BOŽIDAR NIKOLIĆ

FIZIČKA MEHANIKA

FIZIČKI FAKULTET ♦ KUĆICA SLOBODICA

Autor: Prof. dr Božidar Nikolić
Fizički fakultet, Univerziteta u Beogradu

Fizička mehanika

Recenzirana skripta

Izdavač: Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet

Recenzenti: Prof. dr Maja Burić,
Fizički fakultet, Univerziteta u Beogradu
Prof. dr Goran Poparić,
Fizički fakultet, Univerziteta u Beogradu

ISBN 978-86-84539-23-8

Učenje bez razmišljanja je uzaludno.

Onaj koji uči bez razmišljanja je izgubljen. Onaj koji razmišlja bez učenja je u velikoj opasnosti.

Konfučije, 551–479. p. n. e, Kina

I learned very early the difference between knowing the name of something and knowing something. (Vrlo rano sam naučio razliku između poznavanja naziva nečega i poznavanja nečega)

Ričard Fejnman, 1918–1988., SAD

Sadržaj

1

Modeli, fizičke veličine i osnovne jedinice

Fizika je osnovna prirodna nauka. U okviru fizike se proučavaju osnovni prirodni procesi čije razumevanje je neophodno za mnoge druge nauke i za tehnologiju. Bavljenje fizikom predstavlja veliku intelektualnu avanturu. Često ima teškoća, ponekad je frustrirajuće i bolno ali svaki, ma koliko bio mali pomak u nepoznato donosi ogromno zadovoljstvo. Sa druge strane, svaki mali pomak je još jedan kamičak u mozaiku opšte slike sveta oko nas.

Kada fizičari proučavaju neku prirodnu pojavu oni pokušavaju da pronađu uzrok za nju i razloge zbog kojih se ona odvija na način na koji se odvija. Da bi dobro razumeli pojavu moraju da razdvoje značajne činjenice od onih koje nisu toliko značajne. Za tako izdvojene činjenice potrebno i napraviti model koji će dobro opisati pojavu. Uz model potrebno je osmisliti eksperiment ili niz eksperimenata u kojima bi se proverile pretpostavke i kvalitet predloženog modela. Posle niza teorijskih i eksperimentalnih provera dolazi se do teorije koja dovoljno dobro opisuje pojavu. Ali tu nije kraj istraživanjima. Ako se teorija dobro slaže sa eksperimentalnim rezultatima, onda je moguće da ona predvidi neke nove pojave, koje do tada nisu primećene. Sa druge strane, uvek je moguće doraditi postojeći model da bi se postiglo bolje slaganje sa eksperimentom ili da bi se proširila oblast u kojoj je model dobar. Ceo proces istraživanja se tako nastavlja. Dobro, čak rigorozno, proverena teorija, ili grupa teorija koje se bave sličnim sistemima dobijaju status fizičkog zakona ili principa.

U okviru ovog kursa klasične mehanike biće proučavani osnovni zakoni mehanike: Njutnovi zakoni kretanja, Njutnov zakon gravitacije i zakoni održanja (energije, impulsa i momenta impulsa). Zatim će, primenom osnovnih zakona, biti analizirani vrlo važni mehanički problemi.

Sve počinje opisom osnovnih modela, koji će biti korišćeni. Pored toga biće date osnovne fizičke veličine i njihove jedinice, biće istaknut značaj dimenzionalne analize kao i procene reda veličine. Ova glava će biti završena delom o granicama važenja klasične mehanike.

Lep primer iz istorije za razvoj jednog fizičkog zakona je univerzalni zakon gravitacije. Sve je počelo pre više od dva milenijuma kada se čovek zapitao zašto noćno nebo izgleda tako kako izgleda. Zašto se planete kreću na način kako ih vidimo? Postojali su razni modeli koji su opisivali kretanje. Praktično najveću kolekciju podataka o kretanjima nebeskih tela je napravio danski astronom Tiho Brahe u XVI veku. Bio je pristalica geocentričnog sistema, podaci koje je imao su se slagali sa tim modelom. Međutim, njegov mlađi saradnik Johan Kepler je koristeći ovu ogromnu bazu podataka i na osnovu svojih merenja formulisao tri zakona kretanja nebeskih tela, koji su bili bazirani na heliocentričnom sistemu. Njegovi zakoni su imali mnogo jednostavnije oblike i na osnovu njih je bilo mnogo jednostavnije predvideti položaje planeta u budućnosti. Iako vrlo koncizni i elegantni ovi zakoni su i dalje bili opis kretanja, nisu nudili odgovor na pitanje zašto je kretanje takvo. Posle Keplera je Isak Njutn otkrio univerzalni zakon gravitacije. Otkrio je da je gravitaciona sila uzrok svim kretanjima u vidljivom svemiru. Ispostavilo se da se Keplerovi zakoni dobijaju iz Njutnovih. Izgledalo je da je Njutnov zakon gravitacije (uz ostale Njutnove zakone) tačan, sve dok nisu primećene neke anomalije na koje je ukazao Albert Ajnštajn, kada je formulisao opštu teoriju relativnosti. Priča o gravitaciji i dalje nije gotova, i dalje se traga za kvantnom gravitacijom. Dakle više od dve hiljade godina traje potraga za potpunim razumevanjem gravitacije, i taman kad se pomisli da je sve jasno pojavi se neka sitnica koja se ne slaže, i rad se nastavlja. Slična priča se može ispričati o mnogim drugim značajnim modelima i teorijama.

Osnovni modeli u mehanici

Prirodne pojave su vrlo složene. Razmotrimo padanje gumene lopte u gravitacionom polju Zemlje. Da bi se problem rešio potrebno je pre svega utvrditi koje sve sile deluju na loptu (vidi glavu 3). Na loptu deluje gravitaciona sila Zemlje, pored toga lopta se nalazi u vazduhu, pa na nju deluje i sila potiska. Lopta se kreće u odnosu na Zemlju koja rotira pa na nju deluje i centrifugalna sila. Kada lopta počne da pada na nju će početi da deluje i sila otpora vazduha, kao i Koriolisova sila zbog toga što se lopta kreće u sistemu koji rotira (glava 3). Strogo gledano gravitaciono ubrzanje se menja sa udaljenošću od centra Zemlje. Stvar se dodatno komplikuje zbog toga što sila potiska vazduha zavisi od gustine vazduha i zapremine lopte. Gustina vazduha može da se menja sa visinom, pa i to treba uzeti u obzir. Ako je lopta tankih zidova onda promena u temperaturi i pritisku vazduha u okolini može da dovede do promene temperature vazduha u lopti što konačno može da dovede do promene zapremine lopte tokom kretanja. Sila otpora vazduha zavisi posredno i od temperature vazduha, koja može da se menja, a zavisi i od brzine lopte i konačno i od dimenzija lopte. Dakle, jedan običan problem padanja u gravitacionom polju može da bude veoma složen, možda i nerešiv.

Tada nastupa sposobnost uočavanja onog što je vrlo bitno i onoga što se može zanemariti. Pre svega može se proceniti da se gravitaciona sila ne menja mnogo za prilično veliki opseg visina u odnosu na površinu Zemlje. U tom slučaju se može uzeti da je gravitaciona sila konstantna. Centrifugalna sila zbog rotacije Zemlje je nekoliko promila gravitacione sile, pa se može zanemariti. Sila potiska vazduha je onoliko puta manja od gravitacione koliko puta je manja gustina vazduha od gustine lopte, pa se najčešće može zanemariti. Koriolisova sila zavisi od geografske širine na kojoj se telo kreće. Pored toga intenzitet joj je mali za male brzine tela, pa se i ona može zanemariti. Gustina i temperatura vazduha zaista zavise od visine, ali za razumnu visinu sa koje je bačena lopta može se uzeti da se ni gustina ni temperatura vazduha ne menjaju. Promena pritiska nije dovoljna da značajno utiče na promenu zapremine lopte. Konačno, ostaju konstantna gravitaciona sila i sila otpora vazduha, za koju iz navedenih razloga možemo uzeti da ne zavisi od temperature. Problem se može i dalje pojednostaviti u slučaju tela malih dimenzija kada se sila otpora vazduha može zanemariti u odnosu na gravitacionu silu, i tek tada imamo situaciju koju dobro poznajemo kao slobodan pad tela.

Koliko korektno i precizno izvedenih eksperimenata je potrebno da bi se oborila neka teorija? A koliko da bi se potvrdila?

Materijalna tačka

U svetlu gornjeg primera sa loptom, kada imamo pojavu u kojoj su dimenzije tela nebitne, onda problem realnog tela možemo da zamenimo situacijom u kojoj sve relevantne sile deluju na jednu tačku (telo zanemarljivih dimenzija) koja ima masu kao i realno telo. Ovaj model se naziva modelom *materijalne tačke*. Model materijalne tačke se ne primenjuje samo na *mala tela*, već je jedini kriterijum da li su dimenzije tela važne i utiču na kretanje, ili ne utiču. Na primer, za kretanje Zemlje oko Sunca sasvim je korektno uzeti da je Zemlja materijalna tačka, a kliker koji se spušta niz strmu ravan ako može da se kotrlja onda ne može da se opiše kao materijalna tačka. U modelu materijalne tačke sve tačke na telu se kreću na isti način, odnosno imaju iste brzine u svakom trenutku.

Apsolutno kruto telo

Kruto (apsolutno) telo je model u kome je telo sistem materijalnih tačaka koje su uvek na istom međusobnom rastojanju. To znači da se deformacije tela tokom kretanja zanemaruju. Vredi napomenuti da isto telo u jednom problemu kretanja može sasvim zadovoljavajuće da bude opisano modelom materijalne tačke, u nekom drugom problemu da bude neophodno da se primeni model krutog tela, dok u nekom trećem problemu ni model krutog tela ne mora da bude dovoljno dobar.

Definicija krutog tela može da posluži za definisanje osa koordinatnog sistema. Naime ose se mogu definisati kao kruta tela, pa se onda, bio koordinatni sistem pokretan ili ne, ose tokom kretanja ne deformišu.

Harmonijski oscilator

Harmonijski oscilator je model fizičkog sistema u kome na telo zanemarljivih dimenzija deluje sila koja se menja u zavisnosti od rastojanja tela od ravnotežnog položaja (mesto u kome je sila jednaka nuli), i uvek je usmerena ka ravnotežnom položaju. Zavisnost od rastojanja je linearna, a koeficijent proporcionalnosti zavisi od nekoliko stvari ali je važno da je u opsegu kretanja tela konstantan.

U Arhimedovo vreme neki kralj Gelon je tvrdio da se ne mogu prebrojati zrna peska na nekoj obali. Arhimed je, da bi pokazao da kralj greši, procenio koliko bi zrna peska stalo u ceo tada poznati svemir. Dobio je da je taj broj manji od 10^{63}. To je samim tim značilo da zrna peska na bilo kojoj obali mora da bude mnogo, mnogo manje. Zanimljivo je da je svoj račun Arhimed bazirao na dve procene. Procenio je dimenzuju zrna peska (tako što je procenio koliko zrna peska može da stane u jedno zrno maka, potom koliko zrna maka može da se naslaže do dužine od jednog palca) i dimenziju svemira (koristio je model Aristarha sa Samosa, tvorca prvog heliocentričnog sistema, u tom modelu svemir je bio prečnika oko dve svetlosne godine).

Neprekidna sredina

Model neprekidne sredine (kontinuuma) se primenjuje u fizici fluida (gasovi i tečnosti). Fluid se posmatra kao deo prostora u kome je gustina funkcija položaja u prostoru, a ne kao skup ogromnog broja atoma ili molekula. Može se reći da je model neprekidne sredine u stvari model u kome su molekuli „razmazani" po prostoru.

Aproksimacije

Kada se pri opisu nekog fizičkog sistema upotrebi neki model to ne mora da bude dovoljno da bi problem bio rešiv, ili jasan. Često je potrebno pojednostaviti sliku. Pojednostavljenja se, bazirana na čvrstim argumentima, nazivaju *aproksimacijama*. U primeru sa loptom napravljen je niz aproksimacija, na primer: da je gravitaciona sila konstantna, da se pritisak i temperatura vazduha malo menjaju sa visinom, itd. Za dobru aproksimaciju u novom problemu je potrebno dosta iskustva. To iskustvo mora da bude zasnovano na razumevanju osnovnih fizičkih zakona ali i na dobro zasnovanim procenama. U nastavku ove glave posebna pažnja će biti posvećena procenama.

Fizičke veličine i osnovne merne jedinice

Vrednost neke fizičke veličine je zadata brojčanom vrednošću i odgovarajućom mernom jedinicom. U mehanici osnovne fizičke veličine su dužina, vreme i masa. Samim tim se merne jedinice za ove

Koristeći podatke iz primera sa Arhimedom izračajte prečnik zrna peska koji se dobija iz njegovog modela. Koliko je njegova procena bila dobra?

fizičke veličine mogu uzeti kao osnovne. Kao što je dobro poznato u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) osnovna jedinica za dužinu je metar (m), za vreme sekunda (s) i za masu kilogram (kg).

Fizička veličina	Naziv	Oznaka
Dužina	metar	m
Masa	kilogram	kg
Vreme	sekunda	s
Jačina električne struje	amper	A
Termodinamička temperatura	kelvin	K
Količina supstancije	mol	mol
Svetlosna jačina	kandela	cd

Tabela 1.1: Međunarodni sistem jedinica (SI).

Redovi veličina i procena

Bavljenje fizikom često podrazumeva i put kroz nepoznate predele, pa je važno steći sposobnost procene i osećaj za redove veličina. Još od antičkih vremena ljudi su koristili procenu kada nisu bili u stanju da nešto izmere ili izračunaju.

Tabela 1.2: Redovi veličina karakterističnih dužina i vremena.

Objekat	Veličina (m)
Proton	10^{-15}
Atom	10^{-10}
Virus	10^{-7}
Velika ameba	10^{-4}
Plod lešnika	10^{-2}
Čovek	10^{0}
Visoka planina	10^{4}
Zemlja	10^{7}
Sunce	10^{9}
Rastojanje od Zemlje so Sunca	10^{11}
Sunčev sistem	10^{13}
Rastojanje do najbliže zvezde	10^{16}
Mlečni put	10^{21}
Vidljivi svemir	10^{26}

Vremenski interval	Vreme (s)
Vreme potrebno svetlosti da pređe rastojanje jezgra	10^{-23}
Period vidljive svetlosti	10^{-15}
Period mikrotalasa	10^{-10}
Poluživot miona	10^{-6}
Period najvišeg tona koji može da se čuje	10^{-4}
Period otkucaja srca čoveka	10^{0}
Poluživot slobodnog neutrona	10^{3}
Dužina dana	10^{5}
Zemljina godina	10^{7}
Dužina života čoveka	10^{9}
Poluživot plutonijuma-239	10^{12}
Starost planinskih venaca	10^{15}
Starost Zemlje	10^{17}
Starost svemira	10^{18}

Primer 1.1

Koliko zrna pšenice može da stane u jedan pun silos?

Rešenje: Prvo je potrebno pronaći podatke o kapacitetu silosa i veličini ili masi zrna pšenice. Najveći silosi u Srbiji imaju kapacitet od oko 50000 tona. Standardna masa 1000 zrna pšenice je oko 50 g. Dakle u velike silose može da stane oko 5×10^{7} kg, pšenice, a masa jednog zrna je 5×10^{-5} kg. To znači da u ovim silosima ima oko 10^{12} zrna pšenice, što je oko 10 miliona puta manje zrna nego u poznatom srednjevekovnom problemu sa zrnima na šahovskoj tabli.

Primer 1.2

Za koliko se smanji debljina gazećeg sloja automobilske gume posle pređenog jednog kilometra puta?

Rešenje: Gazeći sloj autombilske gume je sloj u kome su šare i on je u stalnom kontaktu sa podlogom. Njegova debljina zavisi od vrste guma, proizvođača i drugih stvari. Pretpostavićemo da je debljina sloja reda veličine 1 cm. Nije toliko važno da može da bude 2 ili 3 cm, pošto je to isti red veličina. Sada nam treba neki podatak koji može da se iskoristi za procenu. Ako se raspitate kod vozača možete da dobijete podatak koliko kilometara mogu da pređu automobilom sa istim gumama. Za kvalitetne gume se tvrdi da je moguće preći 60 000 km bez promene guma. Sada imamo sve potrebne podatke. Za pređenih 60 000 km oljuštiće se 1 cm gume. Onda će za jedan pređeni kilometar biti oljušteno 1 cm/60000=1.7 $\times 10^{-7}$m, odnosno približno 2×10^{-7} m po pređenom kilometru.

Dimenzionalna analiza

U fizici pojam *dimenzije* ima više značenja. Pored standardnog pojma dimenzionalnosti prostora i opšteg naziva za dužinu, visinu i širinu, dimenzija se koristi i u vezi sa mernom jedinicom neke fizičke veličine. Kada se kaže, na primer, da neka konstanta ima dimenziju dužine, to znači da je njena merna jedinica ista kao i za dužinu. Ako je neka fizička veličina bezdimenzionalna onda ona nema jedinicu, odnosno ima samo brojčanu vrednost, odnosno ta fizička veličina se predstavlja neimenovanim brojem.

Plankova konstanta i moment impulsa, na primer, imaju istu dimenziju, odnosno mogu se izraziti u istim mernim jedinicama.

U svakoj jednačini obe strane moraju da imaju iste dimenzije.

Primer 1.3

Pritisak u tečnosti zavisi od gustine tečnosti i njene brzine. Naći kombinaciju gustine i brzine koja će imati dimenzije pritiska.

Rešenje: Merna jedinica za pritisak je paskal. $1\text{Pa} = \frac{1\text{N}}{1\text{m}^2}$, odnosno $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\cdot\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$. Zavisnost pritiska od gustine i brzine može da se napiše kao $p = \rho^k v^n$. Kada se uvrste merne jedinice dobija se $\frac{\text{kg}^k}{\text{m}^{3k}}\frac{\text{m}^n}{\text{s}^n} = \frac{\text{kg}^k}{\text{m}^{3k-n}\cdot\text{s}^n}$. Poređenjem sa dimenzijama pritiska dobija se da je $k = 1$ i $n = 2$, odnosno $p \propto \rho v^2$.

Primer 1.4

Da li je tačno: (a) Dve fizičke veličine moraju da budu istih dimenzija da bi mogle da se saberu. (b) Dve fizičke veličine moraju da budu istih dimenzija da bi mogle da se pomnože.

Rešenje: Pod (a) je tačno, samo treba voditi računa da fizičke veličine budu izražene u istim mernim jedinicama. Na primer dužinu izraženu u metrima i dužinu izraženu u mikronima ne možemo tek tako da saberemo, moramo da izrazimo obe dužine u metrima ili obe u mikronima; (b) nije tačno, ne postoji nikakvo ograničenje za dimenzije fizičkih veličina koje se množe ili dele.

Granice važenja klasične mehanike

Svaka fizička teorija ima svoja ograničenja, odnosno granice važenja. Tako i klasična mehanika ima jasne granice primenljivosti. Pridev klasična u nazivu ima dvojako značenje. Klasična kao nerelativistička i klasična kao ne-kvantna.

U prvom slučaju, brzina kretanja tela mora da bude mnogo manja od brzine svetlosti ($v \ll c$). To za posledicu ima da prostorni i vremenski intervali ostaju isti u svakom referentnom sistemu u kom se mere. Ova posledica je zapravo njutnovski koncept apsolutnog prostora i vremena. U slučaju kada se telo kreće brzinom koja je uporediva sa brzinom svetlosti prostor i vreme više nisu apsolutni (Specijalna teorija relativnosti).

Tabela 1.3: Redovi veličina karakterističnih masa.

Objekat	Masa (kg)
Elektron	10^{-30}
Proton	10^{-27}
Aminokiselina	10^{-25}
Hemoglobin	10^{-22}
Virus gripa	10^{-19}
Velika ameba	10^{-8}
Kap kiše	10^{-6}
Mrav	10^{-4}
Čovek	10^{2}
Veliki kombajn	10^{4}
Piramida	10^{10}
Zemlja	10^{24}
Sunce	10^{30}
Mlečni put	10^{41}
Svemir	$> 10^{53}$

U drugom slučaju sistemi koji se mogu opisati klasično moraju da budu takvi da su kvantni efekti zanemarljivo mali. Po pravilu, sistemi koji ne mogu da se opišu klasičnom fizikom su mali po dimenzijama, od dimenzija atoma pa naniže. Ipak postoje izuzeci, sistemi koji su makroskopski, a ne mogu se razumeti bez kvantne fizike (feromagneti, superprovodnici...).

Česta početnička greška je tvrdnja da je kvantna fizika dobra samo na malim skalama, a relativistička fizika dobra samo za velike brzine. To nije tačno. Svi sastavni delovi makroskopskog sveta su kvantni objekti, ali kada opisujemo mehaničko kretanje makroskopskih tela onda je kvantna priroda tela nebitna. Ali neke druge osobine makroskopskih tela mogu da zahtevaju kvantni opis. Isto je i sa relativnošću. Teoriju relativnosti možemo da primenimo na svako telo koje se kreće, ma koliko brzina bila mala, ali razlika je u odnosu na rezultat dobijen klasično, zanemarljivo mala. Na osnovu ovih argumenata se može reći da je klasična mehanika aproksimativna teorija za makroskopske sisteme koji se kreću malim brzinama.

Primer 1.5

Važne relacije u kvantnoj mehanici su Hajzenbergove relacije neodređenosti. Relacija koja povezuje neodređenost impulsa i položaja čestice je $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, gde je $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ Js. Neka na primer za telo mase $m = 1$ g ne možemo da odredimo položaj tela preciznije od 1 mm, odnosno $\Delta x =$ 1mm. Zamenom u relaciju neodređenosti dobija se da je neodređenost brzine $\Delta v \approx 6 \times 10^{-26} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ne postoji uređaj kojim bismo mogli ovako precizno da izmerimo brzinu. Dakle, u ovom slučaju možemo da znamo i položaj i brzinu tela sa gotovo proizvoljnom tačnošću. Međutim, ako posmatrmo elektron ($m = 9 \times 10^{-28}$g), u nekom atomu ($\Delta x < 10^{-10}$m), i jedino znamo da je on u atomu, onda se za neodređenost brzine dobija $\Delta v \approx 7 \times 10^{6} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, što je veće od brzine elektrona u atomu! Dakle, ako znamo gde je tačno elektron u atomu ne možemo da izmerimo njegovu brzinu, i obrnuto. Može se zaključiti da u jednostavnim slučajevima relacije neodređenosti mogu biti dobar kriterijum za primenljivost klasične teorije.

Fizika i matematika

„Matematika je jezik kojim je Bog napisao svemir.” (Galileo Galilej)

„Ako postoji Bog, on je sjajan matematičar.” (Pol Dirak)

„Ako želite da proučavate prirodu, da je razumete, neophodno je da razumete jezik kojim ona govori (matematiku).” (Ričard Fejnman)

Ovi citati velikana iz istorije nauke dovoljno govore koliko je matematika važna i neophodna u fizici. Matematika, odnosno njene oblasti, predstavljaju logički zatvorene strukture. Sa druge strane svi objekti u matematici su apstraktni. Na primer tačka, prava, funkcija... Da bi se matematički aparat adekvatno primenio u fizici potrebno je naći način kako realna fizička tela i sisteme opisati apstraktnim pojmovima. Zbog toga se realan fizički sistem mora idealizovati, aproksimirati ili modelovati nečim sa čim u matematici može da se radi.

Mnoge fizičke veličine su vektorske. Sabiranje vektora, na primer, je bazirano da euklidskoj geometriji. Euklidska geometrija podrazumeva ravan prostor u kome se radi. Ali da li je realan prostor u svetu oko nas ravan, i kako to uopšte utvrditi?

Primer 1.6

Uzmimo na primer putanje tela, ili zavisnost brzine ili ubrzanja od vremena. Opisujemo ih funkcijama, koje su po pravilu glatke, neprekidne. Ali rezultat makar i najpreciznijeg zamislivog eksperimenta bi dao samo diskretan skup tačaka.

Zadaci

Račun, jedinice, mali i veliki brojevi

1.1 Mesec se u nekoj tački na površini Zemlje vidi pod uglom od približno 0.524°. Ako se zna da je rastojanje između Zemlje i Meseca u trenutku posmatranja 3.84×10^8 m, izračunati poluprečnik Meseca.

1.2 Masa Sunca je 1.99×10^{30} kg. Sunce se u najvećoj meri sastoji od vodonika, sa vrlo malim procentom težih elemenata. Masa vodonikovog atoma je 1.67×10^{-27} kg. Koliko ima atoma vodonika u Suncu?

1.3 Pisac avanturističkog romana je smislio da mu glavni junak pobegne preko granice noseći u rukama kofer sa zlatom u vrednosti od milijardu dinara. Da li je to moguće? Da li bi junak lakše pobegao da se odlučio za dijamante u istoj vrednosti?

1.4 Ćelijska membrana je debela oko 7 nm. Koliko membrana treba da se naslaže jedna na drugu da bi im debljina bila 1 cm?

1.5 Ako vam pri brojanju novca treba oko jedne sekunde po novčanici, koliko vremena vam je potrebno da izbrojite milijardu dinara u apoenima od 10 dinara?

1.6 Masa atoma uranijuma je 4.0×10^{-25} kg. Koliko atoma uranijuma ima u 8 g čistog uranijuma?

1.7 Tokom letnje oluje palo je kiše toliko da se napravio sloj vode debeo 4.5 cm. Koliko je litara kiše palo po kvadratnom metru?

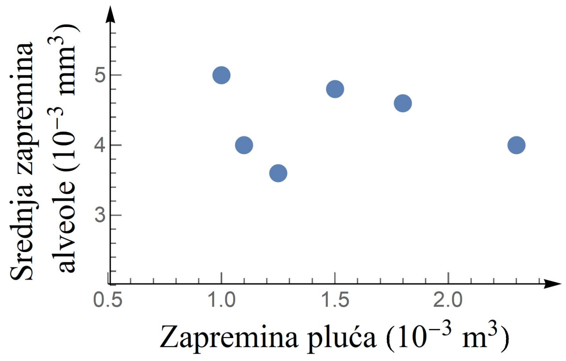
1.8 Poluprečnik jezgra atoma gvožđa je 5.4×10^{-15} m, a masa mu je 9.3×10^{-26} kg. (a) Kolika je gustina jezgra atoma gvožđa? (b) Kada bi Zemlja bila iste gustine kao i jezgro atoma gvožđa koliko bi bila velika?

1.9 Astronomska jedinica (AJ) je dužina jednaka rastojanju Zemlje od Sunca. Jedan parsek (pc) je rastojanje na kome se 1 AJ vidi pod uglom od $1''$. Jedna svetlosna godina (sg) je dužina puta koji pređe svetlost u vakuumu za jednu godinu. (a) Koliko ima parseka u jednoj AJ? (b) Koliko je jedan parsek metara? (c) Koliko jedna svetlosna godina ima metara? (d) Koliko je AJ u svetlosnoj godini? (e) Koliko je svetlosnih godina u jednom parseku?

1.10 Energija mirovanja je po znamenitoj Ajnštajnovoj jednačini $E = mc^2$, gde je m masa tela a c brzina svetlosti u vakuumu. Izračunajte energiju mirovanja elektrona. Izračunajte energiju mirovanja vode koja se nalazi u punoj kafenoj kašičici (kašičica obično zahvata oko 5 ml vode).

1.11 Izračunajte srednju gustinu Zemlje, uzimajući da je ona savršena lopta (srednja gustina je jednaka količniku mase i zapremine tela). Za oko pet milijardi godina naše Sunce će postati beli patuljak, imaće istu masu ali će mu prečnik biti oko 15000 km. Kolika će onda biti gustina Sunca? Prosečna neutronska zvezda ima oko 20 km u prečniku, a masa joj je kao i Suncu. Kolika je gustina takve neutronske zvezde?

1.12 Kiseonik i ugljen-dioksid ljudska krv razmenjuje u malim džepovima u plućima, koji se nazivaju alveole. Alveole imaju veliku površinu za razmenu gasova. Najnovija precizna merenja pokazuju da je ukupan broj alveola u prosečnim plućima oko 480×10^6, i da je prosečna zapremina jedne alveole oko $4.2 \times 10^6 \mu\text{m}^3$. (a) Izračunajte ukupnu zapreminu u kojoj se odvija razmena gasova u jednim plućima. Kolika je ova zapremina izražena u litrima? (b) Ako pretpostavimo da su alveole skoro sfernog oblika, koliki je prečnik prosečne alveole? (c) Kod ljudi zapremina pluća može prilično da se razlikuje. Na slici je prikazan rezultat merenja zapremine pluća, i srednje zapremine alveola za šest osoba. Na osnovu grafika šta možete da zaključite o vezi između veličine alveola, zapremine pluća i i broja alveola, šta se dešava sa brojem alveola i srednjom zapreminom jedne alveole kada se zapremina pluća povećava?



