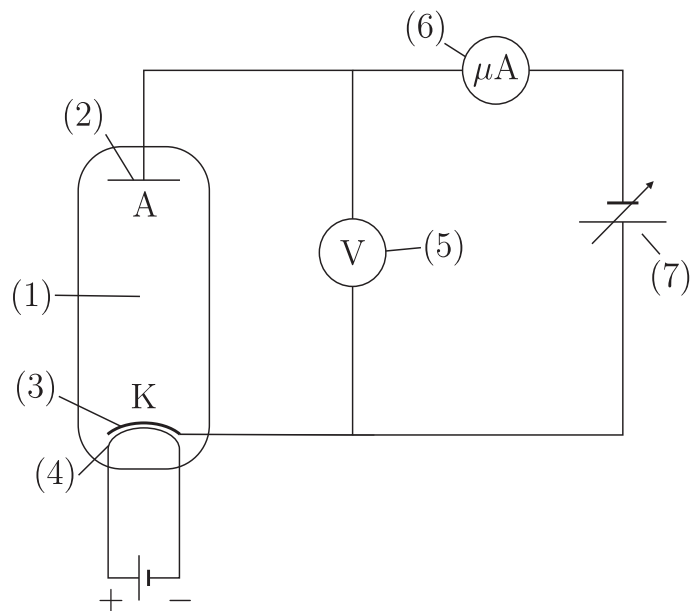
gde je ρ_0 - gustina rastvarača, a ρ - gustina supstance koja gradi koloidni rastvor.

Kada je rastvor obojen tada je intenzitet boje u datoj tački rastvora proporcionalan koncentraciji koloidnih čestica u istoj tački, dok je na crno-beljoj slici koncentracija čestica proporcionalna zacrtnjenju.

⁷ Iako pojednostavljen, pretstavljani opis je adekvatan kada zadržavajući napon U nije isuviše mali.

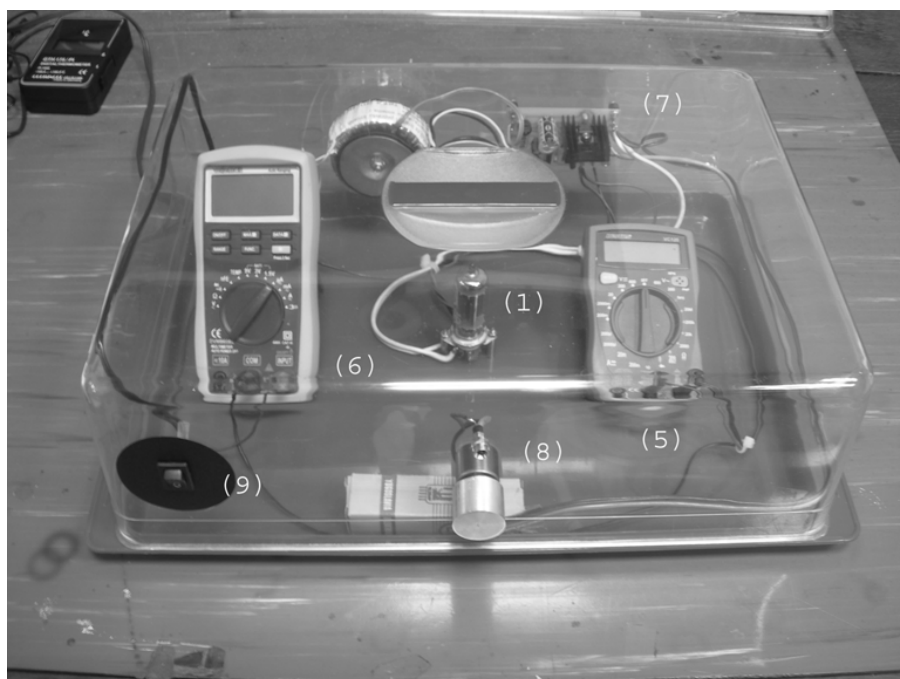
Opis aparature

1) Meksvelova raspodela: Aparatura koju koristimo za proveravanja Meksvelove raspodele je shematski prikazana slici 5.1. Prototip izradio S. Tekić - slika 5.2. Osnovni deo aparature je vakuumaska dioda (1) sa anodom A (2) i katodom K (3) sa eksternim grejanjem (4). Napon izmedju anode i katode se meri voltmetrom (5) a jačina struje mikroampermetrom (6). Izvor jednosmernog napona (7) je svojim negativnim krajem priključen na anodu dajući električno polje (napon) koje se suprotavlja kretanju elektrona⁸ od katode ka anodi. Regulacija napona koji daje izvor (7) se vrši pomoću potencijometra (8) - vidi sliku 5.2, na kojoj je (9) - prekidač kojim se uključuje grejanje katode.



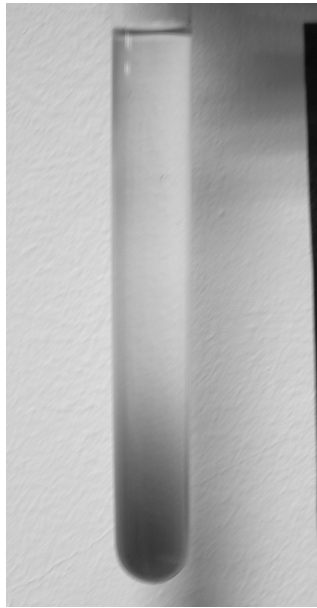
Slika 5.1 Shema aparature za proveravanja Meksvelove raspodele: (1) - vakuumaska dioda, (2) - anoda A, (3) - katoda K, (4) - grejanje katode, (5) - voltmetar, (6) - mikroampermetar, (7) - jednosmerni izvor sa regulacijom napona; nacrtali mr Zorica Pajević i mr Duško Latas.

⁸ Reč je o elektronima emitovanih sa katode termoelektronskom emisijom.

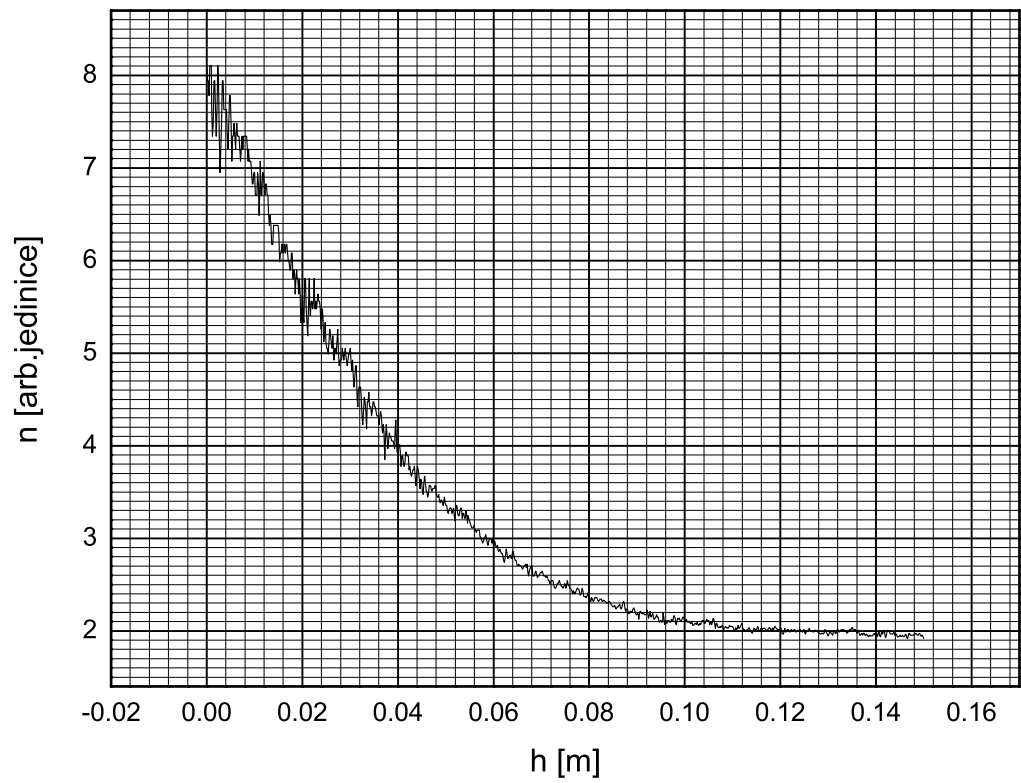


Slika 5.2 Slika aparature za proveravanja Meksvelove raspodele: (1 - 7) - isto kao na slici 5.1; (8) - potencijometar, (9) - prekidač.

2) Bolcmanova raspodela: U cilju proveravanja Bolcmanove raspodele, u epruveti je pripremljen (S. Kuprešanin) koloidni rastvor kalijum hromi sulfata $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2$ - vidi crno-belu sliku 5.3. Koncentracija koloidnih čestica (koje daju plavu boju) se pokorava Bolcmanovoj raspodeli. Rastvor je snimljen digitalnim foto-aparatom a zacrnjenje na crno-beloj slici epruvete sa rastvorom (proporcionalno koncentraciji koloidnih čestica) je određeno programskim paketom OriginLab 7.5. Tako određeno zacrnjenje je prikazano na slici 5.4.



Slika 5.3 Crno-bela fotografija epruvete sa koloidnim rastvorom kalijum hromi sulfata $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2$ u vodi. Koncentracija koloidnih čestica n je proporcionalna zacrnjenju unutrašnjosti epruvete na slici.