Procena

1.13 Koja fizička pojava, osim klatna ili atoma cezijuma, može da se iskoristi za merenje vremena?

1.14 Da li debljina lista papira može da se izmeri običnim lenjirom?

1.15 Većina napitaka se prodaje u aluminijumskim limenkama. Masa limenke je oko 15 g. (a) Proceniti broj limenki koje se iskoriste u Srbiji za godinu dana. (b) Proceniti ukupnu masu aluminijuma upotrebljenog za te limenke. (c) Ako je otkupna cena praznih limenki oko 70 dinara za kilogram, koliko vrede sve limenke sakupljene tokom jedne godine?

1.16 Znameniti fizičar Ričard Fejnman je još pedesetih godina dvadesetog veka predvideo neslućena dostignuća nanotehnologije, pa tako i mogućnost skladištenja ogromne količine podataka na malom prostoru. Najveći poduhvat na srpskom jeziku je Veliki rečnik srpskog jezika, koji bi kada se završi trebalo da ima 35 tomova knjiga. (a) Zamislite da ceo rečnik može da se zapiše na glavu čiode, koja je prečnika oko 2 mm. Kolika bi u tom slučaju bila veličina jednog slova? (b) Ako je uobičajeni razmak između atoma metala oko 0.5 nm, koliko atoma može da stane duž jednog slova (po visini)?

1.17 Koliko ima plavookih ljudi u Srbiji?

1.18 Jedna binarna cifra se naziva *bit*. Niz od osam bitova se naziva *bajt*. Pretpostavite da imate hard disk kapaciteta 1TB (terabajt). Koliko knjiga može da stane na disk ako je za svako slovo potreban jedan bajt?

1.19 Kolika je masa Zemljine atmosfere?

1.20 U 12 g ugljenika ima 6.02×10^{23} atoma ugljenika. Ako možete da izbrojite 3 atoma u sekundi, koliko je vremena potrebno da se izbroje svi atomi?

1.21 Koliko zrna pirinča može da stane u bocu od dva litra?

1.22 Koliko reči ima u vašoj omiljenoj knjizi?

1.23 Koliko puta u toku života prosečne dužine, neka osoba trepne?

1.24 Koliko otkucaja napravi srce neke osobe u toku života prosečne dužine? Koliko litara krvi ispumpa za to vreme? Napomena: Srce tokom jednog otkucaja ispumpa oko 50 cm^3 krvi.

1.25 Da bi se negde sipala samo mala, dobro kontrolisana količina tečnosti, koristi se pipeta. Pipetom je moguće sipati tečnost kap po kap. Koliko takvih standardnih kapi ima u jednom litru vode?

1.26 Ako biste ređali novčanicu na novčanicu, koliko novčanica od 10 dinara bi bilo potrebno da ukupna dužina bude kao od Zemlje do Meseca? Uporedite sumu tih novčanica sa cenom leta na Mesec.

1.27 Koliko novčanica od 10 dinara bi bilo potrebno da se cela Srbija pokrije njima? Koliko bi svaki građanin trebalo da priloži novca za tu priliku?

1.28 Koliko atoma imate u telu? Koristeći pomoć iz biologije, nađite kojih je pet elemenata najviše zastupljeno u našem telu? Kolika je ukupna masa svih atoma za svaki od tih pet elemenata u našem telu?

1.29 Najveći broj tkiva živih bića su sastavljena od 98 % vode. (a) Proceniti masu srca odrasle osobe. (b) Proceniti masu ćelije prečnika pola mikrona. (c) Proceniti masu pčele.

1.30 Astronomi vole da kažu da u svemiru ima više zvezda nego zrna peska na svim plažama na Zemlji. Uporedite ova dva broja. Da li su, na osnovu vaše procene, astronomi u pravu?

1.31 Kolika atoma ima Zemlja? Koliko Sunčev sistem? Koliko vidljivi svemir?

1.32 Ako neutronska zvezeda ima masu dva puta veću od Sunca, koliko je u njoj neutrona?

1.33 Pretpostavimo da je neposredno posle Velikog praska sva masa bila skoncentrisana u sferi poluprečnika od jedne astronomske jedinice. Neka je u njoj bila jedna trećina protona, jedna trećina neutrona i jedna trećina elektrona. Gustina te materije je bila oko $10^{15}\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Koliko je atoma nastalo od ovih čestica?

1.34 Jedna mala softvrska kuća iz Srbije je 2000. godine svoje akcije ponudila za trgovinu na Londonskoj berzi. Cene akcija na svetksoj bezi su vrlo nepredvidive, ali tokom dužeg vremenskog perioda, ako nema velikih ekonomskih potresa cene dosta dobro opisuje stepeni zakon $c = At^b$, gde je c cena akcije, t vreme u godinama, dok su A i b konstante. U tabeli je data cena akcija na svakih pet godina. (a) Odredite konstante A i b. Da li ove konstante imaju neke jedinice? (b) Kolika je bila cena akcija 2010. i kolika će da bude 2025.?

Cena (RSD)	210	419	914	1082	1685
Godina	2001	2006	2011	2016	2021

Dimenzionalna analiza

1.35 Pokazati da: (a) proizvod mase, ubrzanja i brzine ima dimenzije snage, (b) proizvod mase i brzine ima iste dimenzije kao proizvod sile i vremena.

1.36 Kojom fizičkom veličinom treba pomnožiti silu da bi se dobila snaga?

1.37 U turističkim vodičima često se za ocenu uspona duž neke planinarske staze koristi sledeće: uspon je 120 metara po kilometru. Koje je dimenzije ova fizička veličina?

1.38 U datim jednačinama x ima dimenzije dužine, t vremena, v brzine i a ubrzanja. Sve fizičke veličine imaju jedinice iz SI. Naći merne jedinice za fizičke veličine C_1 i C_2. (a) $x = C_1 + C_2 t$, (b) $x = \frac{1}{7} C_1 t^2$, (c) $v^2 = 3C_1 x$, (d) $x = C_1 \sin(C_2 t)$, (e) $v^2 = C_1 v - (C_2 x)^2$, (f) $C_1 = \frac{v^2}{x}$, (g) $C_2 = \sqrt{x/a}$.

1.39 Ako u jednačini $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, t ima dimenzije vremena, koja je merna jedinica u SI sistemu za fizičku veličinu λ?

1.40 Merna jedinica za silu je njutn, $N = \frac{\text{kg}\cdot m}{\text{s}^2}$. Naći mernu jedinicu za gravitacionu konstantu, γ u SI, ako je gravitaciona sila jednaka $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, gde su m_1 i m_2 mase, a r ima dimenzije dužine.

1.41 Kada telo pada kroz vazduh na njega deluje sila otpora sredine koja je proporcionalna površini tela i kvadratu brzine: $F = CSv^2$. Odrediti dimenziju konstante C.

1.42 Neka fizička veličina ima dimenzije $\frac{ML}{T^2}$, gde je M masa, L dužina i T vreme. Eksperimentalno je utvrđeno da ova fizička veličina zavisi od mase, brzine i dužine. Koja kombinacija ove tri fizičke veličine će dati dobru dimenziju?

1.43 Period obilaska planete oko Sunca zavisi od mase Sunca, gravitacione konstante i poluprečnika orbite. Koja kombinacija ovih fizičkih veličina će dati dimenziju perioda?

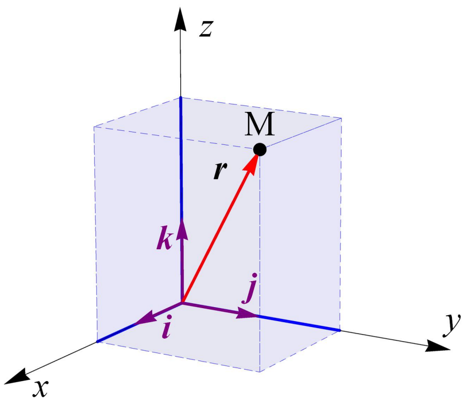
1.44 Jednačina $\ln z = C + \ln z_0$ dobro opisuje neku fizičku pojavu. (a) Ako z i z_0 imaju dimenzije dužine koje je dimenzije fizička veličina C? (b) Da li dimenzija fizičke veličine C zavisi od dimenzija z i z_0? (c) Da li dimenzije fizičkih veličina z i z_0 moraju da budu iste? (d) Kako je moguće da je jednačina dobra ako logaritam bilo koje merne jedinice nema smisla?

2
Kinematika

Kretanje

Mehanika se bavi opisivanjem kretanje tela u prostoru i vremenu, kao i osnovnim zakonima kretanja tela. Kretanje je bilo kakva promena koja se dešava sa telom tokom vremena (*kretanje u širem slislu*) ili promena položaja tela tokom vremena (*kretanje u užem smislu – mehaničko kretanje*). Položaj tela je uvek relativan pošto zavisi od toga u odnosu na šta se utvrđuje. Zbog toga je i kretanje tela relativno.

Telo u odnosu na koje se posmatra položaj tela koje se kreće se naziva *referentno telo*. Za referentno telo može da se veže *koordinatni sistem*. U fiksiranom koordinatnom sistemu položaj tačke je određen vektorom položaja, $\boldsymbol{r}$ (slika 2.1). Vektor položaja je vektor koji počinje u koordinatnom početku a vrh mu je u datoj tački (M na slici). Potpuno poznavanje kretanja podrazumeva da se u svakom trenutku zna vektor položaja tela.



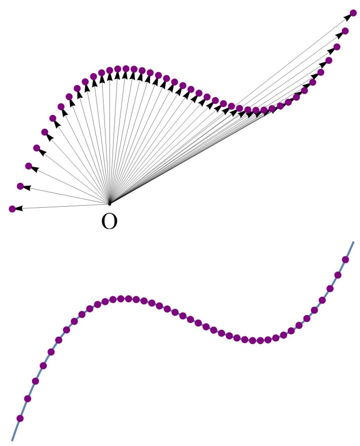
Slika 2.1: Vektor položaja i koordinatni sistem.

Proučavanje kretanja tela podrazumeva i merenje vremena. Za merenje vremena na različitim mestima su potrebni sinhronizovani časovnici. Sistem koji obuhvata koordinatni sistem i sistem sinhronizovanih časovnika se naziva *referentni sistem*. Definisanje referentnog sistema je neophodan prvi korak u opisivanju kretanja.

Izučavanje mehanike počinje se kinematikom. Kinematika je deo mehanike koji se bavi opisivanjem kretanja i definisanjem osnovnih fizičkih veličina, bez postavljanja pitanja o uzroku kretanja.

Kinematika materijalne tačke

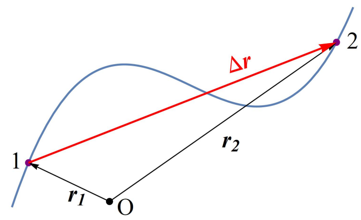
Ako se zna vektor položaja tela u svakom trenutku, to znači da se zna funkcija $\boldsymbol{r}(t)$. Geometrijsko mesto svih tačaka određenih vektorima položaja $\boldsymbol{r}(t)$ tokom kretanja predstavlja *trajektoriju* ili *putanju* tela, slika 2.2.



Slika 2.2: Putanja tela.

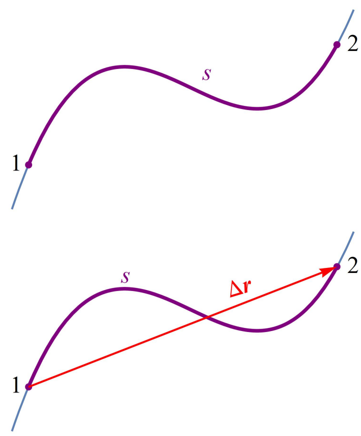
Telo se tokom kretanja u jednom trenutku nađe u tački 1 (slika 2.3), a nešto kasnije u tački 2. U koordinatnom sistemu čiji je početak označen slovom O vektori položaja ove dve tačke su $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$, respektivno. Razlika vektora položaja tačaka 1 i 2 se naziva *vektor pomeraja* ili *pomeraj*:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{2.1}$$



Slika 2.3: Pomeraj.

Tokom kretanja telo pređe put s, odnosno rasojanje između tačaka 1 i 2, mereno duž putanje je s, slika 2.4. Intenzitet vektora pomeraja, u opštem slučaju, nije jednak pređenom putu.

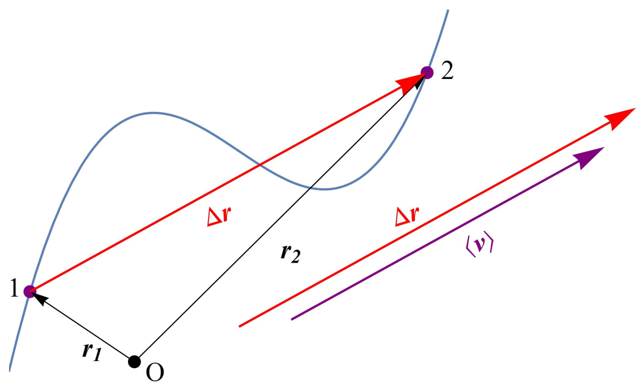


Slika 2.4: Pređeni put i pomeraj.

Primer 2.1

Dva tela se kreću po istoj putanji i u istom trenutku polaze iz iste tačke. Posle nekog vremena, u istom trenutku se nađu u različitim tačkama. Da li je moguće da telo koje je prešlo veći put napravi manji pomeraj?

Rešenje: Pre svega vredi napomenuti da se vektori mogu upoređivati samo na osnovu intenziteta, u ovom slučaju dužine. Dužina pomeraja nema nikakve veze sa pređenim putem. Zamislite da je putanja ova dva tela kružnica. Neka se jedno telo kreće mnogo brže od drugog. U trenutku kada brže telo ponovo stigne u početnu tačku, pomeraj će mu biti jednak nuli, a pređeni put jednak obimu kružnice. Drugo telo će preći samo deo kružnice, pa će pomeraj biti različit od nule.



Slika 2.5: Pravac i smer vektora srednje brzine.

Neka je vreme potrebno da telo stigne iz tačke 1 u tačku 2, Δt. Količnik pomeraja i odgovarajućeg vremena pokazuje koliko brzo se telo kretalo. Ovo je definicija vektora srednje brzine:

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Merna jedinica za srednju brznu je:

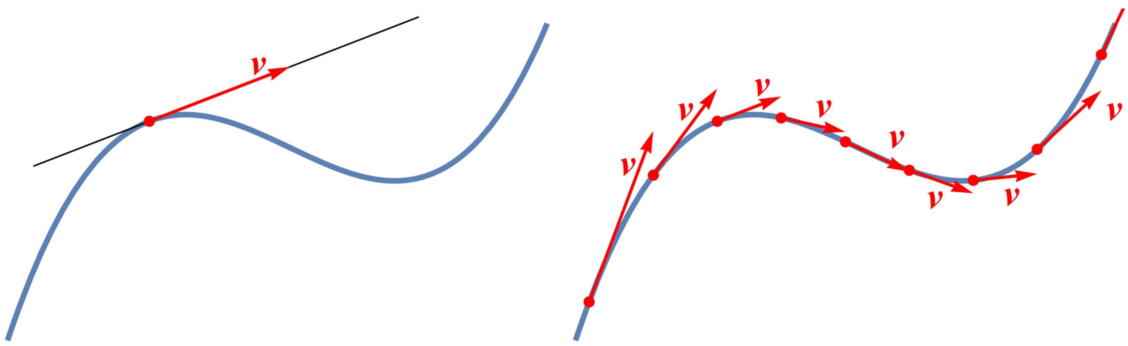
$$[\langle \boldsymbol{v} \rangle] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{2.3}$$

Iz definicije vektora srednje brzine je očigledno da su vektori srednje brzine i pomeraja uvek paralelni (slika 2.5).

Važno je napomenuti da su dva vektora paralelna ako su im pravci međusobno *paralelni* i ako su istog smera. Ako su pravci dvama vektorima međusobno paralelni a smerovi su im suprotni, onda su ti vektori *antiparalelni*.

Ako se vremenski, a samim tim i prostorni interval između tačaka 1 i 2 smanjuju, tako da postanu infinitezimalno mali dobija se:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$



Slika 2.6: Trenutna brzina. Pravac i smer trenutne brzine.

Jednačina 2.4 je definicija izvoda vektora položaja $\boldsymbol{r}$ po vremenu t. Sa druge strane, jednačina daje definiciju vektora *trenutne* ili prave brzine.

U matematici se izvod funkcije y po argumentu x označava sa $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$. Međutim, u fizici, ako je argument vreme, onda se izvodi označavaju tačkom iznad simbola funkcije, odnosno $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$.

Iz definicije trenutne brzine je jasno da je merna jedinica, takođe, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Sa druge strane vektor brzine je paralelan vektoru infinitezimalnog pomeraja. Lako se može videti sa slike 2.6 da je vektor infinitezimalnog pomeraja u nekoj tački putanje tela usmeren duž tangente na putanju, u toj istoj tački. Dakle, brzina je uvek usmerena duž tangente na trajektoriju. Smer je uvek određen smerom kretanja.

Intenzitet vektora brzine jednak je:

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right|. \tag{2.5}$$

Važno je uočiti da intenzitet brzine, u opštem slučaju, nije jednak izvodu intenziteta vektora položaja, $|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. U opštem slučaju: intenzitet izvoda vektora nije jednak izvodu intenziteta vektora.

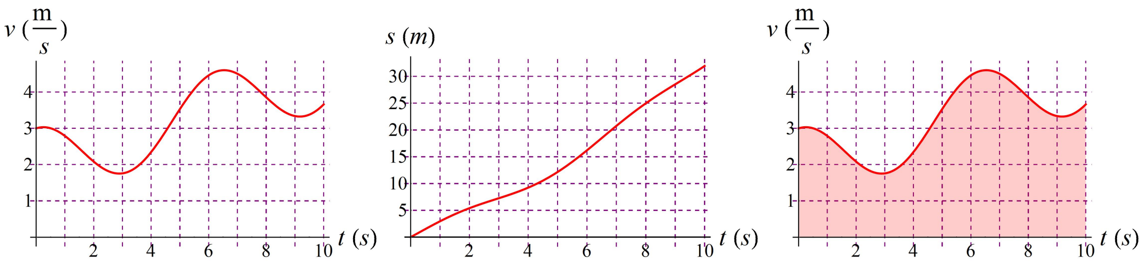
Sa druge strane intenzitet brzine je jednak izvodu pređenog puta po vremenu:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{2.6}$$

Iz ove definicije je jasno da se pređeni put računa kao integral intenziteta brzine, po vremenu:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \mathrm{d}t, \tag{2.7}$$

gde se put računa od trenutka t_1 do trenutka t_2.



Slika 2.7: Zavisnost brzine i pređenog puta od vremena.

Na slici 2.7 je prikazana zavisnost intenziteta brzine od vremena (grafik levo). Na srednjoj slici je prikazana zavisnost pređenog puta od vremena. Kriva pređenog puta je dobijena integracijom funkcije zavisnosti intenziteta brzine. Sa druge strane, intenzitet brzine se dobija kao izvod funkcije zavisnosti pređenog puta od vremena. Pređeni put za neko vreme, po formuli 2.7, može da se izračuna kao integral intenziteta brzine. Na desnoj slici 2.7 se pređeni put za prvih 10 s kretanja vidi kao površina osenčene oblasti ispod krive. Površina oblasti je jednaka određenom integralu intenziteta brzine.

Ubrzanje

Druga važna fizička veličina koja opisuje kretanje tela je *ubrzanje*. Ubrzanje pokazuje kako se menja brzina tela tokom kretanja. Ubrzanje je brzina promene brzine, odnosno izvod brzine po vremenu:

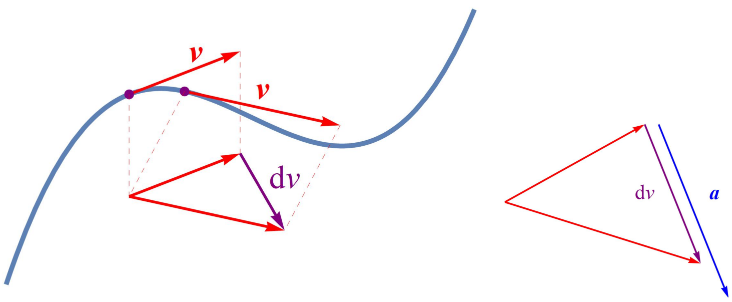
U srpskom jeziku termin brzina se koristi dvojako. Brzina je fizička veličina, upravo definisana. Termin brzina se koristi i u smislu veličine promene neke fizičke veličine sa vremenom. Na primer: brzo sam potrošio džeparac, ili zapremina vode se brzo smanjuje...

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.8}$$

Merna jedinica za ubrzanje je metar u sekundi na kvadrat, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Nekada se merna jedinica za ubrzanje čitala kao *metar u sekundi za sekundu*, što vrlo precizno ukazuje na smisao ubrzanja.

Vektor ubrzanja je paralelan vektoru infinitezimalnog priraštaja brzine, $\boldsymbol{a} \| \mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Pravac i smer ovog vektora će biti detaljno analiziran u sledećem odeljku.



Slika 2.8: Ubrzanje. Pravac i smer vektora ubrzanja.

Intenzitet ubrzanja je:

$$a = |\boldsymbol{a}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|, \tag{2.9}$$

kao i u slučaju brzine, intenzitet ubrzanja, u opštem slučaju, nije jednak izvodu intenziteta brzine, $|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

Primer 2.2

Neka je vektor položaja nekog tela dat sa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t^2$, gde je $\boldsymbol{A}$ konstantan vektor. Izračunati brzinu i ubrzanje tela.

Rešenje:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{A}t,$$

Intenzitet brzine je $v = 2At$.

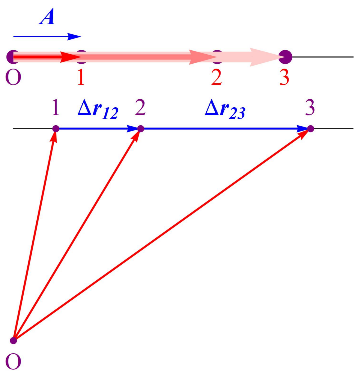
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{A},$$

Intenzitet ubrzanja je $a = 2A$. Iz uslova zadatka za vektor $\boldsymbol{A}$ je jasno da je vektor ubrzanja konstantan.

Prethodni primer opisuje jedan vrlo važan specijalan slučaj kretanja. Vektor položaja je uvek duž pravca konstantnog vektora $\boldsymbol{A}$, dakle ne menja pravac i smer tokom kretanja. Ovakvo kretanje je očigledno *pravolinijsko kretanje*. U opštem slučaju, ako koordinatni početak nije na putanji, pravolinijsko kretanje je takvo kretanje pri kome vektor pomeraja ne menja pravac tokom kretanja:

$$\Delta \boldsymbol{r} = f(t)\boldsymbol{A}, \tag{2.10}$$

gde je $f(t)$ proizvoljna funkcija vremena, dok je $\boldsymbol{A}$ konstantan vektor. Iz definicija brzine i ubrzanja lako se vidi da su kod pravolinijskog kretanja vektor pomeraja, brzina i ubrzanje vektori duž istog pravca, odnosno da su kolinearni vektori. Pri tom je brzina uvek paralelna pomeraju. Ako je ubrzanje paralelno brzini govori se u ubrzanom kretanju, a ako je suprotnog smera, o usporenom. Pri pravolinijskom ubrzanom kretanju intenzitet brzine raste sa vremenom, dok pri usporenom opada. U opštem slučaju, kada kretanje nije pravolinijsko koristi se samo termin ubrzano kretanje.



Slika 2.9: Pravolinijsko kretanje. Slika gore: koordinatni početak na pravcu kretanja. Slika desno: koordinatni početak proizvoljno izabran.

Primer 2.3

Neka je vektor položaja nekog tela dat sa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}\frac{t^2}{2}$, gde su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ konstantni vektori. Izračunati brzinu i ubrzanje tela.

Rešenje:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}t,$$

intenzitet brzine je $v = \sqrt{A^2 + B^2t^2 + 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}t}$, pošto nije poznato da li su vektori $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ ortogonalni.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}.$$

Kretanje tela u ovom primeru je takođe kretanje sa konstantnim ubrzanjem, ali se ne može reći da li je pravolinijsko ili nije. Kretanje tela je pravolinijsko samo ako su vektori $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ kolinearni.

Kinematički problemi

Postoje dve vrste kinematičkih problema. Lakša vrsta problema je ona u kojoj je poznata zavisnost vektora položaja tela od vremena, $\boldsymbol{r}(t)$. Ova funkcija se naziva *konačnom jednačinom kretanja*. Ako je poznata konačna jednačina kretanja onda je izračunavanje brzine i ubrzanja jednostavno, treba samo iskoristiti definicije 2.4 i 2.8, odnosno naći izvode po vremenu funkcije $\boldsymbol{r}(t)$.

U drugoj vrsti problema poznato je ubrzanje tela kao funkcija vremena, $\boldsymbol{a}(t)$. Treba naći brzinu i vektor položaja. Neka je radi jednostavnosti ubrzanje konstantno, $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}$. Tada je iz definicije ubrzanja:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\mathrm{d}t.$$

Integracijom ove jednačine od početnog, do nekog trenutka t, dobija se:

$$\int_0^t \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t,$$

odnosno:

$$\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(0) = \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}t.$$

Dakle, ako je poznato ubrzanje, bez dodatnih podataka može da se nađe samo promena brzine u nekom vremenskom intervalu.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{a}t,$$

Odnosno, da bi bila poznata brzina u bilo kom trenutku, potrebno je znati i brzinu u trenutku $t = 0$, odnosno *početnu brzinu*.

Koristeći definiciju brzine 2.4, daljom integracijom se dobija:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \int_0^t (\boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{a}t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}(0)t + \boldsymbol{a}\frac{t^2}{2},$$

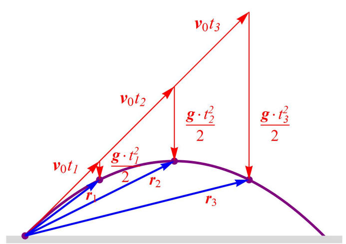
odnosno,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \boldsymbol{a}\frac{t^2}{2}. \tag{2.11}$$

Da bi se potpuno odredila funkcija $\boldsymbol{r}(t)$ potrebno je znati i vektor položaja u početnom trenutku, $\boldsymbol{r}(0)$. Konačno, pored poznatog ubrzanja neophodno je zadati i početne uslove, da bi se dobila konačna jednačina kretanja.

Treba napomenuti da je prikazan slučaj kretanja sa konstantnim ubrzanjem, što je vrlo specijalan slučaj. U opštem slučaju ubrzanje može da bude bilo kakva funkcija vremena, pa može da se desi da ga nije moguće integraliti, bar ne analitički. Dakle ova vrsta problema u opštem slučaju ne mora da bude rešiva.

Primer 2.4
Kosi hitac



Telo se kreće stalnim ubrzanjem $\boldsymbol{g}$ koje je usmereno suprotno od smera y-ose. Početna brzina tela je v_0 i usmerena je pod proizvoljnim uglom u odnosu na x-osu. U početnom trenutku telo se nalazilo u koordinatnom početku. Naći konačnu jednačinu kretanja.

Rešenje: Rešenje se dobija na isti način kao i u jednačini 2.11, samo treba zameniti $\boldsymbol{a}$ sa $\boldsymbol{g}$. Zanimljivo je da se rešenje može videti tako da je vektor položaja u svakom trenutku jednak zbiru dva vektora, konstantnih pravaca, $v_0 t$ i $\boldsymbol{g}\frac{t^2}{2}$, kao što je prikazano na slici.

Koordinatni prikaz

U Dekartovom koordinatnom sistemu, vektor položaja je:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},$$

gde su x, y i z Dekartove koordinate vektora položaja, dok su $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$ ortovi (jedinični vektori) Dekartovog koordinatnog sistema. Dekartovi ortovi su međusobno ortogonalni, konstantni vektori i intenzitet im je jednak jedinici,

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1,$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

Intenzitet vektora položaja, kada se iskoriste ortogonalnost i intenzitet ortova, je:

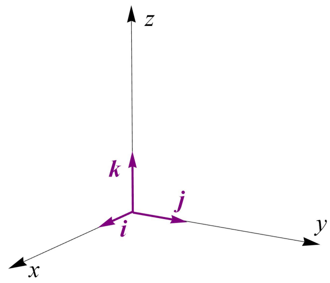
$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

odnosno:

$$|\boldsymbol{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pošto su Dekartovi ortovi konstantni vektori, njihov izvod po vremenu je jednak nuli:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0.$$



Slika 2.10: Dekartov koordinatni sistem.

Tada je izvod vektora položaja po vremenu jednak:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

gde su

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x, \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y, \ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z,$$

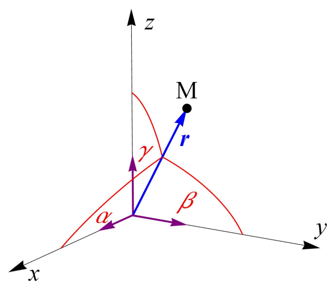
Dekartove komponente vektora brzine.

Izvodom brzine po vremenu se dobija ubrzanje:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k},$$

gde su

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a_x, \ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = a_y, \ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = a_z,$$



Slika 2.11: Kosinusi pravaca.

Dekartove komponente vektora ubrzanja.

Ako se znaju koordinate vektora onda mogu da se odrede i uglovi koje vektor položaja zaklapa sa koordinatnim osama:

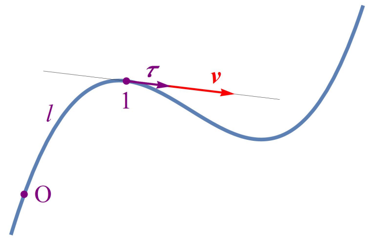
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \ \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Odnosi sa desne strane se nazivaju kosinusima pravaca, i prikazani su na slici 2.11. Analogno se definišu i kosinusi pravaca vektora brzine i ubrzanja.

U osnovnom kinematičkom problemu da bi se do kraja rešile jednačine iz kojih se dobijaju jednačine kretanja potrebno je znati *početne uslove*. Početni uslovi su početni vektor položaja i početna brzina. U bilo kom koordinatnom sistemu, dva početna vektora odgovaraju po trima koordinatama, tri početne koordinate tela i tri komponente početne brzine, dakle šest skalarnih početnih uslova.

Prirodne koordinate

Brzina tela je u svakoj tački putanje usmerena duž tangente na putanju, u toj tački, kako god da izgleda putanja (slika 2.12). Ubrzanje je u svakoj tački paralelno vektoru promene brzine. Naizgled, brzina može proizvoljno da se menja, na proizvoljnoj putanji, pa samim tim i pravac i smer vektora ubrzanja može da bude proizvoljan. Ipak, to nije sasvim tačno. Da bi se jasno video položaj vektora ubrzanja u odnosu na putanju potrebno je kretanje analizirati u sistemu *prirodnih koordinata*.



Slika 2.12: Prirodne koordinate. Koordinatni početak u sistemu prirodnih koordinata.

U sistemu prirodnih koordinata je neophodno da putanja bude potpuno poznata. Koordinatni početak je postavljen u tačku na putanji (tačka O na slici 2.12) u kojoj se telo nalazilo u početnom trenutku. Tada je položaj tela u bilo kom trenutku određen rastojanjem od koordinatnog početka, l, ali merenom duž putanje. Kretanje tela je potpuno opisano ako je poznato kako rastojanje l zavisi od vremena, odnosno $l(t)$.

Neka je $\boldsymbol{\tau}$ ort (jedinični vektor) tangente na putanju tela u bilo kojoj tački. Smer vektora je određen smerom kretanja tela. Vektor $\boldsymbol{\tau}$ nije konstantan vektor, mada je jedinični, zato što pravac i smer vektora zavise od položaja tačke na putanji. S obzirom da je putanja poznata, a samim tim i funkcija $l(t)$, onda zavisnost pravca i smera može da se zapiše kao $\boldsymbol{\tau}(l)$.

Brzina tela je:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}, \tag{2.12}$$

pri čemu je intenzitet brzine $v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ (pošto je vrednost koordinate $l(t)$ jednaka pređenom putu).

Analiza u prirodnim koordinatama je značajna i zbog toga što pokazuje koliko se račun usložnjava u slučajevima kada ose koordinatnog sistema menjaju orjentaciju tokom kretanja.

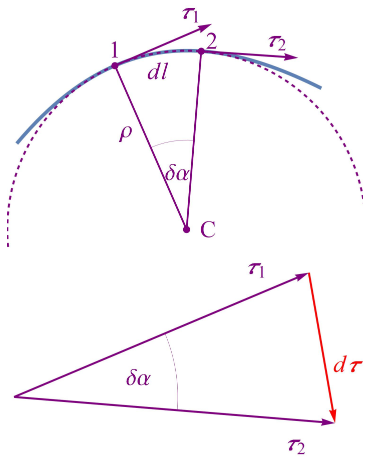
Ubrzanje tela je:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.13}$$

Prva komponenta ubrzanja je očigledno paralelna brzini, odnosno duž tangente na putanju, a druga zahteva malo transformacija.

$$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}.$$

Kada su tačke 1 i 2 sa slike 2.13 vrlo blizu jedna drugoj, odnosno kada $\Delta t \to 0$, onda tačke 1 i 2 leže na kružnom luku poluprečnika ρ. Zapravo cela putanja može da se izdeli na deliće koji su delovi kružnica. Poluprečnici ovih kružnica su različiti od tačke do tačke putanje, pa se može zapisati da je $\rho = \rho(l)$. Funkcija $\rho(l)$ se naziva *poluprečnik krivine putanje*.



Slika 2.13: Promena pravca i smera orta tangente.

Pošto bliske tačke 1 i 2 leže na kružnici poluprečnika ρ, onda je rastojanje između njih, mereno duž putanje, $\mathrm{d}l$, jednako $\mathrm{d}l = \rho\delta\alpha$, slika 2.13. S obzirom da su tačke sa iste kružnice, onda su pravci na kojima se nalazi tačka i centar lokalne kružnice normalni na odgovarajuće tangente. Zbog toga je ugao između ortova tangenti takođe $\delta\alpha$. Kada su tačke 1 i 2 dovoljno bliske jedna drugoj onda je intenzitet vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ jednak dužini luka kružnice poluprečnika $|\boldsymbol{\tau}| = 1$, koji se vidi pod uglom $\delta\alpha$.

Izjednačavanjem uglova iz izraza za dužine lukova dobija se:

$$\delta\alpha = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}|}{1} = \frac{\mathrm{d}l}{\rho},$$

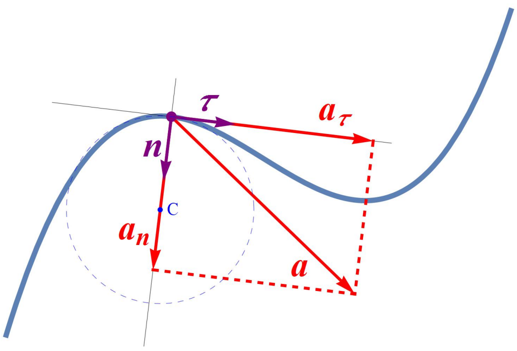
odnosno:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}\right| = \frac{1}{\rho}.$$

U graničnom slučaju, kada tačke 1 i 2 postanu beskonačno bliske, onda će vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ biti ortogonalan na vektor $\boldsymbol{\tau}$, odnosno biće usmeren ka centru lokalne kružnice, C. Može da se uvede jedinični vektor $\boldsymbol{n}$ koji je normalan na tangentu na putanju u svakoj tački, i usmeren je ka centru lokalne kružnice, odnosno ka centru krivine putanje. Onda je:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l} = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}.$$

Za krivu u ravni, ako je poznata jednačina krive $y = y(x)$, poluprečnik krivine je dat sa $\rho(x) = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$.



Slika 2.14: Prirodne komponente ubrzanja.

Zamenom dobijenih rezultata u izraz za ubrzanje dobija se:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}. \tag{2.14}$$

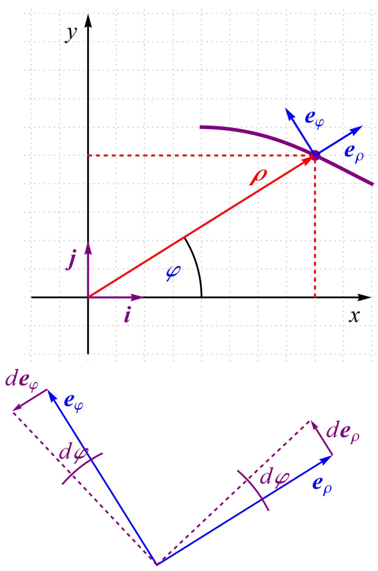
Prvi sabirak se naziva *tangencijalnim* a drugi *normalnim* ubrzanjem.

Intenzitet ubrzanja u prirodnim koordinatama je $a = \sqrt{\dot{v}^2 + (\frac{v^2}{\rho})^2}$.

Konačno, u prirodnim koordinatama se jasno vidi da je brzina uvek usmerena duž tangente na putanju, dok ubrzanje ima dve komponente u prirodnim koordinatama, jednu duž tangente, tangencijalno ubrzanje, i drugu duž normale na putanju, normalno ubrzanje. Pošto ortovi tangente i normale određuju jednu ravan, za svaku tačku putanje, onda je vektor ubrzanja uvek u ravni određenoj tangentom i normalom na putanju.

Polarne koordinate

Za tela koja se kreću u ravni često je podesno problem analizirati u *polarnim* koordinatama. Polarne koordinate su rastojanje tačke do koordinatnog početka, ρ, i ugao koji vektor položaja (u ravni), $\boldsymbol{\rho}$, zaklapa sa x-osom, φ. Ortovi polarnih koordinata su prikazani za slici 2.15. Važno je uočiti da ortovi polarnih koordinata nisu konstantni vektori. Oni menjaju pravac i smer od tačke do tačke putanje.



Slika 2.15: Polarne koordinate.

Vektor položaja proizvoljne tačke u polarnim koordinatama je:

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \boldsymbol{e}_\rho.$$

Veza između polarnih i Dekartovih koordinata se vidi sa slike 2.15:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi.$$

Brzina u polarnim koordinatama se kao i svaka brzina dobija kao izvod vektora položaja po vremenu. U polarnim koordinatama je jednaka:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}.$$

Pošto ortovi nisu konstantni ovaj izvod je jednak:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}.$$

Za mali pomeraj tela duž putanje, promena ortova polarnih koordinata je prikazana na slici 2.15 desno. Vidi se da je $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho$ paralelno sa $\boldsymbol{e}_\varphi$, dok je $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi$ suprotnog smera od $\boldsymbol{e}_\rho$. Za infinitezimalno male pomeraje intenzitet promene orta je jednak dužini luka kružnice poluprečnika $|\boldsymbol{e}_\rho| = 1$, koji se vidi pod uglom $\mathrm{d}\varphi$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho = 1 \cdot \mathrm{d}\varphi \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi = -1 \cdot \mathrm{d}\varphi \boldsymbol{e}_\rho.$$

Izvod ortova po vremenu je:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\rho,$$

Odnosno:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho. \tag{2.15}$$

Brzina je onda:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{2.16}$$

Ubrzanje u polarnim koordinatama:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho\right) = \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right) = \dot{\rho}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_\rho,$$

odnosno:

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{2.17}$$

Cilindrične koordinate

Cilindrične koordinate su prikazane na slici 2.16. Normalno rastojanje proizvoljne tačke do z-ose je ρ, ugao koji zaklapa prava koja prolazi kroz tačku i normalna je na z-osu je φ, dok je normalno rastojanje tačke do xy-ravni, isto kao i u Dekartovim koordinatama, z. Normalno rastojanje tačke do z-ose može biti samo pozitivan broj, pa je $\rho \in [0, \infty)$. Ugao φ može da uzme vrednosti od 0 do 2π, dok z ima isti smisao kao i u Dekartovim koordinatama, pa je $z \in (-\infty, \infty)$. Na slici su takođe prikazani i ortovi cilindričnih koordinata, $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ i $\boldsymbol{e}_z$. Ortovi $\boldsymbol{e}_\rho$ i $\boldsymbol{e}_\varphi$ nisu konstantni vektori, pošto menjaju pravac i smer od tačke do tačke u prostoru. Ortovi cilindričnog koordinatnog sistema su ortogonalni i normirani, odnosno:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij},$$

gde su i i j iz skupa $\{\rho, \varphi, z\}$, dok je δ_{ij} Kronekerov simbol koji je jednak:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \ i \neq j, \\ 1, \ i = j. \end{cases}$$

Pored toga, ortovi cilindričnog koordinatnog sistema obrazuju desni triedar, tako da je:

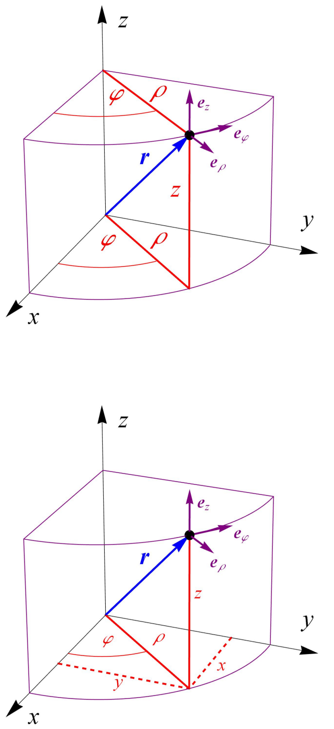
$$\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z.$$

Vektor položaja proizvoljne tačke u cilindričnim koordinatama je:

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + z \boldsymbol{e}_z.$$

Veza između cilindričnih i Dekartovih koordinata se vidi sa slike 2.16:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z.$$



Slika 2.16: Cilindrične koordinate.

Polarne koordinate su specijalan slučaj cilindričnih koordinata, jedina razlika je Dekartova koordinata z. Pošto su ortovi Dekartovih koordinata konstantni vektori, onda se rezultati za brzinu i ubrzanje u cilindričnim koordinatama mogu lako dobiti iz izraza u polarnim koordinatama, dodavanjem odgovarajuće z-komponente.

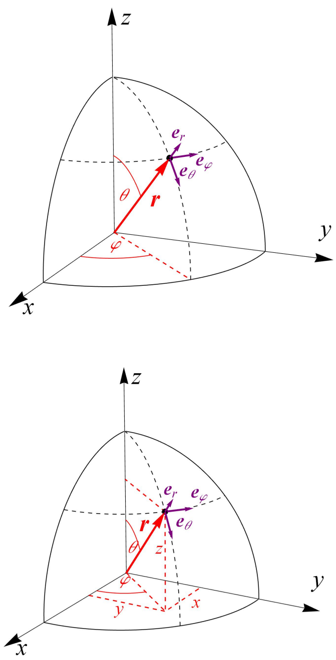
Brzina je:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z} \boldsymbol{e}_z, \tag{2.18}$$

a ubrzanje:

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2\right) \boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}\right) \boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z} \boldsymbol{e}_z. \tag{2.19}$$

Sferne koordinate



Slika 2.17: Sferne koordinate.

Sferne koordinate su: dužina vektora položaja tačke r, odnosno rastojanje tačke do koordinatnog početka, ugao koji vektor položaja zaklapa sa z-osom, θ, i ugao koji projekcija vektora položaja na horizontalnu xy-ravan zaklapa sa x-osom, φ. Rastojanje tačke do koordinatnog početka je uvek pozitivan broj, pa je $r \in [0, \infty)$, dok uglovi mogu imati sledeće vrednosti $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Koordinate i njihovi ortovi su prikazani za slici 2.17. Vektor položaja u sfernim koordinatama je $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$. Može se pokazati da su brzina i u brzanje u sfernim koordinatama:

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{2.20}$$

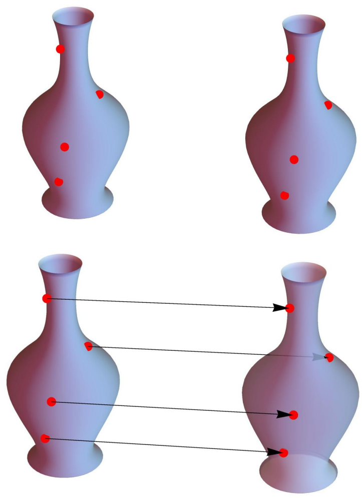
odnosno

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi. \end{aligned}\tag{2.21}$$

Kinematika krutog tela

Kruto telo je model za tela čije se dimenzije ne mogu zanemariti tokom kretanja ili ako se sve tačke tela ne kreću na isti način. Model krutog tela podrazumeva da nema deformacija tela tokom kretanja.

Kretanje krutog tela može da bude vrlo složeno, ali i u najsloženijim slučajevima kretanje je kombinacija nekoliko nešto jednostavnijih tipova kretanja. Zbog toga će biti analizirani samo jednostavniji slučajevi kretanja krutog tela, na koje potpuno proizvoljno kretanje može da se razloži.



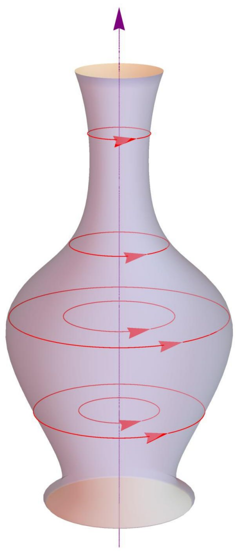
Slika 2.18: Translatorno kretanje krutog tela.

Translatorno kretanje

Kada se kruto telo kreće translatorno, onda sve tačke u telu naprave isti pomeraj za isto vreme. Samim tim i brzine i ubrzanja svih tačaka u telu su u svakom trenutku jednake. To znači da je translatorno kretanje krutog tela potpuno ekvivalentno kretanju bilo koje tačke krutog tela. Za potpun opis kretanja krutog tela dovoljno je znati konačne jednačine kretanja za proizvoljnu tačku na telu.

Rotacija oko nepokretne ose

Rotacija oko nepokretne ose je takvo kretanje pri kome se sve tačke krutog tela sve vreme kreću po kružnicama. Sve kružnice su ili međusobno paralelne ili koncentrične i njihovi centri se nalaze na istoj pravoj. Ova prava se naziva *osom rotacije*. Ako se fiksira jedna tačka krutog tela, ona će se tokom rotacije oko nepokretne ose sve vreme kretati po istoj kružnici.



Slika 2.19: Rotacija krutog tela oko nepokretne ose.

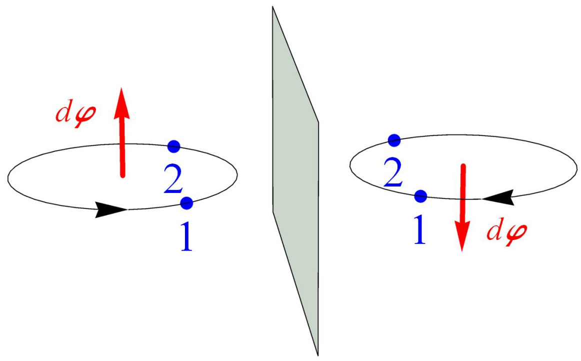
Neka telo za vreme dt zarotira oko nepokretne ose za vrlo mali ugao dφ. Osa je nepokretna te samim tim definiše jedan pravac u prostoru. Fiksirani ugao rotacije oko fiksirane ose ne određuje potpuno rotaciju. Telo može da rotira na dve različite strane. Dakle potrebno je definisati stranu na koju telo rotira, odnosno smer rotacije. Za potpuno određenu rotaciju potrebno je dati vrednost ugla (brojčana vrednost), pravac ose rotacije (pravac) i smer rotacije (smer). Izgleda kao da se rotacija može zadati jednim vektorom, ali, kao što će biti pokazano, to je moguće samo za infinitezimalno male uglove rotacije.

Vektor rotacije, $d\boldsymbol{\varphi}$, je vektor čiji intenzitet je jednak uglu rotacije, pravac je određen osom oko koje telo rotira, a smer smerom rotacije. Ako je osa rotacije usmerena, onda je smer vektora rotacije paralelan osi ako je rotacija u pozitivnom matematičkom smeru (gledano sa vrha ose telo rotira u suprotnom smeru od kazaljki na satu).

Ispostavlja se da $d\boldsymbol{\varphi}$ nije pravi vektor, odnosno da ima drugačije osobine od vektora položaja ili vektora brzine.

Za standardne vektore (vektor položaja, brzina, ubrzanje...) nije potrebno dodatno definisati smer, i ovakvi vektori se nazivaju *polarnim*. Na primer, ako se telo kreće u izabranom koordinatnom sistemu, vektori položaja su jednoznačni, a brzina i ubrzanje su definisani kao izvodi vektora položaja, dakle nikakav poseban dogovor o smeru ovih vektora nije potreban.

Sa druge strane smer vektora ugla rotacije je vezan, dogovorom, za smer rotacije. Ovakvi vektori se nazivaju *aksijalnim vektorima* ili pseudovektorima. Pored toga refleksija u ravni koja je paralelna vektoru menja smer aksijalnom vektoru, dok polarnom ne menja.



Slika 2.20: Aksijalni vektori u ogledalu.

Standardna definicija aksijalnog vektora je da je to vektor koji se ne menja pri prostornoj inverziji (centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak). Direktna posledica toga je način na koji se aksijalni vektor ogleda u ogledalu.

Kada se definiše vektor infinitezimalne rotacije, onda se lako definišu i ugaona brzina i ugaono ubrzanje:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}. \tag{2.22}$$

Merna jedinica za ugaonu brzinu je radijan u sekundi, $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a pošto je radijan bezdimenzionalna veličina, to je ekvivalentno $\frac{1}{\text{s}}$.

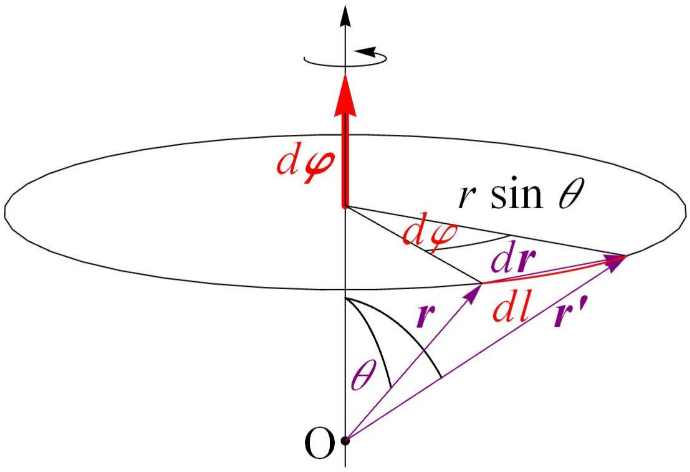
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2}. \tag{2.23}$$

Merna jedinica za ugaono ubrzanje je radijan u sekundi na kvadrat, $\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Pošto su ugaona brzina i ubrzanje izvodi aksijalnog vektora onda su i oni aksijalni vektori.

Rotacija oko fiksne ose je takvo kretanje tela u kome su vektori rotacije, ugaone brzine i ugaonog ubrzanja duž istog pravca, sve vreme kretanja.

Veza između linijskih i ugaonih fizičkih veličina

Pretpostavimo da kruto telo rotira oko nepokretne ose. Neka se jedna koordinatna osa poklapa sa osom rotacije. Koordinatni početak neka bude proizvoljna tačka na osi rotacije. Ako je ugao rotacije



Slika 2.21: Pomeraj i ugaoni pomeraj pri rotaciji tela oko nepokretne ose.

infinitezimalno mali onda je intenzitet pomeraja jednak dužini luka koji opiše proizvoljna fiksirana tačka dok se telo zarotira za ugao $\mathrm{d}\varphi$. Sa slike 2.21 se vidi da je intenzitet pomeraja:

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = r \sin\theta \mathrm{d}\varphi.$$

Sa desne strane je intenzitet vektorskog proizvoda:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}. \tag{2.24}$$

Relacija 2.24 ima ovakav oblik samo za infinitezimalne rotacije. Za konačne rotacije (kada je intenzitet vektora pomeraja bitno različit od dužine luka) je $|\Delta \boldsymbol{r}| = r \sin\theta 2 \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \neq \Delta l$.

Posmatrajmo rotacije za uglove $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1$ i $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2$ oko dve različite ose koje prolaze kroz istu tačku, gde se postavi koordinatni početak. Tada je:

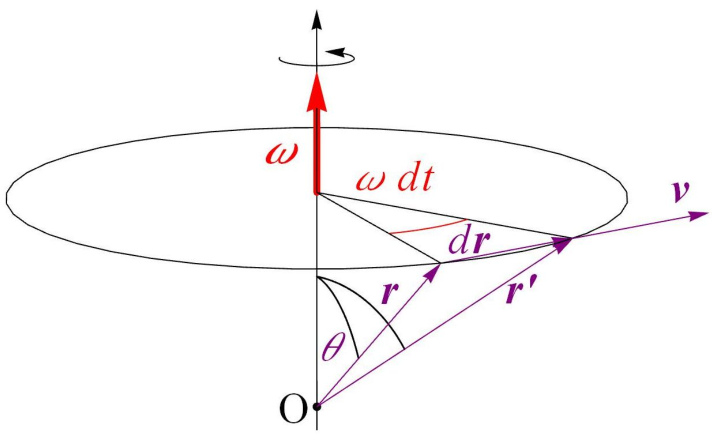
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2 \times \boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_2) \times \boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}.$$

Kompozicija dve infinitezimalne rotacije je rotacija za ugao $|\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}|$ oko ose čiji je pravac određen vektorom[1] $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}|}$, što je još jedan dokaz da je $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ vektor, pošto se sabira na isti način kao i svaki drugi vektor.

Kada se jednačina 2.24 podeli sa $\mathrm{d}t$, dobija se:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{2.25}$$

[1] To je i svaki pravac koji je paralelan pravcu koji sadrži ovaj vektor.



Slika 2.22: Veza između brzine i ugaone brzine pri rotaciji krutog tela oko nepokretne ose.

Vektor položaja fiksirane tačke može da se razloži kao $\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$. Onda je $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\alpha} \times (\rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z)$. $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}_z = 0$, jer su u pitanju kolinearni vektori. Ort $\boldsymbol{e}_\rho$ je duž pravca normale na kružnicu po kojoj se tačka kreće, samo je suprotno usmeren. Po definiciji vektorskog proizvoda $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}_\rho$ je vektor koji je u ravni normalnoj na ravan koju obrazuju osa rotacije i $\boldsymbol{e}_\rho$. Pa je $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}_\rho$ u ravni u kojoj je kružnica po kojoj se kreće fiksirana tačka. Dakle rezultujući vektor je u ravni kružnice i normalan je na normalu na kružnicu, što je paralelno tangenti. Za drugi član sve isto važi za proizvod $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Kada se vektor duž tangente vektorski pomnoži vektorom duž ose, dobija se vektor paralelan normali na kružnicu.

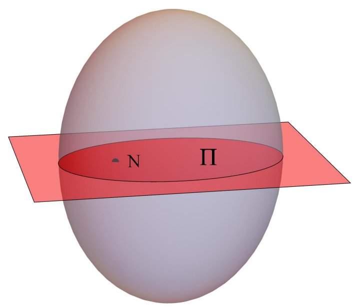
Intenzitet vektora brzine je $|\boldsymbol{v}| = \omega r \sin\theta = \omega\rho$, gde je ρ normalno rastojanje tačke do ose rotacije. Ubrzanje je:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Kada se brzina iz 2.25 zameni u prethodnu jednačinu dobija se:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{2.26}$$

Prva komponenta ubrzanja je normalna na ravan u kojoj leže osa rotacije (odnosno ugaono ubrzanje) i trenutni vektor položaja, a to je sa slike očigledno pravac tangente (pravac paralelan tangenti) na putanju u fiksiranoj tački. Prvi član je tangencijalno ubrzanje, intenziteta $\alpha\rho$. Druga komponenta je normalna na pravac tangente, a to je normalno ubrzanje, intenziteta $\omega^2\rho$.

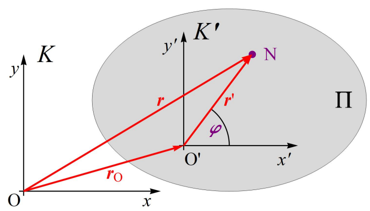


Slika 2.23: Kretanje krutog tela u ravni. Kotrljanje tela je primer za kretanje krutog tela u ravni.