Slika 5.4 Koncentracija čestica n , izražena u arbitrarnim jedinicama, u funkciji visine h merene od dna epruvete sa slike 5.3.

Postupak provere

1) Meksvelova raspodela: Uključi se grejanje katode i sačeka oko 5 minuta dok se termostruja ne ustali. Porast termostruje se prati na mikroampermetru (ukoliko mikroampermetar i/ili voltmetar nisu uključeni pozvati nastavnika ili tehničara da to učine). Nakon što se termostruja ustalila, okretanjem potenciometra postepeno povećavati zadržavajući napon U . Za svaku vrednost ovog napona izmeriti mikroampermetrom termostruju I . Izmerene vrednosti uneti u tabelu 5.1. Snimiti najmanje 12 tačaka u opsegu od 0V do 0.6V zadržavajućeg napona U .

Table 5.1 Proveravanje Meksvelove raspodele - zaglavlje tabele.

No.	U [mV]	I [μ A]	$\ln(I)$

Na osnovu izmerenih vrednosti nacrtati grafik $\ln(I)$ u funkciji od U . U skladu sa (5.7), eksperimentalne tačke bi trebalo da leže na pravoj liniji $y = b - ax$ oblika

$$\ln(I) = \ln(I_0) - \frac{e}{k_B T} U, \quad (5.10)$$

strmine

$$a = \frac{e}{k_B T}. \quad (5.11)$$

Odrediti a grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucrtati mnk pravu. Iz (5.11) naći temperaturu T (termoelektrona, odnosno katode) i proceniti grešku ove veličine.

2) Bolcmanova raspodela:⁹ Sa grafika priloženog na slici 5.4 očitati najmanje 10 tačaka (tj. parova h, n). Očitane podatke uneti u tabelu 5.2, te na osnovu njih nacrtati grafik zavisnosti $\ln(n)$ od h . Obzirom da je zacrtnjenje proporcionalno koncentraciji čestica, na ovom grafiku bi trebalo da se pojavi deo koji odgovara linearnoj zavisnosti $y = b - ax$

$$\ln(n) = \left[\ln(n_0) + \frac{m'gh_0}{k_B T} \right] - \frac{m'g}{k_B T} h, \quad (5.12)$$

sa strminom (koeficijentom pravca)

$$a = \frac{m'g}{k_B T}, \quad (5.13)$$

i odsečkom $b = \left[\ln(n_0) + \frac{m'gh_0}{k_B T} \right]$ na ordinatnoj osi. Odrediti strminu a grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk) i ucrtati mnk pravu. Na osnovu mnk vrednosti za a i $T = (305 \pm 1)^\circ\text{K}$, izračunati efektivnu masu m' koloidnih čestica i odrediti njenu grešku.

Table 5.2 Proveravanje Bolcmanove raspodele - zaglavlje tabele.

No.	h [m]	n [rel.jed.]	$\ln(n)$

⁹ Priprema rastvora traje više dana. Fotografisanje rastvora i odredjivanje zacrtnjenja takodje prelazi standardni okvir studentske vežbe, te su zato dati "gotovi" podaci.

6 Provera zakona idealnog gasnog stanja

6.1 Uvod

Idealnim gasovima nazivamo gasove koji se pokoravaju *jednačini idealnog gasnog stanja*:

$$pV = nRT, \quad (6.1)$$

gde su P , V , T i n pritisak, zapremina, apsolutna temperatura i broj molova gasa, respektivno, a R tzv. *univerzalna gasna konstanta*, čija vrednost iznosi $R = 8.314\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$. Jednačina (6.1) ne zavisi od vrste gasa, pa se lako zaključuje da vredi i za smeše idealnih gasova.

U širokim intervalima temperatura i koncentracija $c = n/V$, realni gasovi se ne pokoravaju jednačini idealnog gasnog stanja. Medjutim, u užim intervalima (dovoljno visokih) temperatura i (dovoljno niskih) koncentracija i realni gasovi (npr. vazduh pri sobnoj temperaturi i pritiscima bliskim atmosferskom pritisku) se aproksimativno pokoravaju jednačini idealnog gasnog stanja (6.1).

Na osnovu molekularno-kinetičke teorije, idealni gasovi su sistemi čestica (npr. molekula) čija se interakcija, osim u aktima sudara, može zanemariti i čija je energija termalnog kretanja znatno veća od njihove potencijalne (npr. gravitacione) energije. Čestice ovakvog gasa se kreću po inerciji, osim kada se sudaraju sa zidovima suda u kojima se nalaze ili sa drugim česticama gasa. U takvim sudarima (koji se smatraju trenutnim), čestice gasa razmenjuju energiju i impuls. Stoga su njihove putanje cik-cak linije, čiji pravolinijski delovi odgovaraju kretanju po inerciji, a temena aktima sudara.

Jednačinu idealnog gasnog stanja (6.1) je prvi dobio Klapejron u prvoj polovini XIX veka uopštavanjem niza, od ranije poznatih, parcijalnih zakona idealnog gasnog stanja koji predstavljaju specijalan slučaj jednačine (6.1) kada su neka dva od četiri parametra gasa (P , V , T i n) konstantna (fiksirana). Tako, pri konstantnim n i T , imamo Bojl-Maritov¹ zakon

$$pV = \text{const}, \quad (6.2)$$

kojim je u $p - V$ ravni odredjen oblik *izoterme* - linije na kojoj leže stanja sa

¹ U inostranoj literaturi se ovaj zakon obično naziva po engleskom fizičaru i hemičaru Bojlu (Robert Boyle, 1627-1691) koji ga je otkrio 1662. godine. Francuski fizičar Mariot (Edme Mariotte, 1620-1684) je otkrio isti zakon 1676. godine nezavisno od Bojla.

istom temperaturom. Na osnovu (6.2), izoterme idelanih gasova su ravnostrane hiperbole.

Pri konstantnim n i p imamo Šarlov zakon²

$$\frac{V}{T} = \text{const}, \quad \iff \quad V = V_0[1 + \alpha\theta], \quad (6.3)$$

gde je V_0 zapremina gasa na 0°C . Ovaj zakon određuje u $V - \theta$ ravni oblik *izobare* - linije na kojoj leže stanja sa istim pritiskom. Na osnovu (6.3), izobare idealnih gasova su prave linije sa odsečkom V_0 na V -osi i koeficijentom pravca $V_0\alpha$.

Slično, pri konstantnim n i V , imamo Gej-Lisakov zakon³

$$\frac{p}{T} = \text{const}, \quad (6.4)$$

koji se obično navodi u obliku

$$p = p_0[1 + \alpha\theta], \quad (6.5)$$

gde je θ temperatura na Celzijusovoj skali, p_0 pritisak pri $\theta = 0^\circ\text{C}$, a

$$\alpha = \frac{1}{273,15^\circ\text{C}}, \quad (6.6)$$

univerzalna konstanta, jednaka recipročnoj vrednosti apsolutne nule temperature, izražene u Celzijusovim stepenima. U $p - \theta$ ravni, ovaj zakon određuje oblik *izohore* - linije na kojoj leže stanja sa istom zapreminom. Na osnovu (6.5), izohore idelanih gasova su prave linije čiji je odsečak na p -osi jednak pritisku p_0 gasa na 0°C , a koeficijent pravca iznosi $p_0\alpha$.

Konačno, pri konstantnim p i T imamo Avogadrov zakon

$$V = kn, \quad (6.7)$$

gde je $k = RT/p$.

6.2 Zadatak

Zadatak vežbe je da se izvrši provera:

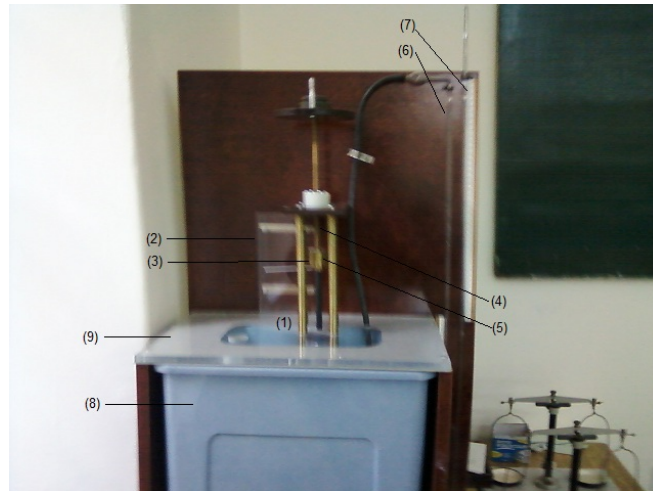
- Bojl-Maritovog zakona (6.2),
- Šarlovog zakona (6.3) i
- Gej-Lisakovog zakona (6.5).

² Francuski naučnik Šarl (Jacques Alexandre César Charles, 1746-1823) je otkrio ovaj zakon oko 1780. godine ali svoje otkriće nije objavio. Zakon prvi objavljuje Gej-Lisak 1802. godine, zbog čega se zakon često (npr. u našoj zemlji) naziva Gej-Lisakov zakon.

³ Francuski fizičar Gej-Lisak zakon (Joseph Louis Gay-Lussac, 1778-1850) je otkrio ovaj zakon 1809. godine, ne znajući da je u periodu 1700-1702 isti zakon već otkrio francuski fizičar Amonton (Guillaume Amontons, 1663-1705).

za vazduh. Izvršiti proveru najmanje jednog od navedenih zakona po izboru nastavnika, korišćenjem aparature shematski prikazane na slici 1.

Opis aparature



Slika 6.1 Aparature za proveravanje zakona idealnih gasova. (1) – plastični špric; (2) – skala; (3) – klip; (4) – zavrtnaj; (5) – slavina; (6) – manometar; (7) – skala manometra; (8) – sud sa vodom; (9) – poklopac suda.

Osnovni deo aparature koju koristimo za proveru gasnih zakona (vidi sliku 6.1) je plastični špric (1) zapremine oko 300 ml. Zapreminu gasa koji se nalazi u špricu očitavati na skali (2). Vazduh se upumpava (ispumpava) u špric pomeranjem klipa (3) čiji se položaj fiksira zavrtanjem (4). Ovo se vrši pri otvorenoj slavini (5) jer tada postoji veza šprica sa atmosferom. Kada se slavina (5) zatvori, prekida se veza šprica sa atmosferom a uspostavlja veza sa živinim manometrom (6). Ukupni pritisak

$$p = p_a + \Delta p$$

gasa u špricu je zbir atmosferskog pritiska p_a i razlike pritiska Δp u kracima živinog manometra (6). Uzeti da je

$$\Delta p = \rho g \Delta H ,$$

gde je

$g = 9,806 \text{ m/s}^2$ ubrzanje Zemljine teže,

$\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$ gustina žive, a

$\Delta H = H_1 - H_2$ gde su:

H_1 - visina živinog stuba u kraku manometra koji je povezan sa špricom,

H_2 - visina živinog stuba u kraku koji je povezan sa atmosferom;

vrednosti H_1 i H_2 se očitavaju na skali (7) živinog manometra. Atmosferski pritisak se se meri zidnim barometrom. Temperatura se meri termometrom. Špric (1) se nalazi u plastičnom sudu (8) sa dvostrukim zidovima između kojih su komadići sundjera radi smanjenja razmene toplote sa okolinom. Ovaj sud se puni vodom koja termostatira gas - obezbeđuje da temperatura gasa u špricu tokom merenja bude približno konstantna. Nivo vode u sudu **mora** biti između dva markera na sudu koji određuju minimalni i maksimalni dozvoljeni nivo vode u sudu. Time je obezbeđeno da, zbog termostatiranja, zapremina u kojoj se nalazi gas bude u vodi, ali da gornji kraj šprica viri iz vode kako voda ne bi ulazila u špric sa gornje strane. Voda se u sud uliva sa gornje strane otvaranjem poklopca (9), a odvodi iz suda pomoću odvodnog creva.

Proveravanje Bojl-Mariotovog zakona:

Napuniti sud (8) vodom sa česme do dozvoljenog nivoa. Otvoriti slavinu (5) i pomeranjem klipa (3) šprica upumpati vazduh u špric do polovine njegove zapremine; fiksirati klip u ovom položaju pomoću zavrtnja (4). Zatvoriti slavinu (5) i držati je zatvorom u toku celokupnog merenja. Pri datoj temperaturi T izvršiti merenja ukupnog pritiska $p = p_a + \Delta p$ gasa u špricu u funkciji njegove zapremine V . Merenja vršiti u intervalu pritiska p od 40kPa do 160kPa (tj., od 0,4 do 1,6 atmosfera). Ovom intervalu pritiska odgovara interval ΔH od -60cm do +60 cm. Zapreminu gasa u špricu menjati pomeranjem klipa (3), koji se prvo odvrtnjem zavrtnja (4) oslobodi, zatim podesi u željeni položaj, pa se u tom položaju fiksira. Nakon svake promene zapremene gasa u špricu, sačekati oko 1 minut da se temperatura gasa u špricu izjednači sa temperaturom vode. Pri datoj temperaturi izvršiti merenja za najmanje 10 različitih vrednosti zapremene gasa. Merenja ponoviti pri tri vrednosti temperature koje se međusobom razlikuju za najmanje 20°C. Promenu temperature vode u sudu ostvariti dodavanjem vruće vode dok se postigne željena temperatura. Višak vodi odliti odvodnim crevom.

Podatke dobijene merenjem uneti u tabelu 6.1.

Table 6.1 Zaglavlje tabele koja se koristi pri proveru Bojl-Mariotovog zakona.

No	θ [°C]	H_1 [mm]	H_2 [mm]	ΔH [mm]	Δp [kPa]	V [$10^{-6} \cdot \text{m}^3$]	$1/V$ [$10^6 \cdot \text{m}^{-3}$]	p [kPa]

Podatke koji odgovaraju svakoj izotermi predstaviti u obliku

$$p = (nRT) \cdot \frac{1}{V}, \quad (6.8)$$

koja predstavlja jednačinu prave linije sa koeficijentom pravca nRT . Sve tri izoterme predstaviti na istom grafiku. Grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk) odrediti njihove koeficijente pravaca; ucrtati mnk prave. Na osnovu poznatih temperatura iz sve tri izoterme odrediti n - broj molova gasa

u špricu, koji je za sve tri izoterme bio isti; proceniti eksperimentalnu grešku za n . Proveriti da li se tri dobijene vrednosti za n poklapaju u granicama eksperimentalne greške.

Proveravanje Šarlovog zakona: Pre početka merenja, osloboditi klip (3) šprica (1), čime se postiže da vazduh u špricu bude pod konstantnim pritiskom.

Merenja započeti sa hladnom vodom ($\theta \approx 10^\circ\text{C}$). Pri datoj temperaturi θ vode, izmeriti zapreminu gasa V gasa u špricu po proceduri iz opisa aparature. Dodavanjem tople vode u sud menjati temperaturu u koracima od približno 5°C . Nakon dodavanja tople vode, vodu u sudu izmešati, pa sačekati oko 1 minut da se temperatura gasa izjednači sa temperaturom vode. Pri svakoj temperaturi izmeriti odgovarajuću zapreminu gasa. Voditi računa da nivo vode u sudu ne predje maksimalno dozvoljeni nivo.

Podatke dobijene merenjem uneti u tabelu 6.2.

Table 6.2 Zaglavlje tabele koja se koristi pri proveru Šarlovog zakona.

No	θ [$^\circ\text{C}$]	V [$10^{-6}\cdot\text{m}^3$]

Dobijene podatke $V = f(\theta)$ predstaviti grafički. Eksperimentalne tačke bi trebalo da leže na pravoj liniji $V = a\theta + b$. U skladu sa Šarlovim zakonom (6.3), odsečak b na ordinatnoj osi bi trebalo da odgovara zapremini V_0 gasa na 0°C , a koeficijent pravca a proizvodu αV_0 . Odrediti b i a grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucrtati mnk pravu. Na osnovu vrednosti dobijenih metodom najmanjih kvadrata odrediti V_0 i α i proceniti njihove eksperimentalne greške. Proveriti da li se eksperimentalno dobijena vrednost za α slaže u okvirima eksperimentalne greške sa tačnom vrednošću $\alpha = 1/273,15^\circ\text{C}$.

Proveravanje Gej-Lisakovog zakona: Pre početka merenja, špric (1) napuniti do kraja vazduhom. U tu svrhu, otvoriti slavinu (5), pa postaviti klip u krajnji gornji položaju. Nakon što je vazduh upumpiran u špric, zatvoriti slavinu (5). Merenja vršiti pri konstantnoj zapremini gasa u špricu, za šta je potrebno da se, pomoću zavrtnja (4), fiksira položaj klipa (3).

Merenja započeti sa hladnom vodom ($\theta \approx 10^\circ\text{C}$). Pri datoj temperaturi θ vode, izmeriti ukupan pritisak $p = p_a + \Delta p$ gasa u špricu po proceduri iz opisa aparature. Dodavanjem tople vode u sud menjati temperaturu u koracima od približno 5°C . Nakon dodavanja tople vode, vodu u sudu izmešati, pa sačekati oko 1 minut da se temperatura gasa izjednači sa temperaturom vode. Pri svakoj temperaturi izmeriti odgovarajući ukupni pritisak gasa. Voditi računa da nivo vode u sudu ne predje maksimalno dozvoljeni nivo.

Podatke dobijene merenjem uneti u tabelu 6.3.

Table 6.3 Zaglavlje tabele koja se koristi pri proveru Gej-Lisakovog zakona.

No	θ [°C]	H ₁ [mm]	H ₂ [mm]	ΔH [mm]	Δp [kPa]	p [kPa]

Dobijene podatke $p = f(\theta)$ predstaviti grafički. Eksperimentalne tačke bi trebalo da leže na pravoj liniji $p = a\theta + b$. U skladu sa Gej-Lisakovim zakonom (6.5), odsečak b na ordinatnoj osi bi trebalo da odgovara pritisku p_0 gasa na 0°C , a koeficijent pravca a proizvodu αp_0 . Odrediti b i a grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucrtati mnk pravu. Na osnovu vrednosti dobijenih metodom najmanjih kvadrata odrediti p_0 i α i proceniti njihove eksperimentalne greške. Proveriti da li se eksperimentalno dobijena vrednost za α slaže u okvirima eksperimentalne greške sa tačnom vrednošću $\alpha = 1/273, 15^\circ\text{C}$.