Kretanje krutog tela u ravni

Neka je N fiksirana proizvoljna tačka na krutom telu koje se kreće. Ako sve vreme kretanja tačka N ostaje u istoj, nepokretnoj, ravni onda se takvo kretanje naziva kretanjem krutog tela u ravni. S obzirom da je tačka N proizvoljna, onda pri kretanju krutog tela u ravni svaka tačka tela se kreće u jednoj nepokretnoj ravni. Različite ravni su međusobno paralelne.

Neka je figura koja nastaje u preseku zamišljene nepokretne ravni, koja sadrži proizvoljnu fiksiranu tačku N, i krutog tela, Π. U specijalnom slučaju kretanja krutog tela u ravni kretanje ovako dobijene figure je potpuno ekvivalentno kretanju celog tela.



Slika 2.24: Kretanje krutog tela u ravni. Nepokretni i pokretni referentni sistem.

Neka su O' i N proizvoljne fiksirane tačke u figuri Π. Tada je vektor koji ih spaja, $\boldsymbol{r}'$, takođe čvrsto vezan za telo. Neka je φ ugao između vektora $\boldsymbol{r}'$ i unapred određenog pravca x'. Položaj tela je potpuno određen vektorom položaja tačke O' ($\boldsymbol{r}_O(t)$) i uglom $\varphi(t)$.

Ako se $\boldsymbol{r}'$ zarotira za ugao $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$, za isti ugao se zarotira i bilo koja druga duž fiksirana za telo, i to ne zavisi od toga koja tačka na telu je izabrana za O'. Dakle, sve tačke na telu (osim onih na osi rotacije) se zarotiraju za isti ugao. To znači da je ugaona brzina za bilo koju tačku na telu ista. Sa druge strane ovo znači da je osa rotacije normalna na figuru Π.

Zahtev da tačke koje su u jednom trenutku bile unutar figure Π budu sve vreme kretanja unutar figure, u slučaju kada osa rotacije nije ortogonalna na figuru bi nametnuo da različite tačke imaju različite ugaone brzine.

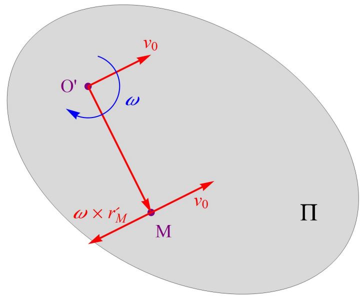
Neka se sistem K' kreće translatorno u odnosu na nepokretni sistem K, a telo rotira u odnosu na sistem K'. S obzirom da je opisivanje rotacije krutog tela u ravni potpuno proizvoljan izbor tačke O', može se uzeti da je to tačka u kojoj osa rotacije prolazi kroz figuru.

Onda je:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

gde je $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ pomeraj koordinatnog početka sistema K', usled translatornog kretanja, a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ je pomeraj u odnosu na sistem K' usled rotacije. Tada je $\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}'$, na osnovu jednačine 2.24. Kada se ova jednačina podeli vremenom $\mathrm{d}t$, dobija se brzina tačke u sistemu K:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \tag{2.27}$$



Slika 2.25: Trenutna osa rotacije krutog tela.

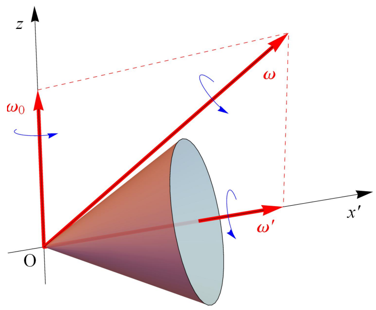
gde je drugi sabirak brzina tačke u odnosu na pokretni sistem.

Iz jednačine 2.27 se vidi da se kretanje krutog tela u ravni uvek može posmatrati kao kompozicija translacije izabrane tačke na krutom telu i rotacije oko ose koja prolazi kroz tu tačku, i normalna je na figuru u kojoj je izabrana tačka.

Pri kretanju krutog tela u ravni je iz definicije očigledno da su vektori brzine $\boldsymbol{v}_O$ i ugaone brzine rotacije tela $\boldsymbol{\omega}$ ortogonalni. Vektor $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ za bilo koju tačku figure, ali i bilo koju tačku ravni u kojoj je figura, je u ravni figure. Tada sigurno postoji takva tačka, na primer M, za koju je $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_M = 0$, odnosno postoji tačka u prostoru čija je brzina jednaka nuli u nepokretmom sistemu K. Tačka M ima fiksiran položaj u odnosu na telo, ali nije nužno unutar figure koja se kreće (samim tim ne mora da bude deo krutog tela). Vektor $\boldsymbol{r}'_M$ je ortogonalan na $\boldsymbol{\omega}$, jer je tačka M u ravni normalnoj na pravac $\boldsymbol{\omega}$, ali $\boldsymbol{r}'_M$ mora da bude ortogonalno i na $\boldsymbol{v}_0$, da bi vektorski proizvod bio suprotnog smera od $\boldsymbol{v}_0$, odnosno, da bi vektori mogli da se saberu u nulu. Intenzitet vektora $\boldsymbol{r}'_M$ je $|\boldsymbol{r}'_M| = \frac{v_0}{\omega}$. Osa rotacije koja je normalna na izabranu ravan figure i koja prolazi kroz tačku M, čija je brzina jednaka nuli u nepokretnom sistemu, naziva se *trenutna osa rotacije*. Važno je istaći da se proizvoljno kretanje krutog tela u ravni može svesti samo na rotaciju oko trenutne ose.

Položaj trenutne ose rotacije je određen u odnosu na pokretni, K', sistem. Određen je brzinom pokretnog sistema i ugaonom brzinom tela u odnosu na pokretni sistem.

Slaganje ugaonih brzina



Slika 2.26: Slaganje ugaonih brzina.

Neka kruto telo rotira oko nepokretne ose, z-ose na slici 2.26, ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}_0$, i oko sopstvene ose (x'-osa na slici), ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}'$. Pokretni sistem K' sadrži obe ose, s tim što je z-osa nepokretna, dok se x' kreće sa telom. Za infinitezimalne rotacije važi da je:

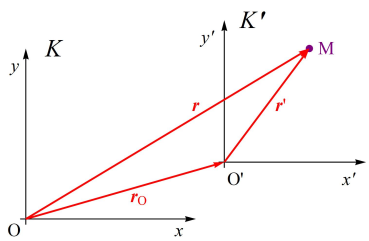
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}'.$$

Deljenjem ove jednačine vremenom, dobija se ugaona brzina:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}'.$$

Rezultujuća ugaona brzina odgovara rotaciji oko pokretne ose čiji se pravac u svakom trenutku poklapa sa pravcem rezultujuće ugaone brzine, i sadrži tačku O, kao što se vidi na slici 2.26.

Transformacije brzine i ubrzanja



Slika 2.27: Položaj tačke u dva sistema reference.

Važan problem u mehanici je određivanje veze između osnovnih kinematičkih veličina datih u dva različita sistema reference, koji se kreću jedan u odnosu na drugi. Važna polazna pretpostavka je da su prostorni i vremenski intervali apsolutni, odnosno da su isti u svim sistemima reference, nezavisno od toga da li se sistemi kreću ili ne.

Posmatrajmo kretanje tela (materijalne tačke) iz dva referentna sistema. Neka je, radi jednostavnosti, jedan sistem nepokretan, K, a drugi se kreće, K'. Biće razmotrena tri posebna slučaja kretanja pokretnog sistema reference i na kraju će biti dat izraz za kombinaciju svih pojedinačnih načina kretanja.

K' SE KREĆE TRANSLATORNO. Neka se kretanje tela (tačke M sa slike 2.27) posmatra iz dva sistema reference. Jednog nepokretnog, K, i jednog koji se u odnosu na nepokretni kreće translatorno.

Pomeraj tela u nepokretnom sistemu je:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

gde je $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0$ pomeraj pokretnog koordinatnog sistema, K', a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ pomeraj tela u odnosu na pokretni sistem. Deljenjem jednačine sa $\mathrm{d}t$, dobija se veza između brzina u dva sistema reference:

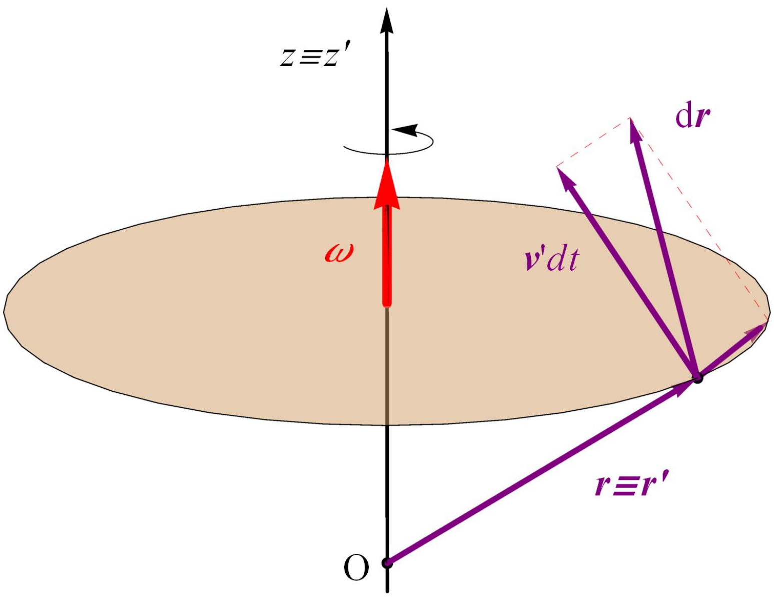
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'. \tag{2.28}$$

Izvod po vremenu prethodne jednačine daje vezu između ubrzanja:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'. \tag{2.29}$$

Zanimljivo je i ujedno vrlo važno uočiti, da je samo ako se pokretni sistem ne kreće ubrzano $\boldsymbol{a}_0 = 0$, ubrzanje u oba sistema reference isto, tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$.

K' ROTIRA OKO NEPOKRETNE OSE U K. Neka sistem K' rotira oko nepokretne ose, konstantnom ugaonom brzinom. I neka je, radi jednostavnosti, osa oko koje sistem rotira zajednička za oba sistema. Tada je $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}'$.



Slika 2.28: Pomeraj u pokretnom sistemu koji rotira.

Za tačku koja je nepokretna u K' sistemu, pomeraj je, na osnovu jednačine 2.24:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}.$$

Ako se tačka još dodatno kreće, brzinom $\boldsymbol{v}'$ u odnosu na K', pomeraj u nepokretnom sistemu K se može razložiti na zbir pomeraja, pomeraj koji potiče od kretanja tela u odnosu na sistem reference K', $\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t$, i pomeraj koji potiče od rotacije sistema $\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}'\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}.$$

Deljenjem sa $\mathrm{d}t$, dobija se veza između brzina tela u dva sistema reference:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

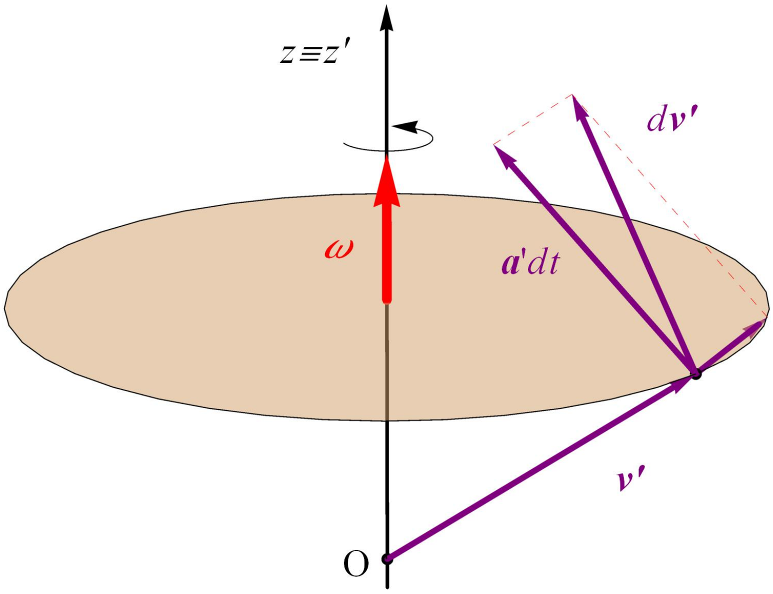
Diferencijal ove jednačine daje priraštaj brzine:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

gde je $\mathrm{d}\boldsymbol{v}'$ priraštaj brzine u pokretnom sistemu reference.

Ako se intenzitet brzine $\boldsymbol{v}'$ ne menja, onda je po formuli 2.24 promena brzine jednaka:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}' = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}'.$$



Slika 2.29: Priraštaj brzine u pokretnom sistemu koji rotira.

Međutim, ako se telo kreće ubrzano, onda treba dodati još i deo koji potiče od ubrzanog kretanja u odnosu na pokretni sistem, K':

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}'\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}'.$$

Kada se u izraz za $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ uvrsti izraz za priraštaj brzine, kao i izraz za pomeraj $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, dobija se:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}'\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}'\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}).$$

Deljenjem sa $\mathrm{d}t$, dobija se izraz za vezu između ubrzanja u dva sistema reference:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

Treći sabirak je centripetalno ubrzanje i ono postoji u svakom sistemu reference koji rotira (bilo kakvom ugaonom brzinom). Drugi član je Koriolisovo[2] ubrzanje, i postoji samo ako se telo kreće u sistemu koji rotira.

[2] Nazvano je po francuskom matematičaru Gasparu Gustavu de Koriolisu (Gaspard Gustave de Coriolis) (1792-1843), koji pored ostalog i prvi upotrebio termin *rad sile*.

K' SE KREĆE TRANSLATORNO I ROTIRA. Neka se pokretni referentni sistem K' kreće i translatorno i rotira oko nepokretne ose konstantnom ugaonom brzinom. Da bi se dobile veze za brzine i ubrzanja dovoljno je spojiti dva prethodna slučaja. To se lako vidi ako se uvede pomoćni referentni sistem koji se u odnosu na nepokretni kreće translatorno. Sistem K' onda samo rotira oko nepokretne ose u odnosu na pomoćni sistem. Radi jednostavnosti, jedna osa pomoćnog sistema se poklapa sa osom pokretnog sistema, a paralelna je osi nepokretnog sistema.

Veze između brzine i ubrzanja, odnosno izrazi koji pokazuju kako se brzina i ubrzanje transformišu pri promeni referentnog sistema, tada su:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{2.31}$$

Ovo nije najopštiji slučaj kretanja sistema jednog u odnosu na drugi. Ugaona brzina ne mora da bude konstantna i osa rotacije ne mora da bude nepokretna. Ipak za dalji rad izloženi slučajevi će biti dovoljno opšti.

Zadaci

Brzina i pređeni put

2.1 Proceniti površinu osenčene oblasti ispod krive sa slike 2.7. Uporediti rezultat sa procenjenom vrednošću funkcije $s(t)$ u tački $t = 10$ s.

2.2 Neka intenzitet brzine prikazan na grafiku 2.7 zavisi od vremena kao $v(t) = A\cos(Bt) + C\frac{t^2}{4} + 2D$, gde sve konstante imaju odgovarajuće merne jedinice u SI i imaju brojčanu vrednost jedan. (a) Odrediti dimenzije svih konstanti. (b) Naći kako pređeni put zavisi od vremena. ~~Uzeti da je u početnom trenutku telo krenulo iz mirovanja~~. (c) Skicirati grafike funkcija $v(t)$ i $s(t)$. (d) Izračunati put koji telo pređe za 10 s, na dva načina, kao integral intenziteta brzine i kao vrednost funkcije $s(t)$ u trenutku $t = 10$ s. (e) Naći relativnu grešku procene iz prethodnog zadatka u odnosu na izračunate vrednosti, i za procenjenu površinu i za procenjenu vrednost pređenog puta. Uporediti rezultate sa kolegama.

2.3 Kako se telo kreće ako mu je u svakom trenutku srednja brzina jednaka trenutnoj? A kako ako je intenzetet srednje brzine jednak srednjem intenzitetu brzine?

Brzina i ubrzanje

2.4 Neka je vektor položaja nekog tela dat sa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t^2$, gde je $\boldsymbol{A}$ konstantan vektor. Naći intenzitet vektora položaja, njegov prvi i drugi izvod po vremenu i uporediti rezultate sa intenzitetima brzine i ubrzanja. Objasniti rezultate.

2.5 Neka je vektor položaja nekog tela dat sa $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}\frac{t^2}{2}$, gde su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ konstantni vektori. Naći intenzitet vektora položaja, njegov prvi i drugi izvod o vremenu i uporediti rezultate sa intenzitetima brzine i ubrzanja.

2.6 Telo se kreće pravolinijski, konstantnim ubrzanjem. Da li telo krećući se na ovakav način može da promeni smer kretanja?

2.7 Da li telu koje usporava ubrzanje može da se povećava?

2.8 Da li telu koje ubrzava ubrzanje može da se smanjuje?

2.9 Vozač je dobio prekršajnu prijavu zbog prekoračenja brzine. U prijavi je pisalo da je saobraćajac koji je merio brzinu jednom vozilu i izmerio da se vozilo kretalo nedozvoljenom brzinom, u jednom trenutku ugledao drugo vozilo sa ovim našim vozačem u njemu, koje se kretalo uporedo sa prvim vozilom. Zaključio je da su oba vozila prekoračila brzinu. Da ste vi advokat da li bi ste mogli da odbranite našeg vozača i kako?

2.10 Telo slobodno pada u liftu koji se penje ubrzanjem g. Koliko je ubrzanje tela u odnosu na lift?

2.11 Kako se telo kreće ako mu je u svakom trenutku vektor ubrzanja normalan na vektor brzine?

2.12 Ako se telo kreće pravolinijski i brzina mu linearno zavisi od vremena, kako ubrzanje zavisi od vremena?

2.13 Telo se kreće pravolinijski. Ako mu ubrzanje linearno zavisi od vremena, kako od vremena zavisi brzina? Kako od vreman zavisi brzina ako je ubrzanje konstantno?

2.14 Kako se telo kreće ako mu je u svakom trenutku vektor ubrzanja paralelan vektoru brzine?

2.15 Kako se telo kreće ako mu je u svakom trenutku vektor pomeraja paralelan vektoru srednje brzine?

2.16 Kako se telo kreće ako mu je u svakom trenutku vektor pomeraja paralelan vektoru trenutne brzine?

2.17 Kako se telo kreće ako mu je u svakom trenutku vektor pomeraja paralelan vektoru ubrzanja?

2.18 U kakvom su odnosu vektori brzine i ubrzanja prilikom pravolinijskog kretanja tela: paralelni su, antiparalelni, duž istog pravca ili mogu imati bilo kakve pravce?

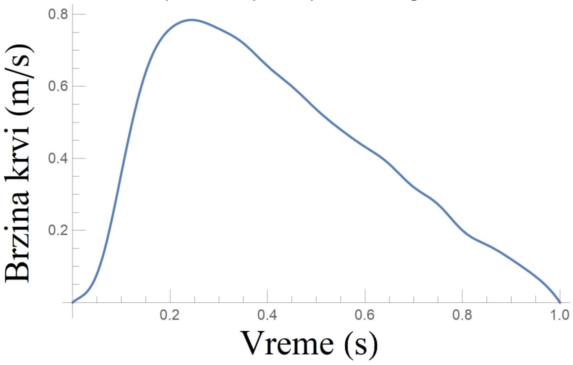
2.19 Da li telu posle nekog vremena može pomeraj da bude jednak nuli a srednja brzina različita od nule? Pomeraj jednak nuli a brzina različita od nule?

2.20 Da li je moguće da telo ima nenulto ubrzanje i brzinu koja je jednaka nuli? Ubrzanje jednako nuli a brzinu različitu od nule? Da brzina bude jednaka nuli a srednje ubrzanje različito od nule?

2.21 Pri konstantnom ubrzanju srednja brzina je polovina zbira početne i krajnje brzine. Da li je isti slučaj i ako ubrzanje nije konstantno?

2.22 Tokom zemljotresa stvara se nekoliko vrsta udarnih talasa. Najviše poznati i proučavani su P-talas (primarni) i S-talas (sekundarni ili talas smicanja). U Zemljinoj kori P-talasi se prostiru brzinom od oko 6.5 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ dok se S-talas prostire brzinom od oko 3.5 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Vreme koje protekne između detekcije u seizmološkoj stanici jednog i drugog talasa može da posluži da se odredi koliko daleko se zemljotres desio. Ako je vreme izmereno između dva talasa 45 s, koliko daleko od seizmičke stanice se zemljotres desio?

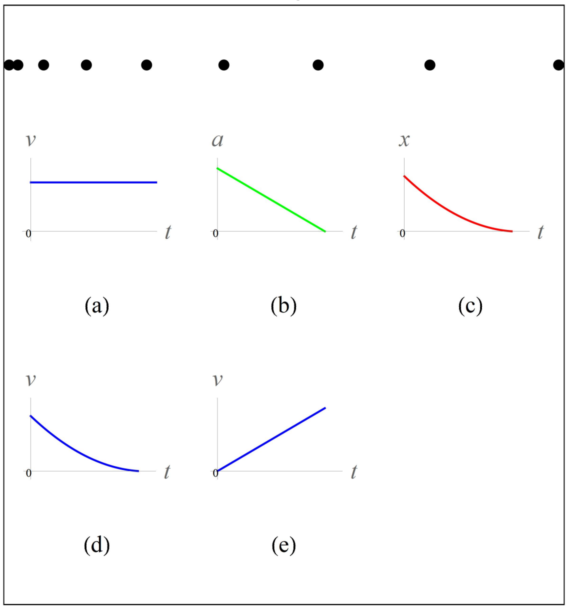
2.23 U našem krvotoku, krv neprekidno kruži. Kada se nađe u srčanoj komori srce ga pumpa u aortu, i krv kada prođe celim krvotokom se vraća u srce, na trenutak se zaustavi pre novog pokretanja ka aorti. (a) Ako jedna kontrakcija srčanog mišića traje 250 ms, i ako je brzina krvi koja ulazi u aortu 0.8 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, na kraju kontrakcije, koliko je srednje ubrzanje crvenog krvnog zrnca koje ulazi u aortu? (b) Aorta se na jednom mestu grana u dve arterije jednakih poprečnih preseka. Ako je prečnik aorte d_a, koliki je prečnik arterije? (c) Brzina krvi u aorti može direktno da se meri ultrazvukom. Standardni grafik zavisnosti brzine krvi od vremena za vreme jednog otkucaja srca je prikazan na slici. Koji od navedenih zaključaka najbolje odgovara podacima sa grafika: (i) smer proticanja krvi se menja na oko 0.25 s; (ii) brzina krvi počinje da se smanjuje na oko 0.15 s; (iii) ubrzanje krvi je najveće na oko 0.25 s; (iv) ubrzanje krvi je najveće negde oko 0.1 s.



2.24 Iz slavine kaplje voda. Svake sekunde kapne po jedna kap. Posmatrajte dve uzastopne kapi. Od trenutka kada se druga odvoji od slavine i počne da pada, kako se menja rastojanje između kapi?

2.25 Sa vrha visoke zgrade bacate dve loptice. Istom početnom brzinom, jednu naviše a drugu naniže. Koja loptica će većom brzinom udariti u zemlju? Koja će prva udariti u zemlju ako su bačene istovremeno? Kojoj loptici je veći pomeraj od početka do kraja kretanja? Koja loptica je prešla veći put? Zanemariti otpor vazduha.

2.26 Muva koja je mirovala na stolu odjednom se ustremila na ostatak jabuke koji je stajao na drugom kraju prostorije. Letela je pravolinijski. Super brza kamera je zabeležila njene položaje u svakoj sekundi leta, sa leva na desno. Položaji muve su predstavljeni crnim tačkama na slici. Koji od ponuđenih grafika opisuje njeno kretanje? Ako je neko pogrešio i muva je zapravo letela sa desna na levo, da li bi onda neki od grafika bio adekvatan?



2.27 Bacite lopticu vertikalno naviše. Koliko je ubrzanje loptice u trenutku kada se zaustavi u najvišoj tački putanje?

2.28 Kada bacite lopticu sa neke visine, bez početne brzine, i ako zanemarite otpor vazduha, loptica će pasti na zemlju za vreme τ. Koliko će biti vreme padanja, u odnosu na τ, ako lopticu pod istim uslovima bacite sa tri puta veće visine?

2.29 Ako buva može da skoči pravo uvis do visine 0.44m, kolika joj je bila početna brzina pri odskoku? Koliko vremena buva provede u vazduhu tokom jednog skoka?

2.30 Da li smo svi Marsovci? Postoji jedna sasvim ozbiljna teorija po kojoj je život postojao na Marsu i prenet je na Zemlju tako što je neki veliki meteor udario u Mars, komadi stena stekli su dovoljnu brzinu da napuste Mars, i neki od njih su mogli da stignu do Zemlje. Ako je na nekoj steni bilo živih organizama mogli su i oni da stignu do Zemlje. Ima mnogo kamenja palih na Zemlju, za koje je pouzdano utvrđeno da potiču sa Marsa. Ali jedan od glavnih fizičarskih zamerki ovoj teoriji je da bi pri ovakvom lansiranju kamenja sa površine Marsa, kamenje, pa i sve živo na njemu pretrpelo ogromno ubrzanje. Brzina koju telo treba telo da dostigne da bi napustilo Mars je oko 5 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Pri udaru velikog meteora kamen ovu brzinu može da dostigne posle pređenih 4 m puta. (a) Koliko je ubrzanje kamena? Koliko je izraženo u g? Pretpostaviti da je ubrzanje konstantno. (b) Koliko dugo bi ovo ubrzanje trajalo? (c) Naučnici su utvrdili da 40% jediniki jedne vrste bakterija (*Bacillus subtilis*) može da preživi ubrzanje od 450000 g. Kada ovaj podatak uporedite sa rezultatom pod (a), da li postoji verovatnoća da smo svi pali s Marsa?

2.31 Neka neko uzme lenjir i drži ga vertikalno iznad vaše šake, tako da vrh lenjira bude između palca i kažiprsta. U jednom trenutku lenjir je pušten i vi treba da ga uhvatite sa dva prsta. Očitajte na lenjiru koliki put je prešao padajući. Na osnovu tog podatka izračunajte vreme vaše reakcije. Ako neko pored vas meri vreme reakcije hronometrom, čije će mrenje biti bolje i zašto?

2.32 Sa ivice visoke zgrade ispaljena je iz praćke šljiva, tako da joj je početna brzina horizontalna i jednaka v_0. Ubrzanje Zemljine teže je jednako g, i neka je koordinatni početak postavljen u tačku ispaljivanja. (a) Posle koliko vremena će horizontalno pomeranje šljive biti jednako vertikalnom? Kolike su koordinate šljive u tom trenutku? (b) Posle koliko vremena će ugao koji vektor brzine zaklapa sa vertikalom biti 45°? Kolike su koordinate šljive u tom trenutku?

2.33 Za telo iz primera 2.4 naći intenzitet ubrzanja, tangencijalno i normalno ubrzanje.

2.34 Telo se kreće tako da mu je jednačina kretanja data sa $\boldsymbol{r} = A\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + A\cos(\omega t)\boldsymbol{j}$, gde su A i ω konstante. (a) Pokazati da se telo kreće po kružnici poluprečnika A. (b) Naći brzinu i ubrzanje tela. (c) Naći intenzitet brzine, ubrzanja, normalno i tangencijalno ubrzanje. (d) Pokazati da je poluprečnik krivine kružnice jednak poluprečniku.

2.35 Telo se kreće tako da mu je jednačina kretanja data sa $\boldsymbol{r} = A\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + B\cos(\omega t)\boldsymbol{j}$, gde su A, B i ω konstante. (a) Naći jednačinu trajektorije. (b) Naći brzinu i ubrzanje tela. (c) Naći intenzitet brzine, ubrzanja, normalno i tangencijalno ubrzanje.

2.36 Izračunati $\dot{\boldsymbol{e}}_\rho$ i $\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi$ u cilindričnim koordinatama, kao i $\dot{\boldsymbol{e}}_r$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$ i $\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi$ u sfernim.

2.37 Telo se kreće tako da su mu posle nekog vremena pomeraj, srednja brzina i srednje ubrzanje jednaki nuli. Da li na osnovu ovih podataka može nešto da se kaže o putanji tela?

2.38 U kojoj tački putanje tokom kosog hica su vektori brzine i ubrzanja tela paralelni, a u kojoj su ortogonalni?

2.39 Na sto je fiksirana puška tako da može da ispali metak horizontalno. Na ivici stola je greškom ostavljen jedan metak. U trenutku kada puška opali metak sa ivice stola počne slobodno da pada, vertikalno. Ako se zanemari otpor vazduha koji metak će brže da padne na horizontalnu podlogu?

2.40 Avion koji dostavlja robu u nepristupačne predele leti horizontalno i u nekom trenutku izbaci paket, koji pada bez početne brzine u odnosu na avion. Kako izgleda putanja paketa za posmatrača sa zemlje?

2.41 U kakvom su odnosu vektor brzine i vektor ubrzanja pri kretanju tela u ravni?

2.42 Gumica za brisanje sleti sa horizontalnog stola. U trenutku odvajanja od stola brzina gumice je horizontalna, v_0. Gumica udari u pod posle vremena τ. Ako se početna brzina gumice udvostruči, kako će se promeniti: (a) vreme padanja gumice, (b) horizontalno rastojanje od stola do mesta na kome gumica udari u pod, (c) intenzitet brzine gumice neposredn pre nego što udari u pod?

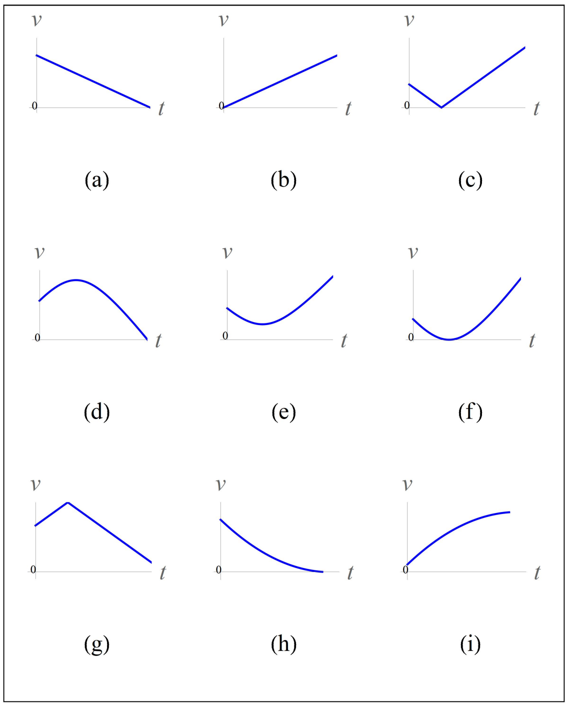
2.43 Pretpostavimo da žaba može da skoči u bilo kom pravcu sa istim intenzitetom brzine. Ako je najveća daljina koju žaba može da postigne u skoku $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ kolika je najveća visina?

2.44 Telo se kreće uniformno po kružnici. (a) Kolika je srednja brzina i srednje ubrzanje tela za vreme za koje ono obiđe jedan krug? (b) Koliko se promeni centripetalno ubrzanje tela ako se brzina poveća četiri puta? Koliko ako se poluprečnik putanje smanji tri puta?

2.45 Da li moguće da se telo ne kreće uniformno po kružnici (intenzitet brzine nije konstantan) a da vektori brzine i ubrzanja budu ortogonalni?

2.46 Vozite se automobilom tokom kišnog dana. Na bočnim staklima kapi kiše ostavljaju dijagonalne tragove. Da li sa sigurnošću možete da kažete da li napolju duva vetar? Ako su tragovi dijagonalni na vetrobranskom (prednjem) staklu, da li onda možete sa sigurnošću da kažete nešto o vetru?

2.47 Kamen je bačen pod nekim uglom u odnosu na horizontalnu podlogu, uz zanemarljiv otpor vazduha. Koji od prikazanih grafika predstavlja intenzitet brzine kamena tokom vremena leta?



2.48 Strašna oluja je odnela most na reci. Vozač juri kući da vidi u kakvom je stanju posle oluje. Iz daljine vidi da nema mosta i odluči se za suludo rešenje, da preskoči reku. Put, sa strane sa koje nailazi automobil je horizontalan i 25 metara je iznad reke. Na drugoj obali, nastavak puta je samo 2 metra iznad vode. Dužina koju treba da preskoči je 50 metara. (a) Kolika treba da bude brzina automobila (ako zanemarimo otpor vazduha) da bi uspeo da preskoči reku? (b) Kolika će biti brzina automobila u trenutku kada dodirne put na suprotnoj strani reke?

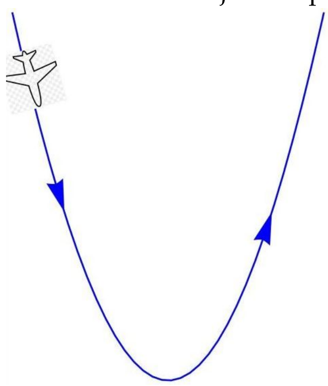
2.49 Jedna vrsta cvrčka (*Philaenus spumarius*), pored toga što je ogromna štetočina, je i aktuelni svetski rekorder u skoku u vis insekata. Ovaj cvrčak skače pod uglom od 58° u odnosu na horizontalu. Najbolji skakači dosegnu visinu od 58.7 cm, u odnosu na podlogu. (a) Ako se zanemari otpor vazduha kolika je početna brzina cvrčka? (b) Koliki je domet cvrčka koji uspe u skoku da dosegne ovu visinu?

2.50 Kosmonaut dok se odmarao na Zemlji u svemirskom brodu gurnuo je lagano lopticu za tenis, tako da se ona skotrljala sa stola i pala na ratojanju D od stola. Pošto mu je loptica amajlija poneo je na put. Kada su sleteli na željenu planetu on je ponovo gurnuo lopticu sa istog stola i ona je pala na rastojanju od $3D$ od stola. Koliko je gravitaciono ubrzanje na toj planeti?

2.51 Procenite koliko daleko možete da bacite košarkašku loptu. (a) Na osnovu ove procene izračunajte kolikom brzinu bi ste bacili loptu. (b) Ako biste mogli istom brzinom da bacite loptu vertikalno naviše do koje visine bi lopta otišla? (c) Ako biste istom brzinom loptu bacili na Mesecu, koliko daleko bi odletela?

2.52 Ravnotežu održavamo pored ostalog i zahvaljujući tečnosti (endolimfi) u unutrašnjem uhu. Rotacija pomera ovu tečnost i izaziva vrtoglavicu. Pretpostavite da klizačica pravi piruetu rotirajući oko sopstvene vertikalne ose tako što napravi tri okreta u sekundi. Ako je unutrašnje uho na oko 7 cm od ose rotacije, koliko je radijalno ubrzanje tečnosti u unutrašnjem uhu?

2.53 Avion se obrušava po putanji koja je prikazana na slici. Za najniži deo putanje se može uzeti da je deo kružnice, poluprečnika 300 metara. Po medicinskim istraživanjima pilot može da izgubi svest ako je ubrzanje posle obrušavanja veće od 5.5 g. Kojom najvećom brzinom avion može da izvede ovakvo obrušavanje a da pilot ostane pri



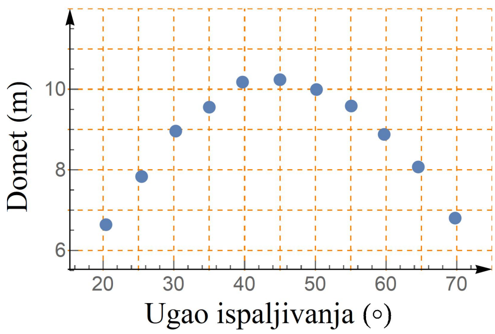
svesti?

2.54 U Nasinom (NASA) istraživačkom centru u Ejmsu (SAD) postoji velika, takozvana, „20 G" centrifuga, koja se koristi da bi se ispitivali efekti vrlo velikih ubrzanja na probne pilote i kosmonaute. Uređaj se sastoji od 8.84 m duge grede, koja može da rotira oko jednog kraja u horizontalnoj ravni. Kosmonaut je privezan u ležište na drugom kraju grede, tako da mu je telo duž grede, a glava najdalje od ose rotacije. Najveće ubrzanje koje se koristi za ispitivanja na ljudima je oko 12.5 g. (a) Kojom brzinom se kreće glava kosmonauta ako je ubrzanje jednako maksimalnom? (b) Kolika je razlika u ubrzanju glave i stopala kosmonauta koji je visok dva metra? (c) Koliko obrtaja u minuti napravi centrifuga kada ostvari maksimalno ubrzanje za ljude?

2.55 Guske sa severa, krajem leta, lete na jug i po nekoliko hiljada kilometara, brzinom i do 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Neka guske lete brzinom od 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ duž meridijana na jug. Ali sa zapada ka istoku duva jak vetar brzinom 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. (a) Pod kojim uglom u odnosu na meridijan guske treba da lete, tako da bi se kretale pravo prema jugu? (b) Pri ovakvim uslovima, koliko je guskama potrebno vremena da pređu put od 1000 km?

2.56 Voz na dugačkom pravcu ide brzinom od 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pada kiša, nema vetra tako da kapi padaju vertikalno na zemlju ali na prozorima voza ostavljaju kose tragove na prozorima. Tragovi zaklapaju ugao od 30° u odnosu na vertikalu. (a) Kolika je horizontalna komponenta brzine kapi u odnosu na voz i u odnosu na zemlju? (b) Koliki je intenzitet brzine kišnih kapi u odnosu na voz, a koliki u odnosu na zemlju?

2.57 Pištolj sa oprugom može da ispali mali kamen, početnom brzinom v_0. Izmeren je domet kamena ispaljenog ovim pištoljem, uvek sa istog mesta, u zavisnosti od nagibnog ugla cevi. Rezultati merenja su prikazani na grafiku. Koristeći dobijene podatke treba naći početnu brzinu, v_0, ako se zanemari otpor vazduha. (a) Od datih podataka treba naći način da se dobije linearna zavisnost. (b) Koristeći linearizovani grafik smisliti kako bi mogla da se odredi v_0, i izračunati je. (c) Koristeći dobijenu vrednost za početnu brzinu izračunati domet za slučaj kada je nagibni ugao 44.2°. Za sve račune koristite da je $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



2.58 Mašina za ispaljivanje tenskih loptica se pokvarila, i može da ispaljuje loptice samo jednom brzinom, i samo horizontalno. Uz pomoć ove mašine urađen je sledeći eksperiment. Iz zgrade fakulteta sa svakog sprata su ispaljivane teniske loptice i meren je domet. Izmereni podaci su dati u tabeli. (a) Koristeći podatke iz tabele naći način kako dobiti linearnu zavisnost. (b) Sa linearizovanog grafika naći način kako da se odredi v_0, i odrediti je. Zanemariti otpor vazduha, nema vetra tokom izvođenja eksperimenta i za gravitaciono ubrzanje uzeti $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Visina (m)	Domet (m)
3	14.5
7	21.8
11	26.5
15	31.0
19	35.5

2.59 Na jednom avanturističkom izletu naišli ste na široku reku. Dobili ste zadatak da odredite širinu reke i procenite brzinu struje. Na raspolaganju imate mali čamac sa vanbrodskim motorom, i znate da je u blizini malo mirno jezero. Na jezeru kalibrišete brzinu čamca, tako što za dva položaja gasa odredite da su brzine 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ i 9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Posle toga čamcem prelazite reku držeći kurs tako da stignete tačno na suprotnu stranu od mesta sa kojeg ste krenuli. Kada idete manjom brzinom potrebno vam je 4 minuta da pređete reku, u povratku, većom brzinom reku pređete za minut i 50 sekundi. (a) Kolika je brzina rečne struje (pretpostavimo da je ista celom širinom reke), i koliko je reka široka? (b) Ako namestite gas tako da čamac postiže veću brzinu (9 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$), koliko iznosi najkaraće vreme prelaska reke? Na kom mestu, u odnosu na mesto odakle ste krenuli ćete stići do druge obale, u tom slučaju?

2.60 Neke biljke rasipaju semenke kada se plod pocepa, i malo stegne što izazove ispaljivanje semenki. Putanja ovih semenki može da se zabeleži kamerama velike brzine. U eksperimentu, semenke biljka ispaljuje sa visine od 30cm, u odnosu na podlogu. Brzine semenki se kreću od 2.3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ do 4.6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. U svim slučajevima zanemariti otpor vazduha. (a) Da bi snimak bio upotrebljiv za vreme između dva snimka (frejma) semenka ne bi trebalo da pređe više od 0.2 mm. Kolika je minimalna brzina (u slikama u sekundi) kamere koja može da ostvari dovoljan broj snimaka? (b) Ako neka semenka bude ispaljena vertikalno naviše najvećom mogućom brzinom koliko će joj vremena biti potrebno da dostigne najvišu tačku? (c) Ako se semenka ispali horizontalno, najvećom mogućom brzinom koliko daleko će da ode? (d) Precizna merenja pri ispaljivanju velikog broja semenki pokazuju da su nagibni uglovi u intervalu od -51° do 75° (negativan ugao znači da je semenka ispaljena direktno ka podlozi, horizontala je 0°), sa srednjom vrednošću od 31°. Približno 65% semenki se ispali pod uglom između 6° i 56°. Na osnovu ovih podataka koja od navedenih hipoteza bi najviše odgovarala dobijenim rezultatima: Semenke se rasejavaju tako da (i) visina koju semenke dostižu tokom leta bude najveća; (ii) uglovi ispaljivanja budu negativni i da se semenke najvećom silom zabijaju u zemljište; (iii) domet bude što je moguće veći, tj. da semenke odlete što dalje od biljke; (iv) vreme koje semenka provede u vazduhu bude najmanje moguće.

Kinematika krutog tela

2.61 Šta se dešava sa aksijalnim vektorom pri refleksiji u odnosu na ravan koja je normalna na vektor?

2.62 Pokazati da je član $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ jednak $-\omega^2 \boldsymbol{\rho}$, gde je vektor $\boldsymbol{\rho}$ takav da je njegov intenzitet jednak normalnom rastojanju tela do ose rotacije, a usmeren je od ose rotacije ka telu.

2.63 Kako izgleda vektor ubrzanja kuglice klatna u najnižoj tački putanje?

2.64 U kakvom su odnosu vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja prilikom kružnog kretanja tela?

2.65 Bacač kladiva (teška kugla učvršćena za jedan kraj sajle, a sa druge ima rukohvat) zavrti kladivo oko svoje glave, tako da se kugla vrti po prbližno kružnoj putanji. U jednom trenutku on ispusti (baci) kladivo. Kako izgleda putanja bačenog kladiva?

2.66 Točak rotira oko ose koja je normalna na ravan u kojoj je točak, i prolazi kroz njegov centar. Zamislite dve tačke na točku, A na obodu točka i B na polovini rastojanja od centra do oboda. U kakvom su odnosu ugaone brzine u tačkama A i B? Ugaona ubrzanja? Brzine? Tangencijalno ubrzanje? Normalno ubrzanje?

2.67 Koji je najopštiji uslov koji treba da ispunjavaju dva referentna sistema da bi brzine istog tela u ta dva sistema bile jednake?

2.68 Koji je najopštiji uslov koji treba da ispunjavaju dva referentna sistema da bi ubrzanja istog tela u ta dva sistema bila jednaka?

2.69 Biciklista vozi po kružnoj stazi brzinom $10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i ima centripetalno ubrzanje od $5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Koliki je poluprečnik putanje?

2.70 Točak sobnog bicikla napravi jednu celu rotaciju za 1.34 s. Posmatrajmo dve tačke na točku, tačka A je na 10 cm od ose rotacije točka, tačka B na rastojanju 20 cm od ose. (a) Koliki je intenzitet brzine u ove tačke, tokom rotacije? (b) Koliko je centripetalno ubrzanje u njima? (c) Na osnovu prethodnih rezultata zaključite kako se menja brzina tačaka na točku sa porastom rastojanja od ose rotacije? Kako se menja centripetalno ubrzanje?

3
Njutnovi zakoni

Inercijalni sistemi reference

U okvirima kinematike, ako je poznato kako se jedan referentni sistem kreće u odnosu na drugi onda je moguće naći veze između brzina i ubrzanja u ta dva sistema. Ne postoji nikakva suštinska razlika između referentnih sistema, samo opisivanje kretanja može da bude manje ili više složeno.

Svako telo menja brzinu ako ga na to prisili neko drugo telo. U pokretnom referentnom sistemu samo ubrzanje $\boldsymbol{a}'$ je posledica uzajamnog delovanja. Svi ostali članovi su posledica isključivo kretanja referentnog sistema.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - \omega^2 \boldsymbol{\rho}. \tag{3.1}$$

Očigledno je najjednostavniji slučaj onaj u kome su ubrzanja u oba sistema reference jednaka. To je slučaj kada se pokretni sistem reference ne kreće ubrzano, pa samim tim i ne rotira ($\boldsymbol{a}_0 = 0$ i $\boldsymbol{\omega} = 0$). Tada je $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$.

Neka se u nepokretnom sistemu reference posmatra kretanje slobodnog tela. Slobodno telo je telo na koje ne deluje ni jedno drugo telo. Ubrzanje slobodnog tela je jednako nuli $\boldsymbol{a} = 0$, u nepokretnom sistemu reference. U bilo kom drugom sistemu reference koji se kreće konstantnom brzinom ubrzanje slobodnog tela će takođe biti jednako nuli $\boldsymbol{a}' = 0$. Slobodno telo koje se kreće bez ubrzanja, kreće se pravolinijski, konstantnom brzinom, odnosno kreće se po *inerciji*.

Koristeći prethodni zaključak može da se definiše jedna važna vrsta referentnih sistema. Referentni sistem u kome se slobodno telo kreće po inerciji se naziva *inercijalni referentni sistem*.

Svaki referentni sistem koji se kreće ravnomerno pravolinijski u odnosu na neki inercijalni sistem je takođe inercijalan. Sistemi koji se kreću ubrzano u odnosu neki inercijalni sistem su *neinercijalni sistemi*.

Referentni sistem vezan za Zemlju se često može uzeti kao inercijalan, što će biti diskutovano kasnije. Mnogo bliži stvarnom inercijalnom sistemu je referentni sistem vezan za Sunce, za kretanja u Sunčevom sistemu i okolini.

Zakon inercije

Tvrdnja da inercijalni sistemi postoje je zapravo *prvi Njutnov*[1] *zakon dinamike*. Postojanje inercijalnih sistema je potvrđeno eksperimentalno. Ali zapravo svi inercijalni sistemi su samo približno inercijalni, što je često sasvim dovoljno za vrlo precizan opis kretanja tela

[1] U mnogim knjigama se on naziva Njutn-Galilejev zakon.

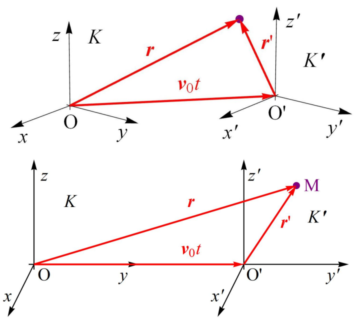
u njima.

Slobodno kretanje, odnosno kretanje slobodnog tela je moguće samo u inercijalnom sistemu. Jedino što može da utiče na promenu načina kretanja slobodnog tela je neko drugo telo. Dakle, slobodno telo će se kretati po inerciji, ravnomerno pravolinijski, sve dok ga neko drugo telo ne primora da takav način kretanja promeni. Ovaj iskaz je dobro poznata formulacija prvog Njutnovog zakona dinamike, a pokazano je da iz tvrdnje da inercijalni sistemi postoje direktno sledi ovakva formulacija.

Galilejev princip relativnosti

Važna osobina inercijalnih sistema je da su svi inercijalni sistemi po svojim mehaničkim osobinama međusobno ekvivalentni. Direktna posledica je da su u svim inercijalnim sistemima isti zakoni mehanike i iste su osobine prostora i vremena. Vreme je homogeno a prostor homogen i izotropan. Ovaj iskaz se često naziva Galilejevim principom relativnosti. Galilejev princip relativnosti je tačan samo u okvirima klasične (nerelativističke) mehanike. Ako se sistem ili telo kreću brzinama uporedivim sa brzinom svetlosti onda mora da se primeni Ajnštajnova specijalna teorija relativnosti.

Ekvivalentnost inercijalnih sistema reference za posledicu ima nemogućnost razlikovanja sistema koji miruju od onih koji se kreću. Ne postoji eksperiment koji bi utvrdio da li se inercijalni sistem kreće ili miruje.



Slika 3.1: Galilejeve transformacije.

Galilejeve transformacije

Neka se jedan inercijalni sistem, K', kreće brzinom $\boldsymbol{v}_0$ u odnosu na drugi nepokretni, K. Neka su se u početnom trenutku koordinatni sistemi poklapali. Vreme mereno u oba sistema reference je isto, odnosno isti su vremenski intervali, protekli između istih događaja. Veza između vektora položaja i vremena u dva sistema je:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t, \quad t' = t. \tag{3.2}$$

Relacije 3.2 važe samo uz pretpostavku da su prostor i vreme apsolutni, odnosno da su prostorni i vremenski intervali isti u svim sistemima reference, što je jedna od osnovnih postavki klasične mehanike.

S obzirom da se pokretni sistem kreće konstantnom brzinom, izvod jednačine 3.2 se lako nalazi, i dobija se veza između brzina:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0,$$

što je i definicija relativne brzine tela u odnosu na pokretni sistem. Daljim diferenciranjem dobija se veza između ubrzanja:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}.$$

Ubrzanje je isto u oba sistema reference, pošto su oba sistema inercijalna. Iz jednačine za ubrzanja se vidi još jedan način da se definišu inercijalni sistemi. Ako su fizičke veličine u jednom sistemu reference povezane Galilejevim transformacijama sa odgovarajućim fizičkim veličinama u nekom inercijalnom sistemu, onda je taj referentni sistem nužno inercijalan. Važi i obrnuto, ako su sistemi inercijalni onda su fizičke veličine u njima povezane Galilejevim transformacijama.

Opšti izraz 3.2 se može pojednostaviti, bez smanjenja opštosti, ako se koordinatni sistemi orijentišu tako da je brzina kretanja pokretnog sistema duž neke koordinatne ose, na primer y (donja slika 3.1). U tom slučaju je veza između koordinata i vremena data sa:

$$x' = x, \; y' = y - v_0 t, \; z' = z, \; t' = t. \tag{3.3}$$

Drugi Njutnov zakon

U inercijalnim sistemima reference svako ubrzanje je izazvano isključivo delovanjem drugih tela. Svako telo, materijalno, čini supstancija i fizičko polje koje ono stvara. Kada se dva tela nađu na rastojanju na kojem im se polja preklapaju, onda tela uzajamno deluju, odnosno *interaguju*. Fizička veličina koja je mera interakcije je *sila*.

Sila ima materijalno poreklo. Uvek je izazvana prisustvom nekog drugog tela bilo ono blizu ili daleko, svejedno.

I ako u makroskopskom svetu postoji mnogo različitih vrsta sila, mnoge imaju i posebne nazive, sve sile su posledice malog broja osnovnih interakcija. Postoje četiri osnovne interakcije tela u prirodi:

- nuklearna jaka interakcija, deluje na rastojanjima $\approx 10^{-15}$ m (sila između kvarkova koja ih drži na okupu unutar nukleona);
- slaba interakcija (vidi se u β^- raspadu, interakcija elektrona i neutrina, dometa $\approx 10^{-18}$ m);
- elektromagnetna interakcija, interakcija između naelektrisanih tela, beskonačno dometna;
- gravitaciona interakcija, interakcija između tela koja imaju masu, beskonačno dometna.

Broj osnovnih interakcija u prirodi je donekle otvoreno pitanje, trenutno nema konačan odgovor. Po teoriji nastanka vasione, Velikim praskom, logično bi bilo očekivati da je u trenutku praska postojala samo jedna vrsta interakcije. Uspešno je pokazano da su na visokim energijama slaba i elektromagnetna interakcija jedna (elektroslaba interakcija), odnosno da su se razdvojile u posebne usled hlađenja vasione. Delimično uspešno je pokazano da su na još većim energijama, nuklearna jaka, slaba i elektromagnetna interakcija bile jedno (kvantna hromodinamika). Ono što se nikako ne može ujediniti je gravitacija. Za sada nema uspeha u nalaženju jedne pra-ineterakcije i objašnjenju postanka danas poznatih interakcija. Sa druge strane, otvoreno pitanje je da li znamo kompletnu materijalnu strukturu vasione. Otkrića tamne materije i tamne energije nam ukazuju da je moguće da u vasioni postoji još mnogo toga što se ne da opisati poznatim modelima. Da li će nova otkrića u budućnosti pokazati da u prirodi postoji još neka vrsta interakcije, otvoreno je pitanje.

Osnovne fizičke veličine u dinamici

MASA: Iz iskustva (eksperimenta) je poznato da se svako telo protivi bilo kakvom pokušaju menjanja njegove brzine, po intenzitetu ali i po pravcu i smeru.

Ova osobina se naziva *inertnost*. Mera inertnosti tela je *masa*. Osnovna merna jedinica za masu je kilogram (kg). U okviru Njutnove mehanike masa je aditivna veličina i tokom kretanja tela se ne menja.

IMPULS, ili količina kretanja, je proizvod mase tela i njegove brzine:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}.$$

SILA je fizička veličina koja je mera interakcije tela. Sila je vektorska veličina. Na osnovu eksperimenta još je Njutn uočio vezu između sile i promene impulsa:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

odnosno, *impuls sile je jednak promeni količine kretanja*, u originalnoj formulaciji.

Fascinantno je da je u originalnoj formulaciji zakon dobar i u relativističkom slučaju, samo što fizičke veličine nemaju sasvim isti smisao kao u klasičnoj mehanici.

Pošto je $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, onda je $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v})$. Ako je masa konstantna, onda je promena impulsa proporcionalna promeni brzine $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = m\mathrm{d}\boldsymbol{v}$, pa je $m\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t$, odnosno $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$, što predstavlja osnovnu jednačinu dinamike:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{3.5}$$

Zanimljivo je da osnovna jednačina dinamike nije dobra u relativističkom slučaju.

Merna jedinica za silu je njutn. Sila od 1N je sila koja telu mase od 1kg daje ubrzanje od 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Slaganje sila

U eksperimentu kojim se posmatra kretanje ili određuje putanja tela može se utvrditi delovanje samo zbirne, *rezultujuće* sile. Rezultujuća sila je određena položajem okolnih tela, a ponekad i brzinom tela koje se posmatra.

Rezultujuća sila može da se razloži na sile koje potiču od pojedinačnih tela, pod uslovom da ta tela ne interaguju tako da menjaju svoja stanja:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots.$$

Svaka interakcija je dvočestična te je svaka pojedinačna sila $\boldsymbol{F}_i$ mera dvočestične interakcije i ne zavisi ostalih tela u okolini. Zbog toga se rezultujuća sila uvek može razložiti na zbir sila koje potiču od pojedinačnih interakcija, što se naziva *principom superpozicije*. Do ideje o superpoziciji se došlo generalizacijom eksperimentalnih činjenica.

Vrlo važan je primer kada na telo deluje više sila, ali je rezultujuća sila jednaka nuli:

$$\boldsymbol{F}_{rez} = 0. \tag{3.6}$$

Ako se ovaj uslov ne naruši tokom kretanja, onda se telo kreće po inerciji iako na njega deluju sile, ali je zbir svih sila jednak nuli. Ako je rezultujuća sila jednaka nuli onda je ispunjen *uslov ravnoteže* za materijalnu tačku.

Treći Njutnov zakon

Interakcija podrazumeva uzajamnost. Kada dva tela interaguju oba osećaju posledice interakcije. Njutn je uočio da postoji veza između sila koje deluju na tela koja interaguju.

Za dva tela (označena sa 1 i 2) koja interaguju važi:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}. \tag{3.7}$$

Sile kojima dva tela uzajamno deluju uvek su jednakih intenziteta, suprotnog smera i deluju duž pravca koji spaja ova dva tela (materijalne tačke). Ili, svaka sila akcije ima silu reakcije, koja je istog intenziteta, duž istog pravca a suprotnog smera. Treći Njutnov zakon se lako uopštava i na sistem od više tela.