7 Odredjivanje linearnog koeficijenta termalnog širenja čvrstih tela i gustine vode u funkciji temperature

7.1 Uvod

Čvrsta tela se šire kada njihova temperatura raste. Empirijski je utvrđeno da je relativna promena $\Delta l/l_0$ linearnih dimenzija čvrstih tela proporcionalna promeni njihove temperature ΔT :

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T. \quad (7.1)$$

U izrazu (7.1) je $\Delta T = T - T_0$ promena temperature tela od početne vrednosti T_0 do vrednosti T tela u trenutku posmatranja, $\Delta l = l - l_0$ je (apsolutna) promena linearnih dimenzija tela od vrednosti l_0 na temperaturi T_0 do vrednosti l na temperaturi T , dok je $\alpha > 0$ koeficijent proporcionalnosti koji zovemo *linearnim koeficijentom termalnog širenja*.

Linearni koeficijent termalnog širenja zavisi od vrste materijala i u znatnom opsegu temperatura ne zavisi od temperature. Kako je $\alpha \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ to se može smatrati da se linearne dimenzije tela menjaju linearno sa temperaturom po zakonu

$$l = l_0[1 + \alpha(T - T_0)]. \quad (7.2)$$

Promena linearnih dimenzija čvrstih tela je posledica promene karakterističnog rastojanja a izmedju njegovih čestica¹. Ovo rastojanje se menja po istom zakonu

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \alpha \Delta T, \quad (7.3)$$

kao i linearne dimenzije čvrstih tela². Neposredna posledica je da se *sve* linearne

¹ Za tela sa kristalnom strukturom to su atomi ili joni kristalne rešetke, dok se za karakteristično rastojanje a može uzeti konstanta rešetke.

² U čvrstim telima čestice osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Jednostavan mikroskopski opis termalnog širenja je moguće dati na primeru linearnog lanca atoma kod kojeg je a_0 rastojanje izmedju njihovih ravnotežnih položaja na temperaturi $T = 0$. Potencijalna energija atoma je oblika $U(x) = kx^2/2 - gx^3/3$, gde je x udaljenje atoma od njegovog ravnotežnog položaja, dok su $k > 0$ i $g \geq 0$ konstante. Sila koja odgovara ovom potencijalu je $f(x) = -\partial U/\partial x = -kx + gx^2$, i ta sila nastoji da vrati atom u njegov ravnotežni položaj. Pri $g = 0$ kretanje atoma je harmonijsko oko ravnotežnog položaja, te srednji položaj atoma ne zavisi od njegove kinetičke energije, tj, temperature. Obzirom da je srednja sila $\langle f \rangle = 0$ i da je $\langle x^2 \rangle \approx 2 \langle U(x) \rangle / k$, to pri $g > 0$ vredi $\langle x \rangle = g \langle x^2 \rangle / k \approx 2g \langle U(x) \rangle / k^2$. Takodje vredi $\langle E \rangle = 2 \langle U(x) \rangle$ zbog $\langle E_k \rangle = \langle U(x) \rangle$ i $\langle E \rangle = \langle E_k \rangle + \langle U(x) \rangle$, gde je E_k kinetička energija atoma.

dimenzija tela menjaju u skladu sa (7.1). Kako je, uz to, linearni koeficijent termalnog širenja α mala veličina, to sledi da se i površina S i zapremina V tela menjaju linearno sa temperaturom:

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \beta \Delta T, \quad \beta = 2\alpha. \quad (7.4)$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \Delta T, \quad \gamma = 3\alpha. \quad (7.5)$$

gde su β i γ površinski i zapreminski koeficijent termalnog širenja, respektivno.

Promene zapremine sa temperaturom se javljaju i kod fluida, tj., tečnosti i gasova³. Eksperimentalno je utvrđeno da zakon linearnog zapreminskog termalnog širenja (7.5) vredi i kod fluida u intervalima temperatura određenim vrstom fluida, ali i da su lako uočljiva odstupanja od linearnog zakona, kada zapreminski koeficijent termalnog širenja

$$\gamma \equiv \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial T}, \quad (7.6)$$

zavisu od temperature T . Ovakvo ponašanje se npr. javlja kod vode, kod koje je γ čak negativno u intervalu od 0°C do 4°C , što znači da se voda u ovom intervalu temperatura skuplja pri porastu temperature⁴. Ovakvo anomalno ponašanje vode ima izuzetne posledice na zbivanja i život na površini Zemlje.

Zadatak vežbe

Zadatak vežbe je da se:

1. izmeri linearni koeficijent termalnog širenja α čvrstog tela po izboru nastavnika,
2. eksperimentalno odredi zavisnost gustine vode ρ od temperature T .

Tako nalazimo $\Delta a \equiv \langle x \rangle = g \langle E \rangle / k^2$, tj., $\Delta a / a_0 = g \langle E \rangle / (k^2 a_0)$, odakle je $\alpha = (g/k^2 a_0) c_v$, gde je c_v toplotni kapacitet po čestici. Zaključak je da je linearni koeficijent termalnog širenja proporcionalan specifičnoj toploti, što je potvrđeno u eksperimentima. Takođe se vidi da je α nezavisno od temperature u temperaturnim intervalima u kojima toplotni kapacitet ne zavisi od temperature, što je za većinu čvrstih tela ispunjeno pri temperaturama bliskim sobnoj.

³ Za čvrsta tela i tečnosti se može smatrati da imaju zapreminu koja (parktično) ne zavisi od pritiska. Kod gasova se, kada se govori o termalnom širenju, pritisak smatra konstantnim. Za idealne gasove je $\gamma = 1/273,15\text{K}$.

⁴ Povećanjem temperature se povećava srednja kinetička energije molekula vode usled čega, pri datom tipu "pakovanja" molekula vode, raste i srednje rastojanje između njih. Ali, srednje rastojanje zavisi i od tipa "pakovanja". Pakovanje dovodi do nastajanja klastera molekula - skupina od više desetina molekula jako povezanih vodoničnom vezom; veze između molekula koje pripadaju različitim klasterima su slabe. Kada temperatura pada ispod 4°C struktura klastera se menja, tako da srednje rastojanje između molekula vode (i pored smanjenja njihove kinetičke energije) raste.

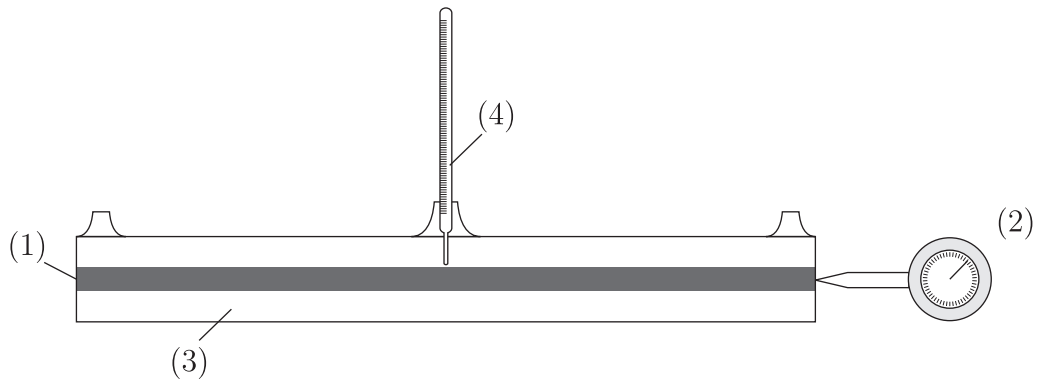
Opis aparature

Slika aparature koju koristimo za merenje linearnog koeficijenta termalnog širenja čvrstih tela je prikazana slici 7.1 a njena shema na slici 7.2; prototip izradio Dj. Majstorović. Čvrsto telo je u obliku (pune) šipke (1) dužine $l_0 = (800 \pm 1)\text{mm}$ na sobnoj temperaturi $T = 20^\circ\text{C}$. Promena Δl dužine šipke se meri komparatorom (2). Uz pomoć staklenog balona (3) koji se puni vodom se zadaje temperatura T šipke; ova temperatura se meri termometrom (4).



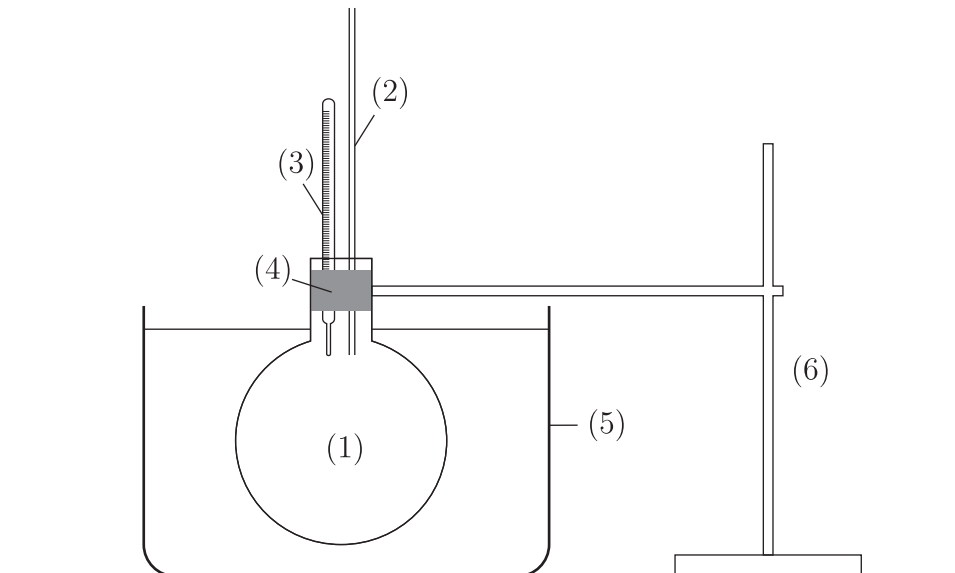
Slika 7.1 Aparatura za merenje lineranog koeficijenta termalnog širenja čvrstih tela.