Interesantno je da je u originalnoj formulaciji Njutn dodao i da su sile akcije i reakcije *istovremene* i da su *iste prirode* (isti im je uzrok). *Sile akcije i reakcije uvek deluju na različita tela.*

Uslov da su sile akcije i reakcije istovremene implicitno podrazumeva da se interakcija prostire trenutno, zapravo beskonačnom brzinom, a to dalje znači da su interakcije dugodometne. Ni jedna interakcija nije trenutna, najveća brzina kojom se prenosi interakcija je brzina svetlosti, ali u klasičnim problemima u kojima su brzine tela mnogo manje od brzine svetlosti, aproksimacija trenutne interakcije je dovoljno dobra. Drugim rečima i treći Njutnov zakon je aproksimativan i važi samo u slučajevima u kojima su brzine tela zanemarljivo male u poređenju sa brzinom svetlosti, odnosno sa brzinom kojom se prenosi interakcija.

Po Galilejevom principu relativnosti fizički zakoni u svim inercijalnim sistemima su isti. Sa druge strane, masa tela ne zavisi od brzine, odnosno ista je u svakom referentnom sistemu. U svakom inercijalnom sistemu ubrzanje tela je isto. Sila zavisi samo od tela koja interaguju, a ne od referentnog sistema iz koga se interakcija posmatra. Kada se sve ovo uzme u obzir zaključuje se da je osnovna jednačina dinamike ista u svakom inercijalnom sistemu, ili da je invarijantna na Galilejeve transformacije.

Važnije vrste sila

U ovom odeljku će biti opisane sile koje će se najviše pominjati u ostatku teksta, i sa kojima ćete se najčešće susretati u zadacima.

Gravitaciona sila

Njutnov zakon gravitacije:

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{3.8}$$

gde je γ gravitaciona konstanta i jednaka je $6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$, a m_1 i m_2 su gravitacione mase tela, za koje nije očigledno da su jednake masama koje su mera inertnosti tela. I ako je još 1747 Kevendiš eksperimentalno pokazao da su inertna i gravitaciona masa iste fizičke veličine, teorijski je to dokazano tek u okviru Ajnštajnove opšte teorije relativnosti, 1915. Gravitacionoj sili i gravitaciji je posvećena posebna glava u drugom delu knjige (glava 8).

Kulonova sila

Kulonovom silom interaguju dva tačkasta naelektrisana tela koja miruju.

$$\boldsymbol{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{3.9}$$

gde je $k = 8.99 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$ konstanta za tela u vakuumu, a q_1 i q_2 su naelektrisanja tela. U zavisnosti od vrste naelektrisanja sila može da bude privlačna ili odbojna. Međutim čim se neko naelektrisanje pokrene ono stvara i magnetno polje, ali ako je brzina tela mala, onda je doprinos Kulonove sile mnogo veći od magnetne sile.

Naelektrisana tela mogu da budu i neutralna ako imaju jednak broj pozitivnih i negativnih naelektrisanja. I takva tela interaguju ako naelektrisanja nisu ravnomerno raspoređena po telu. Dobar primer za ovo su molekuli vode.

Makroskopske sile

Makroskopske sile su posledica bar jedne od ove dve fundamentalne interakcije. U svakom realnom makroskopskom slučaju je nemoguće analizirati ogroman broj mikroskopskih sila fundamentalnog tipa, pa se uvode aproksimativne makroskopske sile.

Težina tela je sila i ne sme se mešati sa masom tela[2]. Težina tela je gravitaciona sila Zemlje u blizini njene površine,

[2] Bez obzira na svakodnevnu upotrebu reči težina.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}. \tag{3.10}$$

Ovakva definicija težine povlači pažljivo definisanje bestežinskog stanja i težine tela u tečnosti.

U našem školskom sistemu težina se definiše kao sila kojom telo pritiska podlogu na kojoj se nalazi ili zateže konac o koji je obešeno. U većini strane literature je težina definisana kao i u ovom poglavlju. Treba samo voditi računa da pojmovi izvedeni iz pojma težine budu adekvatno definisani.

Elastičnom silom se naziva svaka sila koja je srazmerna rastojanju tela od ravnotežnog položaja, i usmerena je ka ravnotežnom položaju:

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}, \tag{3.11}$$

gde je k koeficijent elastičnosti (konstanta sile), a $\boldsymbol{r}$ vektor položaja u odnosu na ravnotežni položaj. Primer za ovakvu silu je elastična sila opruge, koja deluje na telo pričvršćeno za oprugu, ako je istezanje u okvirima Hukovog zakona. Elastičnoj sili, odnosno oscilacijama, je posvećena posebna glava (glava 9).

Sila trenja: Na telo koje kliza po podlozi deluje sila trenja klizanja:

$$F_{tr} = \mu N,$$

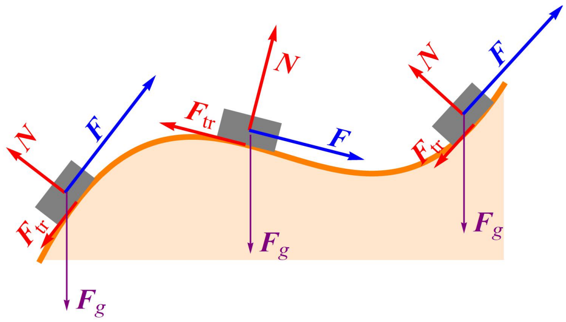
gde je μ koeficijent trenja klizanja, a $\boldsymbol{N}$ sila reakcije podloge. Sila trenja klizanja deluje na telo koje se kreće, i uvek je usmerena suprotno od brzine tela, dakle tangencijalna je na putanju.

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{tr}} = -\mu N \boldsymbol{\tau},$$

gde je $\boldsymbol{\tau}$ ort tangente (jednačina 2.12).

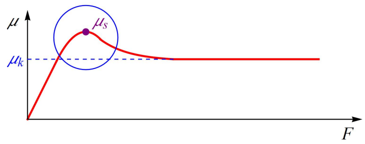
Sila reakcije podloge je normalna na podlogu, odnosno na putanju tela, u svakoj tački putanje po kojoj se telo kreće.

Sila trenja deluje i na tela koja miruju ako na njih deluje neka sila koja pokušava da ih pokrene. Sve dok se telo ne pokrene ona nije jednaka sili trenja klizanja. Zavisnost koeficijenta trenja od intenziteta sile koja deluje na telo pokazuje da dok telo miruje intenzitet sile trenja je jednak intenzitetu sile koja deluje na telo.



Slika 3.2: Pravac i smer sile trenja klizanja i sile reakcije podloge.

Vrlo važno mesto na ovom grafiku je lokalni maksimum koeficijenta trenja, odnosno sile trenja. Maksimalnoj vrednosti koeficijenta trenja odgovara sila trenja mirovanja. To je sila trenja neposredno pre nego što se telo pokrenulo i ona je veća nego sila koja deluje na telo koje se kliza. Kao što će se videti kasnije, trenje kod kotrljanja bez klizanja je trenje mirovanja.



Slika 3.3: Koeficijent trenja u zavisnosti od intenziteta sile paralelne podlozi na kojoj se telo nalazi. Zaokružena je oblast u kojoj povećanje sile može da pokrene telo. Maksimum koeficijenta trenja je koeficijent statičkog trenja.

Sila otpora sredine deluje na telo koje se kreće kroz gas ili tečnost. Sila otpora sredine može da zavisi od nekoliko fizičkih veličina, ali u najjednostavnijem slučaju je srazmerna brzini tela:

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v},$$

za relativno male brzine tela, ili:

$$\boldsymbol{F} = -\kappa v^2 \boldsymbol{\tau},$$

za nešto veće brzine kretanja tela. Koeficijenti k i κ su koeficijenti proporcionalnosti, $\boldsymbol{\tau}$ je ort brzine. Složene zavisnosti se aproksimiraju, uglavnom tako da se daju vrednosti koeficijenta srazmernosti pri različitim uslovima. Ako se uslovi u sredini ne menjaju mnogo dok se telo kreće kroz nju može se uzeti da su koeficijenti k ili κ konstantni.

Zavisnost sile otpora sredine od brzine tela se lepo vidi na primeru letilica koje probijaju zvučni zid. Posle probijanja zvučnog zida, odnosno za brzine veće od brzine zvuka, vazduh se ponaša kao mnogo gušća sredina nego što stvarno jeste.

Osnovni problem dinamike

Eksperimentalno je pokazano da u uslovima klasične mehanike proizvod mase i ubrzanja tela zavisi od njegovog položaja u odnosu na okolna tela, a ponekad i od njegove brzine, što znači da od istih fizičkih veličina može da zavisi i sila. Sila takođe može da se menja tokom vremena, nezavisno od promene položaja tela. U opštem slučaju sila može da zavisi od sve tri ove fizičke veličine:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t).$$

Neka je masa tela koje se kreće konstantna. U tom slučaju osnovna jednačina dinamike ima oblik:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t). \tag{3.12}$$

U najopštijem slučaju ovo je diferencijalna jednačina drugog reda. Da bi se rešila moraju da se znaju masa tela i sila, odnosno *zakon* *sile*. Vrlo važan zadatak u mnogim oblastima fizike je utvrđivanje zakona sile. Rešenje jednačine 3.12 je konačna jednačina kretanja, $\boldsymbol{r}(t)$. Problem je iste vrste kao kinematički problem u kome je poznato ubrzanje a traži se jednačina kretanja 2.11. Da bi se dobilo konačno rešenje bilo je potrebno znati i početne uslove. Dakle, da bi se rešio osnovni problem dinamike moraju da budu poznati:

- masa tela koje se kreće;
- zakon sile;
- početni uslovi.

Da bi se rešila osnovna jednačina dinamike potrebno je izabrati koordinatni sistem i u njemu razložiti vektorsku jednačinu.

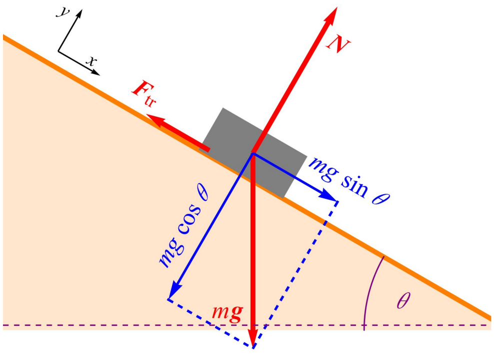
Dekartove koordinate

U Dekartovim koordinatama osnovna jednačina dinamike se razlaže na tri skalarne jednačine:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x,\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y,\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z. \tag{3.13}$$

Komponente sile su F_x, F_y i F_z.

Primer 3.1
Strma ravan



Telo mase m klizi niz strmu ravan nagibnog ugla θ. Koeficijent trenja klizanja između podloge i tela je μ. Naći ubrzanje tela.
Rešenje:
Izbor koordinatnog sistema može značajno da olakša posao. Neka jedna koordinatna osa, na primer x bude paralelna podlozi (niz strmu ravan). Onda je $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{F}_{tr} = -\mu N\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{g} = g\sin\theta\boldsymbol{e}_x - g\cos\theta\boldsymbol{e}_y$. Komponente jednačine kretanja su:

$$ma = mg\sin\theta - \mu N,\ (x - \text{osa})$$

$$0 = N - mg\cos\theta,\ (y - \text{osa}).$$

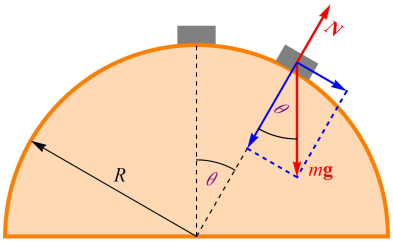
Konačno, $a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$.

Prirodne koordinate

Nekada je podesno jednačinu kretanja izraziti u prirodnim koordinatama. Ovo je posebno zgodno ako se telo kreće po kružnici. U prirodnim koordinatama osnovna jednačina se razlaže na dve skalarne jednačine, uzimajući u obzir prirodne komponente ubrzanja 2.13:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_\rho. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Primer 3.2
Glatka polusfera



Telo bez početne brzine počne da klizi bez trenja po površi lopte, poluprečnika R. Naći brzinu tela u trenutku odvajanja od lopte.
Rešenje:
Skalarne jednačine kretanja u prirodnim koordinatama su:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\theta,$$

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N.$$

Na prvi pogled deluje vrlo složeno, pošto, na primer u prvoj jednačini treba znati i kako ugao θ zavisi od vremena sa bi se ona rešila. Ipak, izvod brzine može da se transformiše $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$. Intenzitet brzine je $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$, dok je $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$, tako da tangencijalna komponenta jednačine postaje:

$$v\mathrm{d}v = gR\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

što se rešava nezavisnom integracijom svake strane jednačine.

$$\int v\mathrm{d}v = gR\int\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

,

$$\frac{v^2}{2} = gR(-\cos\theta) + C.$$

Konstanta C se dobija iz početnih uslova. U početnom trenutku $\theta = 0$ i brzina je jednaka nuli, tako da $C = gR$. Kvadrat brzine je u tom slučaju:

$$v^2 = 2gR(1-\cos\theta).$$

Ostaje još da se iskoristi trenutak odvajanja tela od podloge. Sila reakcije podloge je posledica kontakta tela sa podlogom. Sve dok su telo i podloga u kontaktu ona postoji. Granični trenutak je onaj u kome sila postaje jednaka nuli, to je trenutak odvajanja. Iz jednačine duž normale na putanju se dobija:

$$\frac{N}{m} = g\cos\theta - \frac{v^2}{R}.$$

Kada se izraz za kvadrat brzine uvrsti u ovu jednačinu, dobija se:

$$\frac{N}{m} = (3\cos\theta - 2)g.$$

U trenutku odvajanja $N = 0$, odnosno $\cos\theta_{odv} = \frac{2}{3}$. Kada se vrednost kosinusa graničnog ugla vrati u izraz za brzinu, dobija se:

$$v^2 = \frac{2}{3}gR.$$

Ova dva primera, posebno drugi, lepo prikazuju koliko je važno izabrati dobre koordinate. Dobrim izborom koordinata i koordinatnog sistema problem može značajno da se pojednostavi.

Neinercijalni sistemi - Inercijalne sile

Osnovna jednačina dinamike važi samo u inercijalnim sistemima reference. Neka se kretanje nekog tela posmatra iz referentnog sistema K′ koji se u odnosu na inercijalni sistem K kreće ubrzano, ubrzanjem $\boldsymbol{a}_0$ i rotira konstantnom ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$. Na osnovu jednačine 3.1, ubrzanje tela u sistemu K′ je:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0 + \omega^2 \boldsymbol{\rho} + 2\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}, \tag{3.15}$$

gde je $\boldsymbol{v}'$ brzina tela u sistemu K′, $\boldsymbol{\rho}$ vektor položaja u odnosu na osu rotacije (uvek je normalan na osu rotacije).

U inercijalnom sistemu sila je uvek[3] jednaka proizvodu mase i ubrzanja tela, odnosno $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, tako da ako se jednačina 3.15 pomnoži masom tela dobija se:

[3] Kada se masa tela ne menja tokom kretanja.

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 + m\omega^2 \boldsymbol{\rho} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.16}$$

Jednačina 3.16 je osnovna jednačina dinamike u neinercijalnom sistemu reference. Samo je sila $\boldsymbol{F}$ posledica interakcije, dok su svi ostali članovi posledica ubrzanog kretanja sistema u kome opisujemo kretanje tela, odnosno posledica neinercijalnosti tog sistema. Čak i ako na telo ne deluje nikakva sila ($\boldsymbol{F} = 0$) ono će se kretati ubrzano u neinercijalnom sistemu. Tri člana sa desne strane jednačine 3.16 imaju dimenzije sile i nazivaju se *inercijalnim silama*.

Inercijalne sile nisu sile, nego se članovi iz transformacija koordinata interpretiraju kao sile. Zbog toga se za ove sile često kaže da nisu prave sile, odnosno da su *efektivne* ili *fiktivne*.

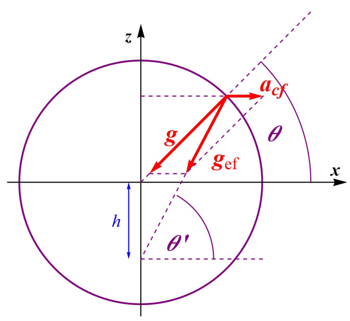
Tri inercijalne sile u jednačini 3.16 su:

- $-m\boldsymbol{a}_0$ (translatorna) inercijalna sila,
- $m\omega^2\boldsymbol{\rho}$ centrifugalna sila,
- $2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ Koriolisova sila.

Inercijalna sila koja potiče od translatornog ubrzanog kretanja sistema, odnosno od ubrzanog kretanja koordinatnog početka pokretnog sistema, uvek je usmerena suprotno od ubrzanja sistema. To je, na primer, sila koju osetimo dok se vozimo u nekom prevoznom sredstvu, pri ubrzavanju ili kočenju.

Centifugalna sila deluje na telo koje se nalazi u sistemu koji rotira. Uvek je normalna na osu rotacije, usmerena od ose (duž vektora $\boldsymbol{\rho}$).

Koriolisova sila deluje na telo koje se kreće u sistemu koji rotira. Ona je normalna na ravan koju, u svakom trenutku, određuju vektori $\boldsymbol{v}'$ i $\boldsymbol{\omega}$. Smer se određuje po pravilu za vektorski proizvod. Dakle, ako se telo kreće u sistemu koji rotira na njega će delovati i centrifugalna i Koriolisova sila.

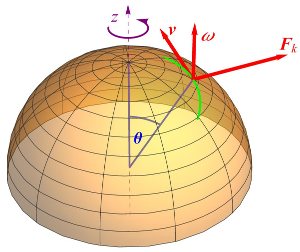


Slika 3.4: Korekcija gravitacionog ubrzanja Zemlje zbog centrifugalne sile. Na slici je predimenzionirano centrifugalno ubrzanje u odnosu na gravitaciono, zbog preglednosti.

Zemlja - inercijalni ili neinercijalni sistem?

Zemlja rotira oko svoje ose i oko Sunca, Sunce rotira oko centra galaksije, galaksija takođe rotira, te zato, strogo gledano, ni jedan referentni sistem vezan za Zemlju ne može da bude inercijalan, pošto se Zemlja kreće ubrzano. Ipak vredi proceniti doprinose inercijalnih sila na tela koja se kreću na Zemlji. Najjednostavnije je uporediti ubrzanja koja potiču od inercijalnih sila sa gravitacionim ubrzanjem Zemlje.

Centrifugalno ubrzanje na ekvatoru je $a_{cf} = \omega_Z^2 R_Z$, gde su ω_Z i R_Z ugaona brzina i poluprečnik Zemlje, respektivno. Kada se uvrste brojčane vrednosti dobija se da je na ekvatoru $a_{cf} \approx 0.03 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Na drugim geografskim širinama rastojanje neke tačke na površini Zemlje, od ose rotacije je manje od poluprečnika Zemlje, pa je samim tim i centrifugalno ubrzanje manje nego na ekvatoru.



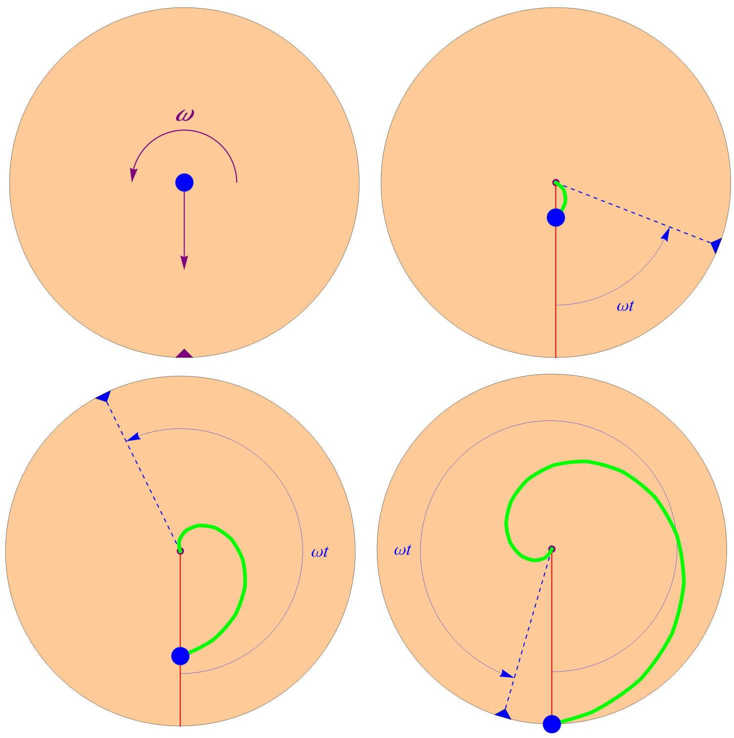
Slika 3.5: Koriolisova sila koja deluje na telo koje se kreće na površini Zemlje. Zelenom bojom je označena putanja tela.

Očigledno je da je ono mnogo manje (oko trista puta) od ubrzanja Zemljine teže. Sa druge strane centrifugalno ubrzanje je uvek usmereno normalno na osu rotacije. Zbog toga centrifugalno ubrzanje kada se doda na gravitaciono, daje efektivno gravitaciono ubrzanje, koje pored blago promenjenog intenziteta ima i neznatno promenjen smer (slika 3.4).

Centrifugalno ubrzanje zbog rotacije Zemlje oko Sunca je još manje i približno je $0.006 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Dakle, uticaj obe rotacije Zemlje bilo na telo koje miruje, bilo na ono koje se kreće na njenoj površini je praktično zanemarljivo.

Ako se telo kreće u odnosu na Zemlju na njega deluje i Koriolisova sila. Koriolisova sila je vrlo malog intenziteta za realistične brzine tela, ipak njeno delovanje se može primetiti.

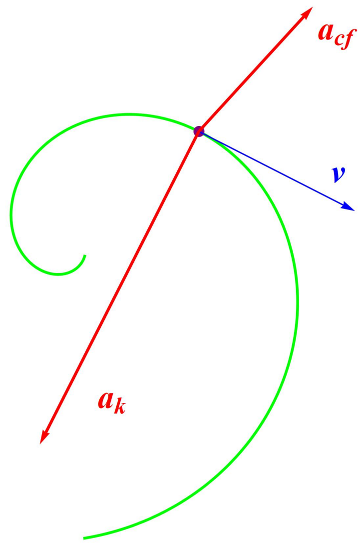
Kretanje tela na disku koji rotira



Slika 3.6: Kretanje tela po disku koji rotira.

Putanja tela po disku bi mogla lako da se vidi ako bi telo ostavljalo trag tokom kretanja.

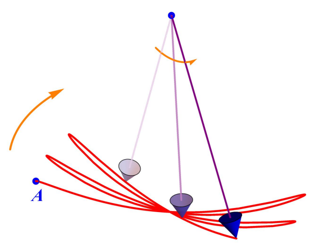
Ilustrativan primer za delovanje inercijalnih sila je primer tela koje se kreće po horizontalnom disku. Neka disk rotira konstantnom ugaonom brzinom ω (normalnom na ravan u kojoj je disk), i neka telo može da se kreće po površi diska bez trenja. Telo se pokrene ka tački na obodu diska koja je obeležena trouglom na slikama 3.6. Za posmatrača iz inercijalnog sistema reference, telo se kreće pravolinijski (pošto nema trenja). Putanja će uvek biti prava linija nezavisno od toga koliki je intenzitet ugaone brzine (crvena linija na slikama). Za vreme t dok telo pređe neki put, disk se zarotira za ugao ωt. Međutim, ako se kretanje tela posmatra iz sistema reference vezanog za disk, onda putanja nije prava linija, već kriva (zelena linija na slikama 3.6). Trajektorija ima drugačiji oblik zbog toga što na telo u neinercijalnom sistemu reference deluju inercijalne sile (cetrifugalna i Koriolisova), tako da se telo kreće ubrzano, kao što je prikazano na slici 3.7. Izgled putanje zavisi od toga kolika je ugaona brzina diska.



Slika 3.7: Ubrzanje i brzina tela gledano iz neinercijalnog sistema koji rotira.

Fukoovo klatno

Klatno se sastoji od masivne kupe na vrhu i vrlo dugačkog konopca o koji je kupa okačena. Kada se klatno izvede iz ravnotežnog položaja može da osciluje danima, bez velikog smanjenja amplitude. Ako se pažljivo posmatra putanja po kojoj se kreće vrh klatna, posle dužeg vremena vidi se da se ravan u kojoj klatno osciluje pomerila, odnosno zarotirala u odnosu na početni položaj. Na slici 3.8 je predstavljena putanja vrha klatna. Treba voditi računa da je oblik putanje dobijen za Koriolisovo ubrzanje koje je hiljadu puta veće od stvarnog, zbog lakšeg uočavanja efekta. Stvarna putanja tokom jednog perioda klatna je zanemarljivo malo zakrivljena. Skretanje se primećuje tek posle mnogo proteklih perioda. Period rotacije ravni u kojoj osciluje klatno je:



Slika 3.8: Koriolisova sila koja deluje na klatno. Zbog dejstva sile putanja blago rotira u prikazanom smeru.

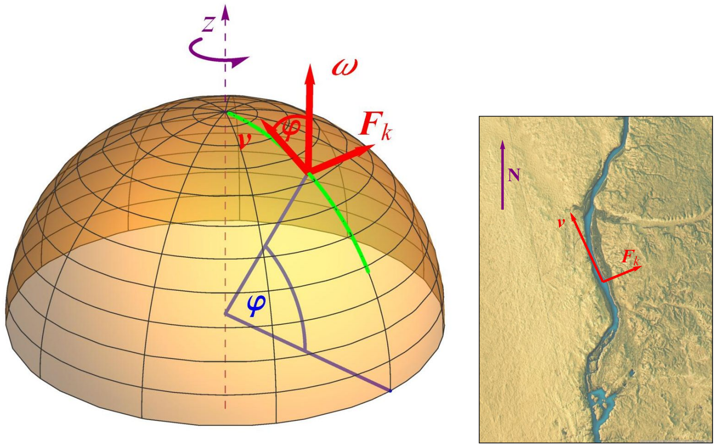
$$T_k = \frac{T_z}{\sin\psi},$$

gde je ψ geografska širina na kojoj se klatno nalazi.

Rotacija ravni u kojoj klatno osciluje je jedan od neoborivih dokaza Zemljine rotacije, ali i dokaz da je oblik Zemlje vrlo blizak sfernom.

Erozija obala reka

Delovanje Koriolisove sile se primećuje i na obalama reka, naročito onim rekama koje teku približno duž meridijana. Pravac i smer Koriolisove sile koja deluje na telo koje se kreće ka severu, na severnoj polulopti je prikazano na slici 3.9. Premda je sila malog intenziteta, tokom dugog vremenskog perioda delovanja, sila izaziva nešto veću eroziju obale ka kojoj deluje. U primeru sa slike, to je desna obala reke. Na južnoj polulopti kod reka koje teku duž meridijana, više erodira leva obala.



Slika 3.9: Koriolisova sila koja deluje na telo koje se kreće po meridijanu (levo) i sila koja deluje na vodu u reci koja se kreće ka severu, na severnoj polulopti (desno).

Kretanje vazdušnih i okeanskih struja

Delovanje Koriolisove sile se najbolje vidi pri kretanju velikih masa, tokom dugih vremenskih razdoblja, pri čemu one prelaze velika rastojanja. Primeri za takva kretanja su kretanja vazdušnih i okeanskih struja. Okeani spadaju u stajaće vode, ali zbog različitih temperatura vode na različitim mestima, zbog različitih koncentracija soli dolazi do kretanja velikih vodenih masa. Čim se voda pokrene, Koriolisova sila utiče na njeno kretanje. Dakle, ispod površine, okeani su vrlo živa vodena prostranstva.

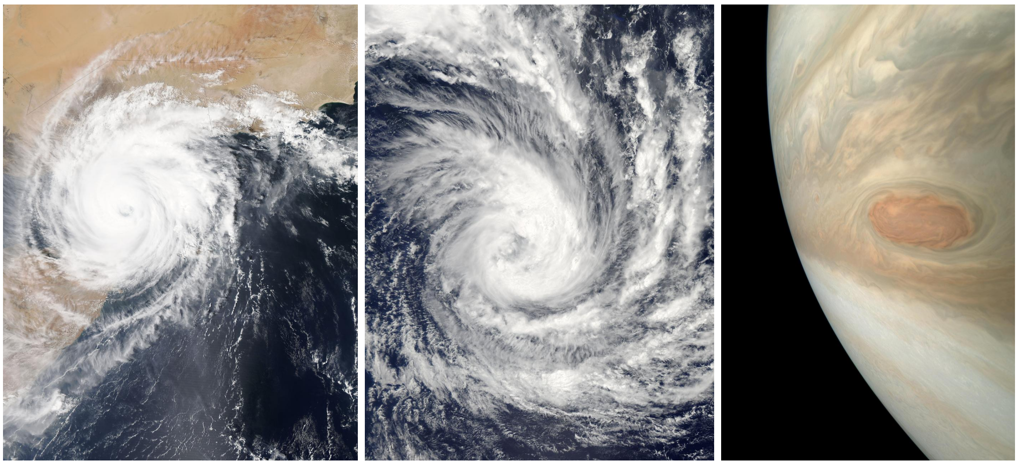
Na sve velike vodene struje utiče Koriolisova sila. Golfska struja, na primer, skreće ka obalama u severnoj Evropi upravo zbog delovanja ove sile. Golfska struja ima veliki uticaj na klimu istočne obale Amerike i zapadne obale Evrope, pa je vrlo važno dobro je proučiti i razumeti razloge za njeno postojanje.

Kretanje velikih okeanskih *virova* (kružno kretanje ogromnih količina vode u okeanima, po pravilu daleko od obale) je izazvano uglavnom delovanjem Koriolisove sile. Značaj razumevanja načina na koji nastaju i kako se kreću velike okeanske struje je ogroman zbog toga što one umnogome utiču na klimu na kopnu.

„Bližili smo se zoni ekvatorijalnih kiša od koje su moreplovci ranije zazirali. Vetrovi obe hemisfere zaustavljali su se na granicama te zone, gde su jedra nedeljama mlitavo visila jer nije bilo ni daška vetra da ih pokrene. Vazduh je tako nepomičan da čovek pomišlja kako se nalazi u zatvorenoj prostoriji, a ne na pučini; tamni oblaci čiju ravnotežu ne remeti nikakav povetarac, osetljivi samo na silu teže, lagano se spuštaju na morsku površinu i tu se raspadaju. Da nisu toliko tromi, čistili bi uglačanu površinu svojim oklembešenim krajevima."(Klod Levi Štros: „Tužni tropi", 1955.)

U atmosferi ima mnogo pojava koje su posledica i Koriolisovog efekta. Jedna od njih je pojava vetrova *pasata*. Topao vazduh oko ekvatora se podiže u visinu, i počinje da se kreće prema polovima (na severnoj polulopti ka severnom polu). Zbog delovanja Koriolisove sile vazdušne struje skreću ka istoku. Stižu blizu povratnika (oko 30° geografske širine), i deo već ohlađenog vazduha se spušta i vraća ka ekvatoru. Ovoga puta vazdušna struja skreće ka zapadu. Ovi vetrovi stalno duvaju, uvek na malim visinama, ka ekvatoru, i nazivaju se *pasatima*. Moreplovci su odavno znali za njih, i koristili su ih za plovidbu u blizini ekvatora. Zanimljivo je da su na geografskim širinama manjim od 5° ovi vetrovi gotovo zanemarljivi. Zbog toga se pojas oko ekvatora u kome nema vetrova naziva pojasom tišine.

Razorni vetrovi cikloni (tornada) umnogome su izazvani dejstvom Koriolisove sile. Kao i svaki drugi vetar i tornado nastaje tako što se u vazdušnoj masi pojavi oblast niskog pritiska. Okolni vazduh krene



Slika 3.10: Tornado u blizini Jemena (levo) i u južnom delu Indijskog okeana (sredina). Crvena mrlja na Jupiteru (desno).

ka ovoj oblasti da bi se pritisak izjednačio. Na vazdušnu struju deluje Koriolisova sila, što izaziva kružno kretanje vazduha, odnosno pojavu karakteristične spirale tornada. Na severnoj polulopti cikloni rotiraju suprotno od kazaljke na satu, a na južnoj u suprotnom smeru. Kao što u pojasu tišine nema običnih i blagih pasata, iz istog razloga nema ni tornada. Zanimljivo je da je čuvena crvena mrlja na Jupiteru zapravo ogroman ciklon, koji se kreće vekovima.

Zaključak

Inercijalne sile su uslovljene samo načinom kretanja neinercijalnih sistema. Za njih ne važi III Njutnov zakon, zato što ne predstavljaju interakciju sistem - telo, odnosno strogo gledano i nisu sile.

Inercijalne sile postoje samo u neinercijalnim sistemima.

Translaciona inercijalna sila ima isti oblik kao gravitaciona sila pošto je proporcionalna masi tela. U homogenom polju inercijalnih sila (kretanje sistema konstantnim ubrzanjem) sva tela, posmatrana iz istog sistema, se kreću istim ubrzanjem bez obzira kolika im je masa.

Poslednji iskaz je zapravo polazna tačka Ajnštajnove ideje za Opštu teoriju relativnosti, a to je da ne postoji eksperiment koji bi utvrdio da li se krećemo ravnomerno ubrzano ili smo u nekom gravitacionom polju.

Konačno, početnicima u izučavanju fizike može da bude neobičan termin *inercijalne sile*. Pre svega zbog toga što se one javljaju u *neinercijalnim* sistemima. Neka se neko telo nalazi u praznoj kamionskoj prikolici koja se kreće konstantnom brzinom. Tada se telo u prikolici kreće po inerciji (miruje u odnosu na prikolicu, a kreće se konstantnom brzinom u odnosu na neki inercijalni sistem sa strane). Ako prikolica počne da koči, telo počinje da klizi napred. Gledano iz prikolice, kao da neka sila počne da deluje na telo, pa ga pomera napred, u odnosu na prikolicu. Ta sila podržava težnju tela da nastavi da se kreće po inerciji, u odnosu na nepokretni sistem, pa se zato i zove inercijalna.

Zadaci

3.1 Kako izgledaju veze za Dekartove koordinate u opštem slučaju Galilejevih transformacija (jednačina 3.2)?

3.2 U čemu je razlika između Galilejevih transformacija i jednačina 2.28 i 2.29 koje daju vezu između brzine i ubrzanja u dva sistema reference koji se jedan u odnosu na drugi kreću translatorno?

3.3 Kako se masa tela može direktno izmeriti?

3.4 Ako znamo projekciju vektora, da li možemo da odredimo vektor?

3.5 Objasniti zašto težina tela, elastična sila, sila trenja i sila otpora sredine aproksimativne sile.

3.6 Da li telo može da bude u ravnoteži ako na njega deluje samo jedna sila? Objasniti.

3.7 Lopta koja je bačena vertikalno naviše se zaustavi u najvišoj tački. Da li je u toj tački lopta u ravnoteži? Objasniti.

3.8 Balon ispunjen helijumom lebdi u vazduhu, ne menjajući visinu. Da li je balon u ravnoteži? Koje sile deluju na balon?

3.9 Komad tankog konca je zategnut tako što na oba njegova kraja deluju sile, suprotnog smera i jednakih intenziteta. Zbog toga je konac u ravnoteži. Ako se intenziteti sila povećaju može da dođe do pucanja konca. Kako konac pukne ako je u ravnoteži, odnosno ako je rezultujuća sila na konac jednaka nuli?

3.10 Za vreme zime, kada su snežni dani, deca se često klizaju na „klizi". Kliza je dobro utabana i uglačana ledena staza. Po njoj se kliza tako što se uhvati zalet na delu koji nije klizav i zatim se bez pokretanja nogu kliza po ledu. Dečak, mase 60 kg, razvije brzinu od 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, i uspe da se kliza 10 m, do zaustavljanja. Kolika je sila trenja koja deluje na dečaka tokom klizanja? Otpor vazduha zanemariti.

3.11 Konj vuče kočije nekom silom. Istom tolikom silom kočije vuku konja nazad. Kako onda konj uopšte pokreće kočije?

3.12 Dve ekipe, A i B, se nadmeću u nadvlačenju konopca. Sila kojom ekipa A vuče ekipu B preko konopca je jednaka po intenzitetu sili kojom ekipa B vuče ekipu A. Šta onda odlučuje pobednika?

3.13 Kosmonaut vežbajući na poligonu na Zemlji, u svemirskom odelu, ispusti kutiju za alat i ona mu padne na nogu. Na žalost, to mu se isto desi na Mesecu. Kojom prilikom ga je više zabolelo?

3.14 Gurate masivnu kutiju u veliki teretni lift. Kako uđete u lift vrata se zatvaraju lift se pokrene, a vi nastavite da gurate kutiju u liftu. U kojoj situaciji je najveća sila kojom treba da gurate kutiju, da biste je pokretali: kada lift ubrzava naviše, kada se kreće konstantnom brzinom naviše, kada se kreće konstantnom brzinom naniže ili kada ubrzava naniže?

3.15 Ako na telo koje se kreće deluje samo jedna sila konstantnog intenziteta, kakvo će biti ubrzanje tela, konstantno ili samo konstantnog intenziteta? Objasnite.

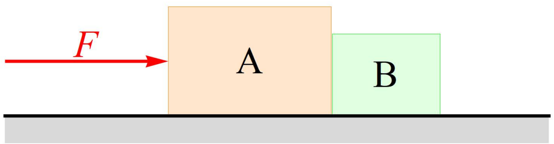
3.16 Na stolu visokom 1 m stoji glavica kupusa mase 1 kg. Kolikom, približno, silom ona privlači Zemlju?

3.17 Skakačica u vodu, odskače od tramboline, i skače u vodu. Koliko je ubrzanje Zemlje koje nastaje usled sile kojom skakačica privlači planetu?

3.18 Automobil se kreće sasvim horizontalnom i pravom ulicom. Na raskrsnici koju treba da pređe, na semaforu se uključi crveno svetlo. Automobil koči dok se ne zaustavi. Koja sila je izazvala zaustavljanje automobila? Kada se uključi zaleno svetlo automobil kreće i na početku ubrzava. Koja sila izaziva ubrzavanje automobila?

3.19 Na telo koje se kreće horizontalno pravolinijski deluje horizontalna sila koja je kvadratna funkcija vremena. Kako ubrzanje zavisi od vremena?

3.20 Na horizontalnoj idealno glatkoj podlozi leže dve kutije A i B. Kutija A ima veću masu od kutije B. Na kutiju A deluje konstantna sila $\boldsymbol{F}$. (a) Sila kojom kutija A deluje na kutiju B, tokom kretanja je jednaka sili $\boldsymbol{F}$, manja od nje ili veća? (b) Obrnimo sliku: sila istog intenziteta deluje na suprotnu stranu, na kutiju B, kakva će biti sila kojom kutija B deluje na kutiju A, u poređenju sa silom $\boldsymbol{F}$. (c) Neka sada ima trenja, i neka je koeficijent trenja između kutije i podloge isti za obe kutije. Neka sila deluje kao u slučaju (a), ali je nedovoljnog intenziteta da pokrene kutije. U kakvom su sada odnosu sila $\boldsymbol{F}$ i sila kojom kutija A deluje na kutiju B? (d) Sada je sila $\boldsymbol{F}$ takva da pokreće kutije, u kakvom su odnosu sila $\boldsymbol{F}$ i sila kojom kutija A deluje na kutiju B? (e) Da li se nešto menja ako sila deluje na kutiju B na levo?



3.21 U uputstvu za letenje vazduhoplovne škole, pored ostalog piše: „Kada avion leti na konstantnoj visini, ne penje se niti ponire, sila uzgona je jednaka sili Zemljine teže koja deluje na avion. Ako se avion penje konstantnom brzinom, sila uzgona je veća od sile Zemljine teže, dok kada avion ponire konstatnom brzinom, sila teže je veća od sile uzgona". Da li su ovi iskazi tačni? Objasniti.

3.22 Kada operete ruke a nemate čime da ih obrišete, onda ih tresete da se oslobodite viška vlage. Kako trešenje pomože u sušenju?

3.23 Poklopac od kreme vam je ispao ispod kreveta. Nekoliko minuta vam je trebalo da ga dohvatite. Onda naglo ustanete i osetite vrtoglavicu. Kako biste objasnili vrtoglavicu uz pomoć Njutnovih zakona?

3.24 Saobraćajne nezgode mogu biti vrlo opasne. Posebno čeoni sudar dva vozila. (a) Ako neko od putnika nije vezan sigurnosnim pojasom usled sudara može da izleti kroz vetrobransko staklo. Šta izaziva ovakvo kretanje? (b) Ako je vozilo udareno otpozadi, to takođe može da bude vrlo opasno, posebno ako putnik spava, i može da dođe do fatalnog preloma vrata. Objasnite zašto, uz pomoć Njutnovih zakona.

3.25 Elektron napušta cev u televizoru, bez početne brzine i ubrzava se na putu od 2 cm, tako što biva ubrzan do brzine $3.0 \times 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ako je sila koja ubrzava elektron konstantna izračunati: (a) ubrzanje elektrona; (b) vreme ubrzavanja; (c) silu koja ubrzava elektron. Zanemariti gravitacionu silu koja deluje na elektron.

3.26 Biciklistu dok brzo vozi u kacigu udara muva. Ako se zna da su sile kojima kaciga deluje na muvu i muva na kacigu istog intenziteta, zašto se muva spljeska na kacigi a biciklisti ne bude ništa?

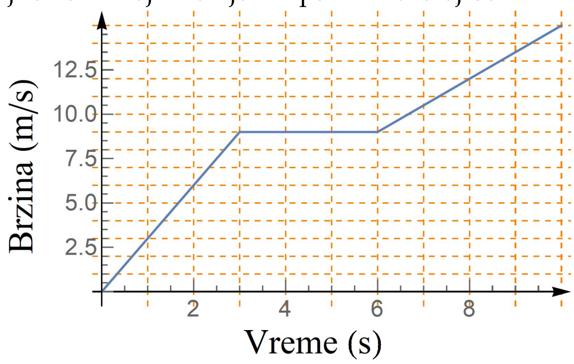
3.27 Na nekoj raskrsnici dok je semafor bio u kvaru dogodio se sudar. Mali smart je udario u veliku hladnjaču. Na koje vozilo je delovala veća sila tokom sudara?

3.28 Moderni automobili se prave od takvih materijala da se pri udarcu u prednji ili zadnji deo gužvaju. Zašto? Da li je dobro da je materijal takav da se automobili gužvaju i pri bočnim udarima?

3.29 Ako na jedan kraj žice okačite masivno telo, ako ravnomerno vučete žicu telo možete da podignete. Ali ako ima dosta trzaja tokom povlačenja žice naviše žica može da pukne. Zašto?

3.30 Veliki sanduk je okačen za kraj konopca koji visi u liftu. Da li je sila zatezanja konopca veća ako lift miruje ili ako se kreće konstantnom brzinom? Da li sila zatezanja ostaje ista ako lift ubrzava naviše? A ako usporava dok ide naviše? Kada je sila zatezanja veća ako lift ubrzava dok ide naviše ili dok usporava ubrzanjem istog intenziteta dok se spušta?

3.31 Pas, mase 12 kg, ugleda mačku i pojuri je, trčeći pravolinijski. Na grafiku je prikazana zavisnost brzine psa od vremena. (a) Naći najveću rezultujuću silu koja deluje na psa dok trči. (b) Kada je rezultujuća sila, koja deluje na psa, jednaka nuli? (c) Kolika je rezultujuća sila koja deluje na psa u devetoj sekundi?



3.32 Mala modelarska raketa, mase 8 kg, pri sagorevanju goriva stvara vremenski promenljivu silu, koja pokreće raketu naviše (pretpostaviti da je masa rakete konstantna). Sila zavisi od vremena kao $F = A + Bt^2$. Merenja pokazuju da je u početnom trenutku sila 90 N i da je posle dve sekunde 120 N. (a) Izračunati kostante A i B. (b) Naći rezultujuću silu na raketu i njeno ubrzanje (i) u trenutku paljenje goriva, (ii) 3 sekunde posle paljenja goriva. (c) Ako bi istu raketu bilo moguće lansirati u svemiru, van nekog gravitacionog polja, koliko bi onda bilo ubrzanje posle 3 sekunde?

3.33 Najbolje svetske sprinterke pri izlasku iz startnog bloka postižu skoro horizontalno ubrzanje od oko 15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Kolikom silom treba da deluje sprinterka koja ima 55 kg da bi ostvarila ovo ubrzanje? Da li ovom silom blok deluje na sprinterku ili je to sila kojom ona deluje na sebe?

3.34 Ubrzanje automobila se obično prikazuje kao vreme koje je potrebno automobilu da iz mirovanja razvije brzinu od 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. U tabeli su dati podaci za nekoliko najbržih sportskih automobila današnjice. (a) Koji automobil ima najveću srednju rezultujuću silu? A koji najmanju? (b) Za vreme ubrzavanja u kojem automobilu bi vozač od 90 kg osećao najveću, a u kojem najmanju silu? (c) Porše ubrza do brzine 160 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ za 4.9 s, a do brzine 290 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ za 17.5 s. Kolika je rezultujuća sila koja deluje na automobil u ova dva slučaja? Kolike su ove sile u poređenju sa onom za ubrzanje do 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$? Objasnite zašto se ove sile razlikuju. (d) Prodiskutujte međusobno o tome zašto automobili imaju maksimalnu brzinu. Kolika je rezultujuća sila na Porše kada se on kreće maksimalnom brzinom, 340 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

Automobil	Masa (kg)	Vreme ubrzavanja od 0 do 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (s)
Ferari *LaFerrari*	1585	2.5
Porše 918 Spajder	1685	2.2
Lamborgini *Aventador SVJ*	1525	2.6
Ford GT	1385	3.0
Jaguar XJ 220	1470	3.7
Maklaren Sena	1188	2.9

3.35 Kada kutiju sa knjigama mase 10 kg, kratko i jako gurnete po podu, kutija će da se zaustavi posle pređenih 9.45 m, za vreme od 3.2 s. (a) Kada kutiju malo slabije gurnete ona pređe 4.55 m za 2.2 s. Šta biste zaključili da li je ubrzanje kutije konstantno (poredeći ova dva slučaja)? (b) Dodajete knjige u kutiju. Za nekoliko različitih masa gurnete kutiju, merite pređeni put i vreme do zaustavljanja. Rezultati su dati u tabeli.

Masa (kg)	Put (m)	Vreme (s)
10	9.45	3.2
12	10.35	3.4
15	6.60	2.7
18	8.25	2.9
19.5	5.30	2.4
21	4.70	2.2

Kolike su bile brzine kutija u ovim slučajevima u trenutku kad je prestao kontakt sa kutijom (početne brzine za klizanje)? (c) Kolika je sila koja deluje na kutiju dok kliza u svakom od ovih slučajeva? Skicirajte grafik zavisnosti sile od mase kutije, i iskoristite grafik da odredite zavisnost sile od mase kutije. (d) Sila bi trebalo da bude jednaka sili trenja klizanja. Iz dobijenog rezultata za silu (sa grafika), odredite koeficijent trenja između kutije i podloge. Da li ste u zavisnosti sile od mase dobili i odsečak na y-osi? Ako je sila trenja klizanja u pitanju, da li bi trebalo da odsečak bude različit od nule? Objasnite ovu razliku, ako ona postoji u vašim rezultatima. (e) Neka svaki put kada gurate kutiju, guranje traje 0.5 s. Izračunajte sile kojima su kutije gurnute za sve slučajeve iz tabele. U kom slučaju je sila bija najveća a u kom najmanja?

3.36 Šipka na koju se kače vešalice u ormarima od koliko god čvrstog materijala da su izrađene vremenom se blago saviju na dole, na sredini. Zašto?

3.37 Automobil se penje uzbrdo konstantnom brzinom. Koje sve sile deluju na automobil? Koja sila ga gura uzbrdo?

3.38 Kutija miruje na horizontalnoj podlozi. Zašto je lakše da zakačite konopac i vučete kutiju, nego da je gurate? Ugao pod kojim je konopac u odnosu na horizontalu jednak je uglu koji vaše ruke zaklapaju sa horizontalom pri guranju. Kakva je situacija ako horizontalno vučete i gurate kutiju?

3.39 Zamislite da ste kao kosmonaut sleteli na nepoznatu planetu. Odmah je bilo jasno da je površina planete takva da nema trenja sa bilo kakvim telima koja su na njoj. Šta bi bilo moguće izvesti na toj planeti, a šta ne: (a) hodanje, (b) skakanje iz mesta uvis, (c) vožnja vozilom sa točkovima, (d) penjanje uz merdevine vertikalno postavljene, (e) penjanje uz merdevina koje su pod nekim uglom u odnosu na vertikalu.

3.40 Kada bosonogi ulazite u kadu osećete se prilično sigurno i stabilno. Kada izlazite mokri, može da bude veoma klizavo. Opasnost od ozbiljnog klizanja se još povećava ako sapun nije dobro sapran sa stopala ili iz unutrašnosti kade. Kako kontakt kože i površine kade menja koeficijente trenja u ovim situacijama? U kojoj od ove tri situacije je koeficijent trenja najveći a u kojoj najmanji?

3.41 Obično se kaže da se trenje suprostavlja kretanju. Smislite nekoliko primera u kojima statičko ili dinamičko trenje prouzrokuju kretanje.

Inercijalne sile

3.42 Prilikom gradnje višespratnica kofe sa materijalom se podižu na željenu visinu tako što se kofa zakači za sajlu, a onda se drugi kraj namotava na kotur uz pomoć elektromotora. Puna kofa je mase 25 kg, sajla zanemarljive mase puca ako je zategnuta silom od 350 N. Ako kofa kreće iz mirovanja, koliko je minimalno vreme za koje je moguće podići kofu na visinu od 20 m, a da sajla ne pukne?

3.43 Jedan hvalisavi prodavac automobila se hvalio da novi model poznate marke automobila može da se zaustavi na novčiću od 20 dinara. Kolika rezultujuća sila je potrebna da se automobil od 900 kg, koji se kreće brzinom od 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zaustavi posle pređenog puta od 2.8 cm?

3.44 Često se kaže da kada automobil naglo prikoči svi putnici polete napred pod dejstvom inercijalne sile. Da li je ovo, strogo gledano, dobra formulacija?

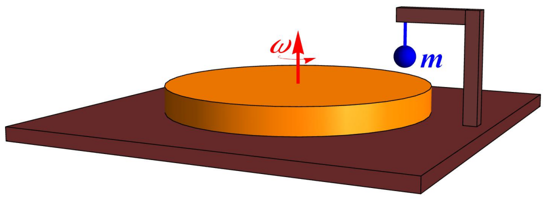
3.45 Izračunati intenzitet efektivnog gravitacionog ubrzanja Zemlje na geografskoj širini od 45°. Izračunati ugao koji zaklapa efektivno ubrzanje sa x-osom, kao i rastojanje h od centra Zemlje tačke u koju je usmereno efektivno ubrzanje (slika 3.4).

3.46 Kolika treba da bude brzina tela, normalna na osu rotacije Zemlje, da bi intenzitet Koriolisovog ubrzanja bio jednak jednom procentu intenziteta gravitacionog ubrzanja?

3.47 Izračunati centrifugalno ubrzanje tela na ekvatoru, usled rotacije Zemlje oko svoje ose i usled rotacije oko Sunca (zanemariti nakrivljenost Zemljine ose rotacije).

3.48 Za telo koje se kreće bez trenja po disku, poluprečnika R, koji rotira konstantnom ugaonom brzinom, ω, naći parametarske jednačine putanje, $x'(t)$ i $y'(t)$. U inercijalnom sistemu refernce brzina tela, v, je konstantna.

3.49 Tokom probe balerini, koja inače studira fiziku, je privukla pažnju jedna naizgled paradoksalna stvar. Ona izvodi često piruetu, vrteći se oko svoje ose, velikom ugaonom brzinom. Dok piruetu posmatraju iz gledališta, iz inercijalnog sistema, ništa neobično se ne dešava. Međutim, ako ona tokom izvođenja piruete posmatra publiku iz svog neinercijalnog sistema, koji rotira oko nepokretne ose zajedno sa njom, onda se publika kreće (rotira u suprotnom smeru), i na sve predmete oko nje deluje centrifugalna sila. Kako onda niko u publici tu silu ne oseti? Da biste odgovorili na ovo pitanje može da vam pomogne sledeći zadatak. Telo visi na neistegljivom koncu, tako da se nalazi tačno iznad diska koji rotira konstantnom ugaonom brzinom, ω (slika). Telo miruje. Rastojanje između ose rotacije i tela je R. Naći ubrzanje tela u sistemu reference vezanom za disk.



3.50 Telo pada sa visine H u gravitacionom polju Zemlje. Naći rastojanje od vertikale do mesta na koje će telo da udari u podlogu. Silu otpora vazduha zanemariti.

3.51 Kako način oscilovanja Fukoovog klatna može da se upotrebi kao dokaz za sferni oblik Zemlje?

3.52 Objasnite zašto je kod svih reka koje na svernoj polulopti teku približno duž meridijana više erodirala desna obala, bez obzira da li reka teče ka severu ili ka jugu.

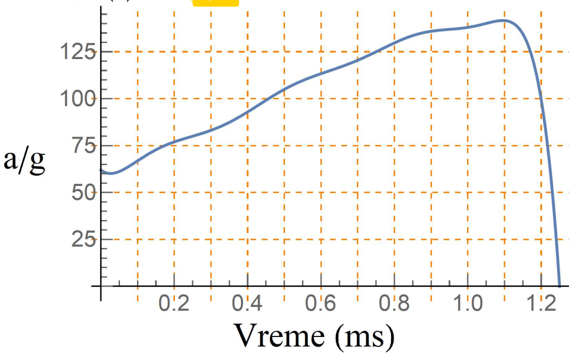
3.53 Potražite mapu Golfske struje i dajte jednostavno objašnjenje za njen tok u Atlanskom okeanu.

3.54 Na kojoj polulopti Jupitera se nalazi crvena mrlja? Zaključite na osnovu slike ciklona (Da li je slika 3.10 dobro okrenuta?).

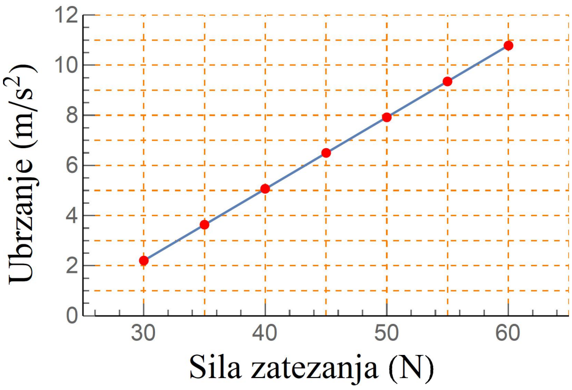
3.55 Veliki problem koji imaju kosmonauti zbog dugog boravka u svemirskim stanicama je bestežinsko stanje. Da bi se stvorila veštačka gravitacija može da se napravi svemirska stanica u obliku torusa (đevreka) koja bi rotirala oko ose normalne na ravan u kojoj je torus, i prolazila kroz njegov centar (kao točak oko osovine). Ako bi prečnik torusa bio 1000 m, koliki bi trebalo da bude period obrtanja stanice da ubrzanje unutra bilo 10 $\frac{m}{s^2}$?

3.56 Pozvani ste kao veštak na suđenje za saobraćajni prekršaj prekoračenja dozvoljene brzine. Činjenice su sledeće: vozač je naglo pritusnuo kočnicu pre raskrsnice, blokirao točkove što pokazuju tragovi kočenja; vozilo se zaustavilo posle 60 m kočenja; koeficijent trenja klizanja između guma i podloge je 0.75; ograničenje brzine je 80 $\frac{km}{h}$. Ako se može pretpostaviti da je automobil kočio konstantnim ubrzanjem, da li je vozač prekoračio dozvoljenu brzinu pre kočenja?

3.57 Snimak skoka buve (kamera visoke brzine - 3500 slika u sekundi), mase 210 μg je iskorišnjen za dobijanje podataka o njenom ubrzanju tokom skoka. Podaci su prikazani na grafiku, za približno vertikalni skok. Koristeći grafik (a) nađite početnu rezultujuću silu na buvu, i uporedite je sa težinom buve; (b) odredite maksimalnu rezultujuću silu tokom skoka i u kom trenutku je sila maksimalna; (c) odredite maksimalnu brzinu buve.



3.58 Izveden je sledeći eksperiment: kocka mase m miruje na horizontalnoj podlozi. Za kocku je privezan lagana sajla, na čiji slobodan kraj deluje horizontalna sila, koja može vrlo precizno da se menja. Merenje je pokazalo da kocka miruje na podlozi sve dok sila ne bude veća od 25 N. Za veće sile, koje su tokom jednog merenja bile konstantne mereno je ubrzanje kocke. Merenje je ponavljano za različite intenzitete sila i rezultati su prikazani na grafiku. (a) Na osnovu podataka sa grafika odredite zavisnost ubrzanja kocke od sile zatezanja sajle. (b) Koliki je koeficijent statičkog trenja? (c) Koliki je koeficijent dinamičkog trenja? (d) Kolika je masa kocke? (e) Zamislite isti eksperiment sa malo drugačijom gravitacionom silom (manjom ili većom). Da li bi prikazana zavisnost bila linearna? Da li bi se koeficijenti promenili, koji i kako?