Aparatura koju koristimo za određivanje zavisnosti gustine vode $\rho(T)$ od temperature T je prikazana na slici 7.3. Voda čiju gustinu merimo se sipa u stakleni balon (1). Promena zapremine vode u balonu se meri kapilarom (2) graduisanom u cm^3 , a njena temperatura termometrom (3). Kapilara i termometar su uglavl-



Slika 7.2 Shema aparature za merenje lineranog koeficijenta termalnog širenja čvrstih tela; (1) - uzorak oblika šipke, (2) - komparator koji meri promene dužine šipke; (3) - stakleni balon napunjen vodom; (4) - termometar; nacrtali mr Zorica Pajević i mr Duško Latas.

jeni u zapušač (4). Balon je uronjen u veći sud (5) koji služi kao temperatursko kupatilo punjeno vodom. Stativ (6) služi za fiksiranje položaja balona.



Slika 7.3 Shema aparature za određivanje gustine vode u funkciji temperature; (1) - stakleni balon u koji se sipa voda na kojoj se vrše merenja, (2) - kapilara za merenje promene zapremine vode; (3) - termometar; (4) - zapušač; (5) - sud sa vodom za termostatiranje; (6) - stalak; izrada prototipa - D. Grujić; nacrtali mr Zorica Pajević i mr Duško Latas.

Postupak merenja

Eksperiment se sastoji iz dva dela koja se izvode simultano.

1) Merenje linearnog koeficijenta termalnog širenja: Na početku prvog dela eksperimenta se balon (3) - slika 1 - napuni toplom vodom iz bojlera temperature oko $T \approx 60^\circ\text{C}$ i pusti da se hladi. Pre početka merenja, sačekati oko 10 minuta potrebnih da se šipka (1) zagreje do temperature vode u balonu. Tokom grejanja šipka se izdužuje, što treba pratiti na komparatoru (2). Merenje započeti nakon što komparator počne da pokazuje smanjenje dužine šipke. Proces hladjenja je spor tako da se može smatrati da je temperatura šipke jednaka temperaturi vode u balonu koju pokazuje termometar (4). Merenja temperature isprva vršiti na svaka 3 minuta⁵. Pri datoj temperaturi T očitati pokazivanje komparatora δl . Izmerene parove T i δl uneti u tabelu 7.1. Merenje vršiti sat vremena.

Table 7.1 Odredjivanje linearnog koeficijenta termalnog širenja čvrstog tela - zaglavlje tabele.

No.	$T [^\circ\text{C}]$	$\delta l [\text{mm}]$

2) Merenje gustine vode u funkciji temperature: Na početku drugog dela eksperimenta, odrediti piknometrom gustinu ρ_0 vode uzete iz suda (5). Zatim izvaditi led iz suda (5) - slika 2 - a zatim vodom iz njega napuniti balon (1) **do vrha**. Pažljivo zapušiti balon zapušačem (4) ne vadeći iz njega termometar i kapilaru. Pri ovome će nešto vode iz balona potisnute zapušačem iscuriti, a ostatak će preći u kapilaru (2). Proveriti da između zapušača i vrha vode u balonu nema vazdušnog mehura. Aparatura je dobro pripremljena za rad ako nema vazdušnog mehura i ako je nivo vode u kapilari između 1/4 i 1/3 njene visine. U suprotnom, otpušiti balon, vratiti vodu iz njega u sud (5) i ponoviti proceduru. Uz pomoć stativa (6), fiksirati položaj balona tako da samo njegov vrat viri iz vode u sudu (5). Sačekati dok termometar (3) ne pokaže minimalnu temperaturu. Nakon toga, temperatura će početi da raste jer se ceo sistem greje. Očitati početnu temperaturu (ona mora biti ispod 2°C) i početnu zapreminu vode u kapilari. U intervalu između 2°C i 5°C vršiti očitavanja nivoa (zapremine) δV vode u kapilari na svakih 0.5°C . Kasnija očitavanja vršiti na svakih 1°C . Meriti oko 1 sat, a dobijene parove T i δV uneti u tabelu 7.2. Na kraju, izmeriti masu m_{bv} balona sa vodom, zatim masu m_b praznog balona, te tako naći masu vode $m_v = m_{bv} - m_b$ sa kojom je merenje vršeno.

⁵ Nije potrebno vršiti merenje vremena.

Table 7.2 Određivanje gustine vode u funkciji temperature - zaglavlje tabele.

No.	T [° C]	δV [cm ³]	V [cm ³]	ρ [kg/m ³]

Obrada eksperimentalnih podataka

1) Linearni koeficijent termalnog širenja: Na osnovu podataka iz tabele 7.1 nacrtati grafik zavisnosti δ od temperature T . Mereni podaci bi trebalo da leže na pravoj čija strmina k , na osnovu jednačina (7.1) i (7.2), iznosi

$$k = l_0 \alpha, \quad (7.7)$$

gde se sa zadovoljavajućom tačnošću može uzeti $l_0 = (800 \pm 1)$ mm. Odrediti k i proceniti grešku Δk ove veličine grafičkom metodom, kao i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucrtati mnk pravu. Na osnovu dobijenih vrednosti za k , naći linearni koeficijent termalnog širenja α i proceniti njegovu grešku $\Delta \alpha$.

2) Gustina vode u funkciji temperature: Za početnu zapreminu vode uzeti $V_0 = m_v/\rho_0$, pa na osnovu nje sračunati $V = V_0 + \delta V$, a odatle i $\rho = m_v/V$; sračunate podatke uneti u poslednje dve kolone tabele 7.2. Nacrtati grafik zavisnosti gustine vode ρ u funkciji temperature T ; kroz eksperimentalne tačke provući glatku krivu vodeći računa da je zavisnost nelinearna.

8 Odredjivanje specifične toplote, latentne toplote topljenja i latentne toplote isparavanja za vodu

8.1 Uvod

Kada se tela (sistemi) greju njihova temperatura T raste¹. *Toplotni kapacitet tela* je

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad (8.1)$$

gde je ΔQ količina toplote koju je potrebno dovesti telu da bi se njegova temperatura povećala za ΔT . Kako je $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$, jedan deo dovedene količine toplote odlazi na povećanje unutrašnje energije U , dok se ostatak pretvara u rad ΔA koji sistem vrši nad okolinom. Kako ΔU i ΔA zavise od vrste termodinamičkog procesa, isto važi i za toplotni kapacitet C . Vrsta termodinamičkog procesa je obično određena spoljašnjim parametrima koji su tokom procesa konstantni. Pored toga, toplotni kapacitet zavisi i od stanja sistema.

Za homogene sisteme veličine ΔU i ΔA su *ekstenzivne* - proporcionalne količini supstance. Stoga se, kao karakteristike supstance (materijala) od koje se sastoji sistem, uvode specifične toplote - toplotni kapaciteti po jedinici količine supstance². Kako je količina supstance proporcionalna masi, to se uvodi *specifična toplota*:

$$c = \frac{C}{m}, \quad (8.2)$$

kao toplotni kapacitet C po jedinici mase m . Slično toplotnom kapacitetu, i specifične toplote supstanci zavise od njihovog stanja i vrste termodinamičkog procesa.

Važnu klasu termodinamičkih sistema predstavljaju *termo-mehanički sistemi* kod kojih je elementarni rad koji ovakvi sistemi vrše nad okolinom dat izrazom $dA = pdV$, gde su p i V pritisak i zapremina sistema. Pri fiksiranoj količini supstance, stanje termo-mehaničkih sistema je određeno sa bilo koja dva od sledeća tri parametra p , V i T . Za termo-mehaničke supstance se uvode dve vrste specifičnih toplota:

c_V - specifična toplota pri konstantnoj zapremini,

¹ Ovde se podrazumeva da sistem ne trpi fazni prelaz.

² Tako je, na primer, moguće govoriti o molarnim specifičnim toplotama ili specifičnim toplotama po čestici.

c_p - specifična toplota pri konstantnom pritisku,

koje zavise od stanja supstance i koje se praktično poklapaju kada je termalno širenje posmatrane supstance zanemarivo³. Za mnoge supstance ove vrste spefične toplote su praktično konstantne u širem intervalu temperatura (npr., vodu u intervalu od 0°C do 100°C) te je korespodentni deo krive grejanja⁴ linearan.

Izgled krive grejanja se menja kada supstanca koja se greje trpi fazni prelaz. Tipični primeri su topljenje (kada supstanca prelazi iz čvrstog u tečno agregatno stanje) i ključanje (kada supstanca prelazi iz tečnog u gasovito agregatno stanje). Sve dok traje fazni prelaz temperatura supstance se ne menja, te su korespodentni delovi krive grejanja horizontalni. Tokom faznog prelaza, dovedena količina toplote odlazi na povećanje srednje potencijalne energije čestica supstance bez promene njihove srednje kinetičke energije. Stoga sistem koji se greje postaje tokom vremena sve bogatiji fazom koja samostalno egzistira na višim temperaturama na račun faze koja samostalno egzistira na nižim temperaturama. Količina toplote ΔQ potrebna da se izvrši fazni prelaz je proporcionalna količini supstance (tj. njenoj masi Δm), te se uvodi specifična *latentna toplota* faznog prelaza

$$q_l = \frac{\Delta Q}{\Delta m}. \quad (8.3)$$

Specijalno, u slučaju topljenja govorimo o specifičnoj latentnoj toploti topljenja q_t , dok pri isparavanju govorimo o specifičnoj latentnoj toploti isparavanja q_i .

Na kraju, napomenimo da pri hladjenju supstanca prolazi kroz ista stanja samo obrnutim redosledom. Tako se, na primer, pri hladjenju pare javlja fazni prelaz u kojem supstanca prelazi iz gasovitog u tečno stanje. Ovaj fazni prelaz se javlja na temperaturi ključanja⁵ i tom prilikom se usled kondezovanja pare u tečnost oslobadja ista količina latentne toplote. Drugima rečima, latentna toplota isparavanja je jednaka latentnoj toploti kondenzovanja (pare u tečnost). Slično, pri hladjenju supstance u tečnom stanju, dolazi do faznog prelaska iz tečnog u čvrsto agregatno stanje na temperaturi topljenja, a latentna toplota topljenja jednaka je latentnoj toploti očvršćavanja.

³ Može se pokazati da je

$$c_p = c_v + \frac{T\alpha_p^2}{\rho K_T}$$

gde je ρ gustina, $\alpha_p = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_p$ temperaturski koeficijent zapreminskog širenja pri konstantnom pritisku, a $K_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$ - izotemska kompresibilnost. Stoga je $c_p \approx c_v$ kod supstanci u čvrstom i tečnom agregatnom stanju, ali je u gasovitom stanju $c_p > c_v$.

Tako je za idealne gasove: $\alpha_p = 1/T$, $K_T = 1/p$ i $c_p - c_v = p/\rho T$.

⁴ Kriva grejanja prikazuje kako se menja temperatura T u funkciji vremena t pri konstantnoj snazi grejanja $dQ/dt = const$. Ostali parametri stanja (kod termo-mehaničkih sistema to je pritisak) se održavaju konstantnim.

⁵ Podrazumeva se da se ostali parametri stanja za sve vreme hladjenja održavaju konstantnim.

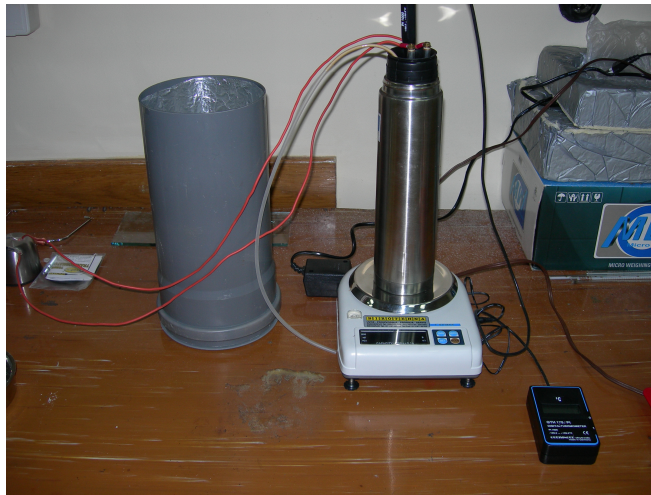
8.2 Zadatak

Zadatak vežbe je da se za vodu odrede:

1. specifična toplota c ,
2. specifična latentna toplota isparavanja q_i i
3. specifična latentna toplota topljenja q_t .

8.3 Opis aparature

Aparatura koju koristimo za merenje specifične toplote i specifičnih latentnih toplota isparavanja i topljenja je prikazana na slici 8.1, a njena shema na slici 8.2. Izrada prototipa: S. Tekić. Osnovni deo aparature je termos-boca (1). U nju se stavlja između 700g i 1000g vode na kojoj se vrše merenja.



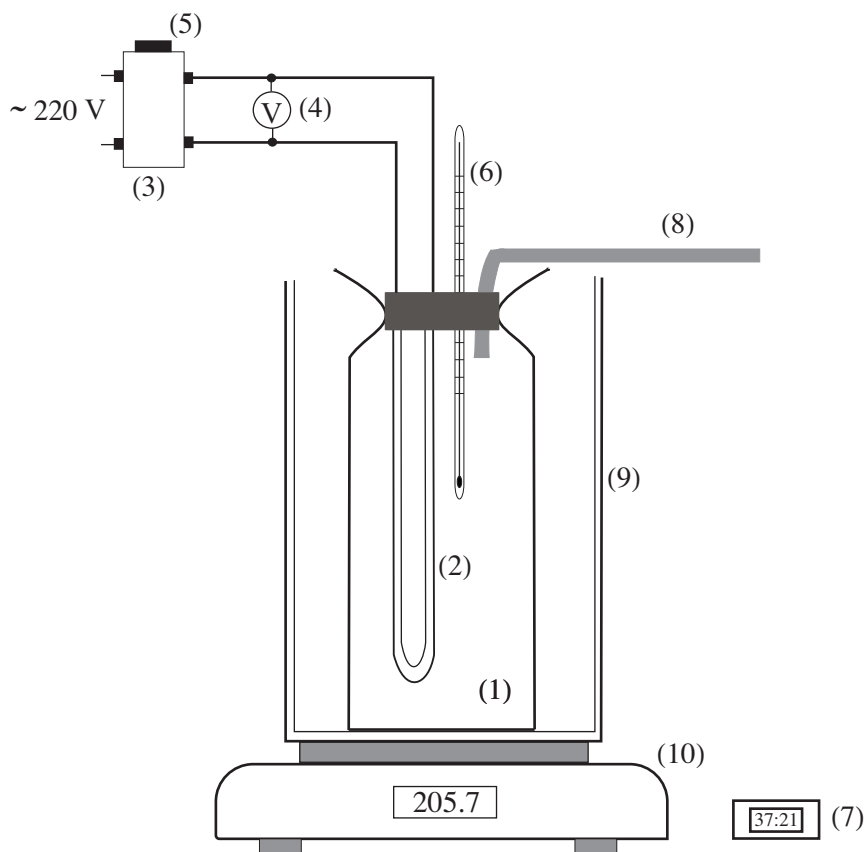
Slika 8.1 Aparatura za merenje specifične toplote i specifičnih latentnih toplota isparavanja i topljenja.

Voda se greje grejačem (2) čiji termogeni otpor iznosi $R_g = (4,92 \pm 0,01)\Omega$. Radi bezbednosti, grejač se napaja preko trafoa (3) koji pri normalnom mrežnom naponu daje na svom izlazu naizmjenični napon od 24V. Napon U na grejaču se meri digitalnim voltmetrom (4) sa relativnom greškom od 1%. Snaga P grejača se izračunava po formuli:

$$P = \frac{U^2}{R_g}, \quad (8.4)$$

a količina toplote ΔQ koju grejač oslobodi tokom vremena Δt po formuli:

$$\Delta Q = P\Delta t. \quad (8.5)$$



Slika 8.2 Shematski prikaz aparature. (1) - termos boca; (2) - grejač; (3) - trafo; (4) - voltmetar; (5) - prekidač; (6) - termometar; (7) - digitalni hronometar; (8) - crevo za odvod vodene pare; (9) - plastični sud za termoizolaciju; (10) - digitalna vaga; nacrtala dr Marija Dimitrijević.

Smatra se da je snaga koju oslobadja grejač konstantna u toku merenja te se napon meri samo na početku eksperimenta. Grejač se uključuje/isključuje prekidačem (5).

Temperatura vode se meri digitalnim termometrom (6) opsega od -50°C do 150°C i tačnosti $\Delta T = 0,1^{\circ}\text{C}$, a vreme digitalnim hronometrom (7). Prilikom merenja sonda termometra mora biti zagnjurenjena u vodu. Crevo (8) služi za odvod vodene pare. Termos-boca (1) se nalazi u plastičnom sudu (9) koji je napunjen komadićima sundjera čime se smanjuje razmena toplote vode iz termososa sa okolinom. Toplotni kapacitet ovog mernog sistema iznosi $C_s = (60 \pm 10)\text{J/K}$. Plastični sud je postavljen na digitalnu vagu (10) tačnosti $\Delta m = 0,1\text{g}$ i kapaciteta 2000g, koja služi za merenje promene mase vode tokom njenog ključanja.

8.4 Postupak merenja

Eksperiment se sastoji iz tri dela. U prvom delu eksperimenta se meri specifična toplota vode, u drugom delu - specifična latentna toplota isparavanja, a u trećem delu - specifična latentna toplota topljenja vode. Obrada podataka dobijenih merenjem se vrši tek nakon završetka svih merenja.

1) Merenje specifične toplote vode: Na početku merenja digitalnom vagom (10) izmeriti masu m_b termos-boce (1) bez vode, a zatim usuti u nju između 700g i 1000g hladne vode temperature ne više od 10°C . Izmeriti masu m_{bv} termos-boce sa vodom; masa ususte vode je $m_v = m_{bv} - m_b$. Zatvoriti bocu i sačekati da se temperatura koju pokazuje digitalni termometar (6) ustali. Uključiti grejač (2) pomoću prekidača (5) i startovati merenje vremena digitalnim hronometrom (7). Digitalnim voltmetrom (4) izmeriti napon U na grejaču (2). Izmerene podatke uneti u tabelu 8.1. Snimiti krivu grejanja merenjem temperature θ na svakih 30

Table 8.1 Merenje specifične toplote vode.

m_b [g]	m_{bv} [g]	m_v [g]	U [V]

sekundi dok temperatura vode ne dostigne oko 80°C . Podatke dobijene merenjem unositi u tabelu 8.2.

Table 8.2 Merenje specifične toplote vode - zaglavlje table za krivu grejanja.

No.	t [s]	θ [$^{\circ}\text{C}$]

2) Merenje specifične latentne toplote isparavanja vode: Nakon što temperatura vode u termos-boci premaši vrednost od oko 80°C , započinje drugi deo merenja u kojem se određuje specifična latentna toplota isparavanja vode. Saška se dok voda ne počne da ključa. Tada digitalni termometar pokazuje temperaturu 100°C , para počinje da izlazi kroz crevo (8) a masa koju pokazuje digitalna vaga (10) počinje da se smanjuje. Resetovati digitalni hronometar (7), izmeriti početnu masu $m(0)$ sistema na vagi, te nastaviti sa merenjem ove mase $m(t)$ u funkciji vremena t . Smanjenje mase $\Delta m = m(0) - m(t)$ nastaje isparavanjem vode. Merenja mase vršiti na svaki minut. Prekinuti merenja i **isključiti prekidač** (5) kada ispari oko 100g vode. Podatke dobijene merenjem unositi u tabelu 8.3.

3) Merenje specifične latentne toplote topljenja vode: Nakon završetka drugog dela merenja sačekati oko 10 minuta da sva para nagomilana u termos-boci izadje iz nje. Izmeriti na digitalnoj vagi masu m_1 termos-boce sa njenim

Table 8.3 Merenje specifične latentne toplote isparavanja vode - zaglavlje tabele.

No.	t [s]	m [g]

sadržajem. Zapisati temperaturu θ_0 koju pokazuje digitalni termometar, pa uzeti oko 200g vode iz posude u kojoj se nalazi smeša leda i vode i uneti taj led u termos-bocu. Termos-bocu zatvoriti. Izmeriti novu masu m_2 termos-boce sa njenim sadržajem nakon dodavanja leda. Masa dodatog leda je $m_l = m_2 - m_1$. Usled topljenja leda, temperatura u termosu će početi da se smanjuje, a kada se sav led istopi - temperatura će se ustaliti. Kao i ostale podatke dobijene u ovoj fazi merenja, zapisati temperaturu ravnoteže θ_r u tabeli 8.4.

Table 8.4 Merenje specifične latentne toplote topljenja vode.

m_1 [g]	m_2 [g]	m_l [g]	θ_0 [°C]	θ_r [°C]

8.5 Obrada eksperimentalnih podataka

1) **Specifična toplota vode:** Nacrtati krivu grejanja na osnovu podataka unetih u tabelu 8.1. Specifična toplota vode je približno konstantna u intervalu temperatura od 0°C do 100°C. Stoga je promena temperature $\Delta\theta = \Delta q / (m_v c + C) = U^2 \Delta t / [(m_v c + C) R_g]$ linearno srazmerna intervalu vremena Δt u kojem ta promena nastaje; C je toplotni kapacitet mernog sistema. Stoga bi eksperimentalne tačke trebalo da leže na pravoj

$$\theta(t) = at + b, \quad (8.6)$$

koeficijenta pravca

$$a = \frac{U^2}{(m_v c + C) R_g}. \quad (8.7)$$

Odrediti koeficijent pravca a grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucertati mnk pravu. Na osnovu vrednosti za koeficijent pravca a dobijene metodom najmanjih kvadrata izračunati specifičnu toplotu vode

$$c = \frac{U^2}{m_v R_g a} - \frac{C}{m_v}, \quad (8.8)$$

i proceniti njenu apsolutnu grešku.

2) **Specifična latentna toplota isparavanja vode:** Količina toplote $\Delta Q =$

$U^2 \Delta t / R_g$, koju oslobodi grejač u toku vremena Δt , se troši na isparavanje vode i na vršenje rada ΔA potrebnog da se zapremina vode koja isparava poveća od vrednosti V_t (koju ova voda ima u tečnom stanju) do zapremine V_p nastale vodene pare. Smatrajući pritisak p konstantnim, vredi $\Delta A = p(V_p - V_t) \approx pV_p$, obzirom da je $V_p \gg V_t$. Aproksimativno tretirajući nastalu vodenu paru kao idealan gas, lako nalazimo

$$\Delta A = \frac{RT_{100}}{M} \Delta m,$$

gde je Δm masa vode koja je isparila, $M = 18g$ - molarna masa vode, R - univerzalna gasna konstanta, a $T_{100} = 373,15K$ temperatura ključanja vode, tako da je

$$\frac{RT_{100}}{M} = 172400 \text{ J/kg}. \quad (8.9)$$

Stoga je $\Delta Q = (q_i + \frac{RT_{100}}{M}) \Delta m$, odakle se vidi da je masa Δm vode koja je isparila proporcionalna vremenu Δt njenog ključanja:

$$\Delta m = \frac{U^2}{R_g(q_i + RT_{100}/M)} \Delta t,$$

Sledi da se masa $m(t)$ termos-boce sa ključalom vodom linearno smanjuje sa vremenom za masu isparile vode:

$$m(t) = m_0 - \frac{U^2}{R_g(q_i + RT_{100}/M)} t, \quad (8.10)$$

gde je m_0 masa termos-boce sa ključalom vodom u trenutku $t = 0$.

Grafički predstaviti izmerene vrednosti m u funkciji vremena t , sadržane u tabeli 8.4; ovi podaci bi trebalo da leže na pravoj $m = m_0 - at$, gde je a - apsolutna vrednost koeficijenta pravca koju treba naći grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucrtati mnk pravu. Na osnovu izraza

$$q_i = \frac{U^2}{aR_g} - \frac{RT_{100}}{M}, \quad (8.11)$$

koji sledi iz jednačine (8.10), naći specifičnu latentnu toplotu isparavanja vode q_i i proceniti njenu apsolutnu grešku.

3) Specifična latentna toplota topljenja vode: Količina toplote ΔQ potrebna da se uneti led mase m_l i temperature $0^\circ C$ istopi, a zatim zagreje do temperature ravnoteže θ_r je $\Delta Q = m_l(q_t + c\theta_r)$. Ovu toplotu oslobadjaju, hladeći se od početne temperature θ_0 do temperature ravnoteže θ_r , merni sistem toplotnog kapaciteta C i voda mase $m_v = m_1 - m_b$ koja se nalazila u termosu pre unošnje leda; m_b je masa termos-boce izmerena pri određivanju specifične toplote vode. Stoga je

$$m_l(q_t + c\theta_r) = (m_v c + C) \cdot (\theta_0 - \theta_r),$$

odakle je

$$q_t = \frac{(m_v c + C) \cdot (\theta_0 - \theta_r)}{m_l} - c\theta_r. \quad (8.12)$$

Izračunatu specifičnu latentnu toplotu topljenja vode koristeći izmerenu vrednost za specifičnu toplotu vode c .

9 Odredjivanje koeficijenta toplotne provodnosti čvrstih tela

AUTORI EKSPERIMENTA: Srdjan Bukvić i Djordje Spasojević

9.1 Uvod

Na osnovu I zakona termodinamike, za svaki sistem vredi

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dA}{dt}, \quad (9.1)$$

gde član dQ/dt predstavlja količinu toplote koju sistem prima iz okoline po jedinici vremena t , član dE/dt - promenu energije E sistema po jedinici vremena, dok član dA/dt predstavlja rad koji sistem izvrši nad okolinom po jedinici vremena. Za sistem koji je nepokretan¹ i koji ne razmenjuje energiju sa okolinom u vidu rada, promene energije se svode na promene unutrašnje energije U sistema ($dE/dt = dU/dt$), te se prethodni izraz svodi na

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (9.2)$$

Dobar primer ovakvog sistema predstavlja čvrsto telo koje je nepokretno u odnosu na laboratorijski sistem reference i kod kojeg je razmena energije sa okolinom u vidu rada zanemarljiva. Razmena toplote ovakvog tela (ili bilo kog njegovog dela) sa okolinom se vrši putem *provodjenja toplote* pri kojem se, posredstvom međučestičnih interakcija, prenosi energija termalnog kretanja sa svake čestice koje poseduju višu energiju termalnog kretanja na njene susede sa nižom energijom termalnog kretanja². Provodjenje toplote se pogodno opisuje *vektorom toplotnog provodjenja*³ $\vec{q}(\vec{r}, t)$ koji svojim pravcem i smerom u svakoj tački prostora \vec{r} i svakom trenutku vremena t određuje pravac i smer prenošenja toplote, dok njegov intenzitet daje količinu toplote koja po jedinici vremena i po jedinici površine prodje kroz površ normalno postavljenu na pravac ovog vektora. Stoga vredi

$$\frac{dQ}{dt} = \oint_S \vec{q} \cdot d\vec{S}, \quad (9.3)$$

gde se integracija vrši po graničnoj površini S posmatranog sistema.

¹ Misli se na sistem koji je nepokretan u odnosu na nekog inercijalnog posmatrača.

² U čvrstim telima, svaka čestica osciluje oko svog ravnotežnog položaja i energija ovakvog oscilovanja je energija termalnog kretanja. U najgrubljoj aproksimaciji, oscilacije čestica čvrstog tela oko svojih ravnotežnih položaja su harmonijske. Realno, oscilacije su (slabo) anharmonijske, što omogućava razmenu energije između modova oscilovanja i posredno dovodi do niza efekata u koje spadaju provodjenje toplote i termalno širenje.

³ Preciznije, \vec{q} je vektor gustine fluksa toplotnog provodjenja.

Za izotropne materijale, vredi Furijeov zakon provodjenja:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla \cdot T, \quad (9.4)$$

gde je $\nabla \cdot T$ gradijent temperature T , a κ - veličina koja se naziva *koeficijent toplotne provodnosti*; podrazumeva se da se sve veličine u izrazu (9.4) odnose na istu tačku prostora i isti trenutak vremena.

Koeficijent toplotne provodnosti κ zavisi od vrste materijala, a pri datoj strukturi materijala od njegove lokalne temperature $T(\vec{r}, t)$ i gustine $\rho(\vec{r}, t)$. Često je zavisnost od temperature a naročito gustine slaba, te je kod homogenih materijala koeficijent toplotne provodnosti konstanta materijala, ista u svim tačkama prostora \vec{r} i trenucima vremena t . Ovo je dobro ispunjeno za mnoge metale u intervalu temperatura od 0°C do 100°C .

Najjednostavniji odnosi, koji se dalje mogu iskoristiti za eksperimentalno određivanje koeficijenta toplotne provodnosti κ opisane klase jednostavnih materijala, se dobijaju u uslovima stacionarnog provodjenja ($dU/dt = 0$) za uzorke materijala u obliku plan-paralelne ploče na čijim se granicama održavaju konstantne temperature T_1 i T_2 . Tada se toplota provodi od granične površi sa višom temperaturom T_2 ka površi sa nižom temperaturom T_1 . Postavimo x -osu normalno na plan-paralelnu ploču tako da je jednačina granične površi niže temperature T_1 data sa $x = 0$. Tada sve veličine od interesa mogu zavisiti samo od x -koordinate; specijalno, vektor \vec{q} leži duž x -ose, smer mu je suprotan smeru x -ose, a njegova projekcija q_x na x -osu zavisi samo od x -koordinate. Uočimo unutar ploče bilo koje dve ravni $x = x_1$ i $x = x_2$ koje su paralelne ploči. Pošto je provodjenje toplote stacionarno to je $q_x(x_1) = q_x(x_2)$, odakle sledi

$$\frac{dT}{dx} = \text{const}. \quad (9.5)$$

Kako je $T(0) = T_1$ i $T(l) = T_2$, gde je l debljina ploče, to iz $T_2 - T_1 = \int_0^l \left(\frac{dT}{dx}\right) dx = \left(\frac{dT}{dx}\right)l$ nalazimo

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{l}, \quad (9.6)$$

i dalje

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l}x + T_1, \quad (9.7)$$

što pokazuje da temperatura $T(x)$ unutar ploče raste linearno sa x od niže temperature T_1 na granici $x = 0$ do više temperature T_2 na granici $x = l$.

Na osnovu izraza (9.6), sledi

$$q = \kappa \frac{T_2 - T_1}{l}, \quad (9.8)$$

što se može iskoristiti za merenje koeficijenta toplotne provodnosti κ pod uslovom da možemo meriti gustinu fluksa toplotnog provodjenja q i temperature T_1 i T_2 .

9.2 Zadatak

Izmeriti koeficijent toplotne provodnosti κ za materijal po izboru nastavnika.

Opis aparature

Shema aparature koju koristimo za merenje koeficijenta toplotne provodnosti κ na osnovu izraza (9.8) je data na slici 9.1; prototip izradio S. Tekić. Uzorak (1) materijala oblika šipke (cilindra) prečnika $D = (14 \pm 0.1)\text{mm}$ i dužine $l_0 = 20\text{cm}$. Grejanje uzorka se vrši grejačem (2) - otpornik čiji je termogeni otpor $R_g = (20.0 \pm 0.3)\Omega$ praktično konstantan u intervalu temperatura od 20°C do 100°C . Osim na donjem kraju, uzorak je toplotno izolovan gumenom izolacijom (3). Jednosmerna struja kroz grejač se dobija iz izvora (4) čiji se izlazni napon reguliše potenciometrom (5) a meri voltmetrom (6). Merenje temperature se vrši uz pomoć dva termopara (7) i (8). Termopar TP2 meri temperaturu T_2 u blizini grejača, dok termopar TP1 meri temperaturu T_1 u blizini suprotnog (slobodnog) kraja uzorka. Rastojanje između termoparova je $l = (150.0 \pm 0.4)\text{mm}$. Slobodni kraj se radi efikasnijeg odvodjenja toplote potapa u sud sa vodom (9). Stalak (10) služi kao nosač uzorka.

Postupak merenja

Uključi se jednosmerni izvor (4). Okretanjem potenciometra (5) se izabere željeni napon U na izvoru; ovaj napon se meri voltmetrom (6). Snaga (količina toplote po jedinici vremena) koju oslobadja grejač je

$$P = \frac{U^2}{R_g}. \quad (9.9)$$

Upozorenje: Napon na izvoru ne sme biti izvan opsega od 4.4V do 8.7V.

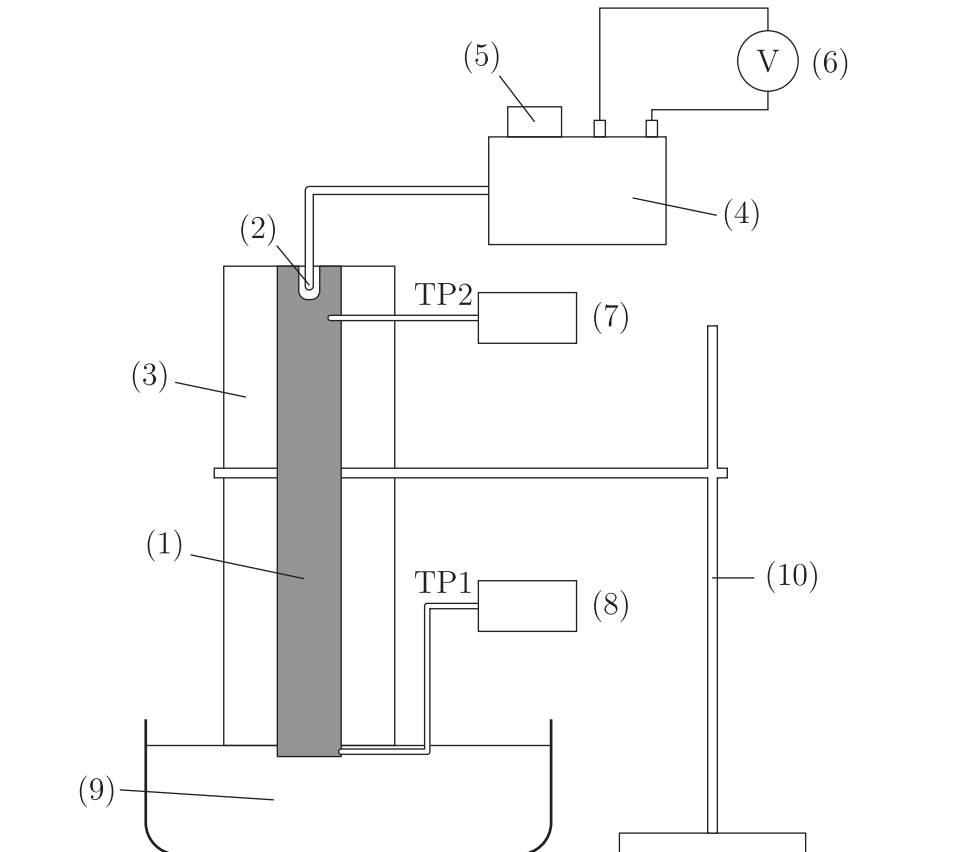
Sačekati dok se pokazivanja oba termopara (7) i (8) ne ustale, što ukazuje da je sistem prešao u stacionarno stanje. Kako je $q = 4P/\pi D^2$, iz jednačine (9.8) nalazimo

$$\Delta T = \frac{4l}{\pi D^2 R_g \kappa} U^2, \quad (9.10)$$

gde je $\Delta T \equiv T_2 - T_1$. Merene veličine (U , T_1 i T_2) uneti u tabelu 1. Merenja izvršiti pri najmanje 6 različitih vrednosti snage grejanja P (odnosno napona U).

Table 9.1 Merenje koeficijenta toplotne provodnosti - zaglavlje tabele.

No.	U [V]	T_1 [$^\circ\text{C}$]	T_2 [$^\circ\text{C}$]	U^2 [V^2]	ΔT [$^\circ\text{C}$]



Slika 9.1 Shema aparature za merenje koeficijenta toplotne provodnosti; (1) - uzorak materijala u obliku šipke; (2) - grejač; (3) - toplotna izolacija; (4) - izvor jednosmerne struje; (5) - potenciometar izvora; (6) - voltmeter; (7) - termopar TP2; (8) - termopar TP1; (9) - sud sa vodom; (10) - stalak; nacrtali mr Zorica Pajević i mr Duško Latas.

Obrada rezultata merenja

Grafički predstaviti zavisnost ΔT u funkciji U^2 . Eksperimentalne tačke bi trebalo da leže na pravoj strmine (koeficijenta pravca)

$$a = \frac{4l}{\pi D^2 R_g \kappa}, \quad (9.11)$$

Odrediti koeficijent pravca a grafičkom metodom i metodom najmanjih kvadrata (mnk); ucrtati mnk pravu. Na osnovu vrednosti za koeficijent pravca a izračunati koeficijent toplotne provodnosti κ i proceniti njegovu grešku.