3.59 Patike koje koriste penjači po stenama su napravljene tako da obezbede što je moguće veće trenje sa podlogom. Najbolje patike imaju koeficijent statičkog trenja oko 1.2 i koeficijent dinamičkog trenja oko 0.9. (a) Koji je najveći ugao koji stena zaklapa sa horizontalom, da po njoj penjač može da hoda bez proklizavanja, u ovakvim patikama? (b) Ako je nagibni ugao stene nešto veći od ugla iz prethodnog dela, šta će se dogoditi? (i) Proklizavaće kratko dok se ne zaustave. (ii) Klizaće se ubrzano. (iii) Klizaće se konstantnom brzinom. (iv) Ne može se ništa pretpostaviti bez podatka o masi penjača. (c) Penjač stoji na horizontalnoj steni. Počinje da trči. Koliko je najveće ubrzanje koje može da postigne, bez proklizavanja?

4
Impuls sistema

Mehanički sistem i zakoni održanja

Mehanički sistem je skup tela. Za svako telo je potrebno znati gde se u bilo kom trenutku nalazi i kolika mu je brzina u svakom trenutku. Za sistem tela je samim tim potrebno znati položaje i brzine svih tela u svakom trenutku. U zadatom trenutku, položaji svih tela i njihove brzine određuju *stanje* sistema. Za sistem od više tela, skup vektora položaja (koordinata) svih tela se naziva *konfiguracijom* sistema. U naredne tri glave će biti posmatrani sistemi tela zanemarljivih dimenzija, odnosno sistemi materijalnih tačaka. Dobijeni rezultati će važiti i za kruto telo, koje je sistem materijalnih tačaka na fiksiranim rastojanjima.

Ako se mehanički sistem kreće tokom vremena onda se i stanje sistema menja. Da bi se odredila nova stanja sistema potrebno je znati konačne jednačine kretanja za svako telo u sistemu. U opštem slučaju, nije uvek moguće naći konačne jednačine kretanja, čak i u slučaju kada sistem čini samo jedno telo.

Ipak, i pored nemogućnosti da se odrede konačne jednačine kretanja svih tela u sistemu, utvrđeno je da postoje fizičke veličine koje se ne menjaju (održavaju) tokom kretanja, i ako se stanja sistema menjaju. Pored toga što se neke fizičke veličine ne menjaju tokom kretanja sistema, one mogu da se iskoriste da se odredi stanje sistema u proizvoljnom trenutku, čak i u situacijama ako sile koje deluju na tela u sistemu nisu poznate.

U mehanici je od posebne važnosti znati uslove pod kojima se održavaju:

- impuls sistema,
- energija sistema,
- moment impulsa sistema.

Sve ove fizičke veličine su aditivne (za sistem tela su jednake zbiru veličina za svako telo) osim energije koja je aditivna samo ako je interakcija između tela u sistemu slaba. Može se pokazati[1] da su zakoni održanja posledica fundamentalnih osobina vremena i prostora, *homogenosti* i *izotropnosti* i to:

[1] Dokaz ćete raditi u okviru Teorijske mehanike.

- homogenost vremena $\Rightarrow$ zakon održanja energije,
- homogenost prostora $\Rightarrow$ zakon održanja impulsa,
- izotropnost prostora $\Rightarrow$ zakon održanja momenta impulsa.

Homogenost i izotropnost predstavljaju simetrije vremena i prostora. Homogenost znači da ma gde da transliramo naš sistem, vreme i/ili prostor ostaju isti, sa istim osobinama. Izotropnost znači da je prostor isti u svim pravcima, odnosno kako god da zarotiramo sistem prostor ostaje isti.

Ako bilo kakva transformacija ne menja sistem, onda se za nju kaže da je simetrija sistema. Na primer, zamislite jednobojnu kocku. Ako je zarotirate za 90 stepeni oko bilo koje ose koja prolazi kroz njen centar i normalna je na neku od strana kocke, onda je novi položaj kocke potpuno nerazlučiv od početnog. Tada je ova rotacija jedna od simetrija kocke.

Ispostavlja se da zakoni održanja daleko prevazilaze granice važenja klasične mehanike i da su oni univerzalni zakoni prirode. Bolje rečeno do sada nije otkriven primer u kome oni ne bi važili.

Zakoni održanja su važni i korisni zato što:

- ne zavise od putanje tela i vrste sila koje deluju, dakle opšti su;
- mogu se primeniti i kad sile nisu poznate (fizika elementarnih čestica);
- u problemima u kojima su sile poznate primena zakona održanja može značajno da pojednostavi rešavanje problema.

Impuls tela

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{4.1}$$

Iz drugog Njutnovog zakona za telo $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ je jasno da ako na telo ne deluje sila, ili ako je rezultujuća sila jednaka nuli, onda impuls tela ne zavisi od vremena, odnosno konstantan je.

$$\boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p} = const. \tag{4.2}$$

U neinercijalnim sistemima rezultujuća sila uključuje i inercijalne sile.

U slučaju kada impuls nije održan, konačan priraštaj impulsa se dobija iz drugog Njutnovog zakona:

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_0^t \boldsymbol{F}dt. \tag{4.3}$$

Vidi se da je konačna promena impulsa jednaka impulsu sile. Ako je rezultujuća sila konstantna, onda je priraštaj impulsa jednak:

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}t. \tag{4.4}$$

Sistem tela

Neka u nekom sistemu tela interaguju međusobno, kao i sa telima van sistema. Sile interakcije unutar sistema su *unutrašnje*, a sile interakcije sa okolinom su *spoljašnje*.

U neinercijalnom sistemu inercijalne sile su spoljašnje.

Impuls sistema je zbir impulsa svih tela u sistemu:

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i. \tag{4.5}$$

Impuls sistema ne zavisi od toga da li tela interaguju ili ne. Ako se nađe izvod gornje jednačine dobija se:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}. \tag{4.6}$$

Na osnovu drugog Njutnovog zakona, promena impulsa tela je jednaka rezultujućoj sili koja deluje na telo. Na telo deluju sva ostala tela iz sistema, kao i spoljašnje sile:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k \neq i} \boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{F}_i, \tag{4.7}$$

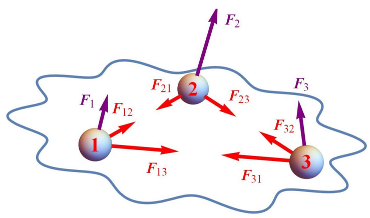
gde suma predstavlja zbir svih unutrašnjih sila koje deluju na telo i, odnosno sile interakcije sa ostalim telima u sistemu, dok je $\boldsymbol{F}_i$ rezultujuća spoljašnja sila na i-tu česticu.

Kada se jednačina 4.7 zameni u jednačinu 4.6 dobija se:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_{ik} \boldsymbol{F}_{ik} + \sum_i \boldsymbol{F}_i, \tag{4.8}$$

gde je prva, dvostruka, suma rezultujuća unutrašnja sila na sva tela u sistemu. Druga suma daje rezultujuću spoljašnju silu na ceo sistem.

Po trećem Njutnovom zakonu za svaku silu u sumi $\boldsymbol{F}_{ik}$ postoji sila $\boldsymbol{F}_{ki}$ za koju važi $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$. Pošto se cela suma sastoji od ovakvih parova onda je rezultujuća unutrašnja sila jednaka nuli. Zaključak ostaje isti i ako čestice u sistemu interaguju na više načina, različitim interakcijama.



Slika 4.1: Unutrašnje i spoljašnje sile u sistemu tela.

Konačno, promena impulsa sistema prporcionalna je rezultujućoj spoljašnjoj sili, odnosno:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{sp}. \tag{4.9}$$

Priraštaj impulsa sistema je jednak:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \int_0^t \boldsymbol{F}_{sp} \mathrm{d}t. \tag{4.10}$$

Ovaj izraz je potpuno analogan izrazu za jedno telo. Ako na sistem deluje neka spoljašnja sila onda je promena impulsa sistema jednaka impulsu te spoljašnje sile.

Zakon održanja impulsa

Ako na neki sistem ne deluju spoljašnje sile, odnosno ako one ne postoje, onda je taj sistem *izolovan*. Sistem može da bude i približno izolovan ako postoje spoljašnje sile, ali je njihov uticaj zanemarljivo mali.

Ako referentni sistem postavimo u bilo koju tačku izolovanog sistema, onda će on sigurno biti inercijalan.

Impuls sistema mogu da promene samo spoljašnje sile (jednačina 4.10), što znači da se impuls izolovanog sistema ne može promeniti, odnosno da je on održan:

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = const. \tag{4.11}$$

Pored toga, jednačinu 4.10 treba shvatiti u nešto širem smislu. Ne samo što ona daje uslov koji mora da bude ispunjen da bi impuls bio održan, već i u situacijama kada impuls ne može da bude održan ona daje jedini način na koji se impuls sistema može promeniti.

Ako je ukupan impuls sistema održan to ništa ne govori o impulsima pojedinačnih tela u sistemu. Tokom vremena impulsi tela se menjaju, ali njihov zbir je uvek isti u izolovanom sistemu.

Pored izolovanog sistema impuls može biti održan i u sistemu koji nije izolovan, ali za koji je rezultujuća spoljašnja sila jednaka nuli.

Jednačina 4.10 ukazuje na još jednu važnu stvar. Promena impulsa sistema je uvek u smeru spoljašnje sile, tako da se komponente impulsa sistema koje su ortogonalne na pravac spoljašnje sile ne menjaju. Ako je na primer spoljašnja sila konstantna, ili joj se samo intenzitet menja tokom vremena, onda je podesno izabrati koordinatni sistem čija je jedna osa duž pravca delovanja sile. Neka je na primer x-osa duž pravca delovanja sile, onda je:

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x, \quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4.12}$$

Komponente impulsa sistema duž y i z-ose se ne menjaju, i ako sistem nije izolovan.

Bilo koji sistem u blizini površine Zemlje nije izolovan. Na njega deluje gravitaciona sila. Ako je ona jedina spoljašnja sila, onda su komponente impulsa sistema normalne na pravac gravitacione sile očuvane.

U većini procesa raspada ili sudara može se uzeti da je sistem tela koja učestvuju u procesu izolovan. I ako postoji spoljašnja sila, proces je, uglavnom, veoma brz, pa je impuls sistema neposredno pre i neposredno posle sudara ili raspada približno isti.

Primer 4.1

Čovek stoji u čamcu, koji miruje na površini jezera. U jednom trenutku čovek krene ka drugom kraju čamca i napravi pomeraj $\Delta\boldsymbol{r}'$ u odnosu na čamac. Koliki pomeraj napravi čamac? Masa čamca je M, a čoveka je m. Trenje između čamca i vode zanemariti.

Rešenje: Sistem (čoveka i čamca) nije izolovan zbog gravitacione sile. Ali horizontalna komponenta impulsa sistema je održana. Jedina horizontalna sila koja deluje na čoveka i čamac je sila trenja. Ona je unutrašnja sila za sistem i ne može da promeni horizontalni impuls sistema. Na početku sistem miruje. Ukupni impuls sistema je jednak nuli. Kada se čovek pokrene, pokrene se i čamac, tako da je impuls sistema tokom kretanja jednak zbiru impulsa čoveka i čamca, $m\boldsymbol{v} + M\boldsymbol{V} = 0$, ali zbir im je uvek jednak nuli. Brzina čoveka u odnosu na vodu je jednaka zbiru brzine čamca i brzine čoveka u odnosu na čamac $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$. Iz zakona održanja impulsa i uvrštavanjem relativne brzine čoveka dobija se $\boldsymbol{V} = -\frac{m}{m+M}\boldsymbol{v}'$. Množenjem ove jednačine sa $\mathrm{d}t$ i integracijom dobija se veza između pomeraja $\Delta\boldsymbol{R} = -\frac{m}{m+M}\boldsymbol{r}'$. Obratite pažnju da rezultat uopšte ne zavisi od toga kako se brzina čoveka menjala tokom kretanja. Zašto?

Ako je referentni sistem vezan za fizički sistem inercijalan onda je fizički sistem izolovan ili je rezultujuća spoljašnja sila jednaka nuli. Važi i obrnuto, referentni sistem vezan za izolovan sistem je sigurno inercijalan. Dakle, u ovako definisanim inercijalnim sistemima važi zakon održanja impulsa. Neka je nepokretni inercijalni sistem K. Pokretni sistem, K', se kreće konstantnom brzinom V u odnosu na sistem K. Ukupan impuls u sistemu K je jednak zbiru impulsa svih tela, i konstantan je:

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = const.$$

Brzina svakog tela je zbir brzine pokretnog sistema i brzine tela u pokretnom sistemu:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'_i.$$

Onda je ukupan impuls:

$$\sum_i m_i(\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{V}) = \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i + \left(\sum_i m_i\right) \boldsymbol{V}.$$

Prvi član sa desne strane je ukupan impuls sistema u sistemu K'. Onda, ako je brzina kretanja pokretnog sistema konstantna, onda je i impuls sistema u sistemu K' konstantan.

Upravo dobijeni zaključak je jedna od posledica Galilejevog principa. U svim inercijalnim sistemima impuls sistema je konstantan. Impuls sistema nije u svakom inercijalnom sistemu isti, ali je u svakom konstantan, a vezu između impulsa sistema daje gornja jednačina.

U jednom od važnih koraka, pre jednačine 4.9, u pokazivanju kako zakon održanja impulsa glasi, iskorišćen je treći Njutnov zakon. Ranije je napomenuto da treći Njutnov zakon nije sasvim tačan zato što pretpostavlja beskonačnu brzinu prostiranja interakcije. Ipak, u ovom slučaju, treći zakon je bio samo sredstvo za pokazivanje. Ispostavlja se, ekperimentalno je provereno, da je zakon održanja impulsa fundamentalni prirodni zakon, i da ne zavisi od modela ili teorisjkog koncepta koji je primenjen.

Centar mase

Za sistem od više tela može da se definiše centar mase. Položaj centra mase je dat izrazom:

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{4.13}$$

gde su m_i mase tela iz sistema, $\boldsymbol{r}_i$ vektori položaja tela, dok je $M = \sum_i m_i$ ukupna masa svih tela u sistemu.

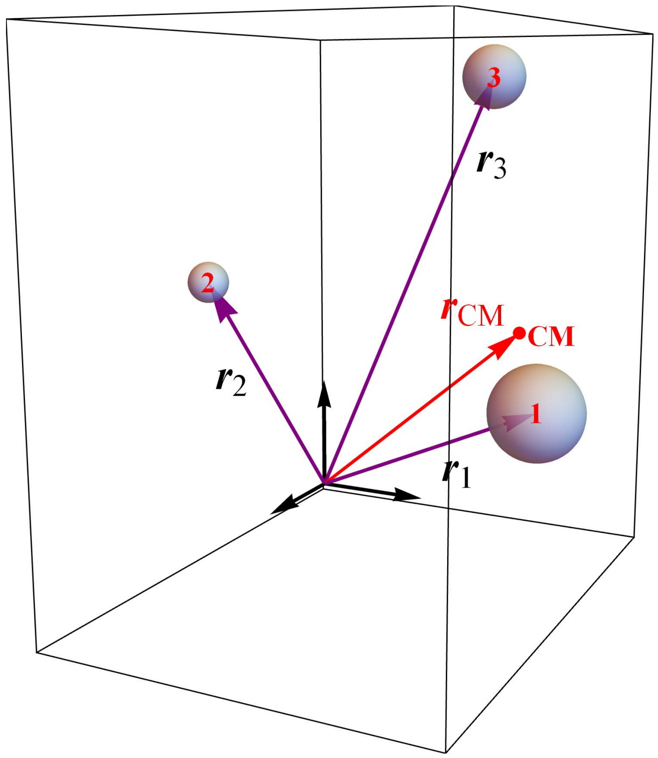
Centar mase ima vrlo zanimljive osobine, a posebno je zanimljivo posmatrati dinamiku sistema iz referentnog sistema postavljenog u centar mase fizičkog sistema.

Ako se jednačina 4.13 diferencira po vremenu dobija se izraz za brzinu centra mase:

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i, \tag{4.14}$$

odnosno

$$M\boldsymbol{V}_{CM} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{p}, \tag{4.15}$$



Slika 4.2: Položaj centra mase sistema od tri tela.

gde su v_i brzine tela u sistemu, a suma daje impuls sistema. Ako je sistem izolovan onda je impuls sistema konstantan, a to znači da se centar mase kreće konstantnom brzinom, po inerciji.

Još jedan izvod po vremenu daje:

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_{sp}, \tag{4.16}$$

gde je svaki član u sumi jednak zbiru svih sila koje deluju na jedno telo iz sistema. U celoj sumi unutrašnje sile se potiru, a preostale spoljašnje daju rezultujuću spoljašnju silu.

Dakle, ako na sistem deluju spoljašnje sile, onda je dinamika translatornog kretanja sistema ista kao dinamika jednog tela, koje ima masu kao ceo sistem, i nalazi se u centru mase sistema.

Ako je rezultujuća spoljašnja sila jednaka nuli, onda se centar mase kreće po inerciji, odnosno ravnomerno pravolinijski, i impuls sistema je održan. Važi i obrnuto.

Sistem centra mase

Ako nas interesuje kretanje svih tela unutar sistema, podesno je referentni sistem postaviti u centar mase sistema, takozvani *sistem centra mase*. Ako je sistem izolovan, sistem centra mase je inercijalan. Brzina centra mase je u sistemu centra mase uvek jednaka nuli, pa je samim tim i impuls sistema u sistemu centra mase jednak nuli.

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_{CM} = 0 \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{p}} = 0.$$

Oznakom sa talasićem, na primer $\tilde{A}$, označene su fizičke veličine u sistemu centra mase.

Primer 4.2

Dva tela se kreću proizvoljnim brzinama. Naći njihove impulse u sistemu centra mase.

Rešenje: Neka se dva tela masa m_1 i m_2 kreću potpuno proizvoljnim brzinama $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$. Brzina centra mase je $\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}$. Brzine tela u sistemu centra mase su relativne brzine u odnosu na centar mase $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_{CM}$, gde je $i = 1, 2$. Impulsi tela u sistemu centra mase su $\widetilde{\boldsymbol{p}}_i = m_i\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$. Zamenom izraza za brzinu centra mase u gornje jednačine dobija se $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \mu\boldsymbol{v}_{12}$ i $\widetilde{\boldsymbol{p}}_2 = \mu\boldsymbol{v}_{21}$, gde je $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, dok su $\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ i $\boldsymbol{v}_{21} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, relativne brzine jednog tela u odnosu na drugo. Lako se vidi da su u sistemu centra mase impulsi dva tela uvek suprotno usmereni, uvek istog intenziteta, i da to uopšte ne zavisi od toga da li je sistem izolovan ili ne, i da li tela interaguju, i na koji način, ili ne interaguju.

Kretanje sa promenljivom masom

Do sada su razmatrani slučajevi u kojima tela koja se kreću imaju konstantnu masu. Međutim u nekim slučajevima telo može da menja masu dok se kreće. Primeri za ovakvo kretanje su kretanje rakete koja sagoreva ogromnu količinu goriva, avioni koji tokom dugog leta značajno promene masu zbog potrošenog goriva, železnički vagoni tokom utovara nekog rastresitog materijala i slično.

Neka je masa tela koje se kreće, u jednom trenutku $m(t)$, a supstanca koja utiče ili ističe ima brzinu $\boldsymbol{u}$ u odnosu na telo. Kretanje tela može da se posmatra iz referentnog sistema vezanog za telo, koji je približno inercijalan za vrlo kratko vreme, oko trenutka t. U trenutku t telo miruje u tom referentnom sistemu. Tokom vremena $\mathrm{d}t$ telo promeni impuls za $m(t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Promena impulsa tela se dešava zbog promene mase tela i zbog delovanja neke sile na telo:

$$m(t)\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t + \mathrm{d}m\boldsymbol{u}.$$

Kada se ova jednačina podeli sa $\mathrm{d}t$ dobija se osnovna jednačina dinamike za kretanje tela sa promenljivom masom, odnosno jednačina Meščerskog:

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}. \tag{4.17}$$

U neinercijalnom sistemu rezultujuća sila $\boldsymbol{F}$ sadrži i inercijalne sile. Član $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}$ ima dimenzije sile, i naziva se *reaktivna sila*. Pravac reaktivne sile je isti kao pravac relativne brzine $\boldsymbol{u}$. Smer zavisi od $\mathrm{d}m$. Ako telo povećava masu tokom kretanja onda je reaktivna sila u istom smeru kao i relativna brzina. Ako telo gubi masu onda je reaktivna sila suprotno usmerena od relativne brzine.

Dva zanimljiva specijalna slučaja:

- Relativa brzina je jednaka nuli $\boldsymbol{u} = 0$, pa je i reaktivna sila jednaka nuli, onda je[2] $m(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$.
- Relativna brzina je $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$ (masa koja ulazi u sistem je nepokretna u odnosu na sistem koje se kreće), tada je: $m(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}(t)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}$.

Prvi slučaj odgovara situaciji u kojoj na primer teret curi kroz otvor na dnu prikolice, a drugi primer odgovara situaciji u kojoj se rastresiti teret utovaruje u vagone koji su u pokretu.

[2] Problem istog tipa se dobija i ako je relativna brzina ortogonalna na pravac delovanja spoljašnje sile.

Treba biti pažljiv prilikom rada sa telima kojima se masa menja tokom kretanja, na prvi pogled drugi specijalni slučaj može da izgleda kao opšti slučaj, ali nije. Zašto?

„Zemlja je kolevka čovečanstva, ne može se ceo život provesti u kolevci”. Konstantin Ciolkovski

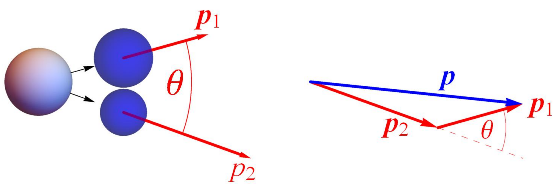
Primer 4.3

Raketa se kreće van nekog polja sila. Gas koji nastaje pri sagorevanju goriva ističe iz rakete brzinom $\boldsymbol{u}$ u odnosu na raketu. Naći brzinu rakete u zavisnosti od mase.

Rešenje: Nema spoljašnjih sila, pa je onda u jednačini Meščerskog $\boldsymbol{F} = 0$. Tada je $m(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}$. $\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{m}$. $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}\ln\frac{m_0}{m}$, gde je m_0 početna masa rakete. Rezultat je jedan od oblika poznate jednačine Ciolkovskog.

Zadaci

4.1 Telo koje se kreće u jednom trenutku se raspadne na dva dela. Novonastali delovi se razlete pod uglom θ. Impulsi delova tela su $\boldsymbol{p}_1$ i $\boldsymbol{p}_2$, respektivno. Naći impuls tela pre raspada.



4.2 Da li je centar mase uvek u težištu sistema?

4.3 Naći oblik jednačine Ciolkovskog koji daje zavisnost trenutne mase rakete od brzine isticanja proizvoda sagorevanja, u, trenutne (v), početne brzine (v_0) i početne mase rakete, m_0.

4.4 Ako je impuls sistema od dve čestice održan, da li je onda je i impuls svake čestice održan? Objasnite.

4.5 Iz vatrenog oružja se gađa metalna ploča. U kom slučaju je sila kao posledica udara metka u ploču veća, ako se metak zaustavi u ploči ili odbije od ploče?

4.6 Na nekoj raskrsnici dok je semafor bio u kvaru dogodio se sudar. Mali smart je udario u veliku hladnjaču. Kojem vozilu se više promenio impuls tokom sudara?

4.7 Za cepanje drva, posebno panjeva, koriste se drveni klinovi u koje se udara čekićem, ili tupom stranom sekire. Da li je efikasnije korsititi masivniji ili lakši čekić za ovaj posao, i zašto?

4.8 Kada kišna kap udari u zemlju, šta se dešava sa njenim impulsom? Da li se isto dešava i sa impulsom čelične kuglice koja udari u betonsku stazu?

4.9 Zamislite da svi kinezi istovremeno skoče na zemlju, sa klupice iste visine. Kako će se to odraziti na impuls planete?

4.10 Automobil ubrzava na autoputu. Kretanje automobila je posmatramo iz dva inercijalna sistema reference, jednog koji je vezan za saobraćajni znak pored puta, i drugi koji je vezan za policijski automobil koji se kreće autoputem konstantnom brzinom. Da li je impuls automobila isti u ova dva referentna sistema? Da li je promena impulsa ista? Objasnite.

4.11 Čovek stoji na horizontalnoj ledenoj ploči i drži u rukama veliki kamen. U jednom trenutku čovek baci kamen pod nekim uglom naviše u odnosu na horizontalu. Ako čoveka i kamen posmatramo kao jedan sistem, da li je impuls ovog sistema održan? Da li je neka komponenta impulsa sistema održana?

4.12 Ako vam ispadne staklena čaša na pod pre će se razbiti ako je pod betonski nego ako je drveni. Zašto?

4.13 Sila od 5 N je jedina koja deluje na telo koje u početku miruje. Sila deluje 0.45 s i posle toga brzina tela je 6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kako treba da deluje sila od 2 N na isto telo da bi ga ubrzala do iste ove brzine?

4.14 Teniser udara lopticu reketom. Neka se sistem sastoji od reketa i loptice. Da li je ukupan impuls sistema neposredno pre udarca i neposredno posle udarca isti? Da li je ukupan impuls neposredno posle sudara jednak impulsu u trenutku kada je loptica u najvišoj tački putanje? Objasnite.

4.15 Ledenica se otkačila sa krova i slobodno pada. Tokom padanja ledenice šta se dešava sa impulsom sistema ledenica-Zemlja?

4.16 Dečak stoji na sred zaleđenog jezera na kome je površinski sloj leda savršeno uglačan i nema trenja. Dečak zna da bi mogao da baca stvari i da se tako pokrene i stigne do obale, ali nema kod sebe ništa za bacanje. Kako dečak može da stigne na obalu?

4.17 U najvišoj tački parabolične putanje, telo se raspada na dva dela. Da li je, i pod kojim uslovima, moguće da oba nastala dela padaju vertikalno? Objasnite.

4.18 Kada se neko telo koje se kreće raspadne na dva dela, lakši deo će imati veću brzinu. Objasnite ovu pojavu koristeći Njutnove zakone.

4.19 Masa teniske loptice je 57 g. Ispitivanja pokazuju da je reket, pri udarcu, u kontaktu sa lopticom u proseku 30 ms. Srednja brzina servisa Novaka Đokovića je 54 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (a) Koliki impuls predaje Đoković loptici pri servisu, i kolikom silom deluje na nju? (b) Ako Đokovićev protivnik vrati servis tako da loptica leti brzinom 41 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, kolikom silom deluje i koliki impuls on predaje loptici ako pretpostavimo da ona leti skoro horizontalno?

4.20 Lopta prilikom najjačeg smeča u odbojci ide i do 130 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Masa odbojkaške lopte je oko 270 g. Neka kontakt ruke i lopte prilikom smeča traje oko 50 ms. Kolikom silom odbojkaš deluje na loptu prilikom smeča, ako pretpostavimo da je udari u trenutku kada je ona u najvišoj tački putanje, i brzina joj je mnogo manja od brzine posle smeča?

4.21 Lignje i hobotnice se kreći tako što istiskuju vodu iz šupljine koja im se nalazi u telu. One vodu istiskuju tako što naglo stisnu mišiće oko šupljine i voda kroz otvor izađe napolje. Velika lignja od 7 kg (uključujući i vodu u šupljini) skoro miruje u vodi i ugleda moćnog grabljivca koji se približava. Ako lignja ima oko 2 litra vode u šupljini kojom brzinom treba da je istisne da bi dostigla brzinu od 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, i pobegla grabljivcu?

4.22 Jedna vrsta tropske ribe (riba strelac) lovi insekte tako što izviri iznad vode, pljucka kapljice vode ka insektima koji skoro lebde iznad vode. Kada voda pogodi insekta, kpaljica sa insektom unutra pada u vodu i riba može da ga pojede. Prosečna riba strelac ima oko 65 g, i kada se umiri ispod površine vode izbaci kapljicu mase 0.3 g. Ispaljivanje kapljice traje oko 5 ms. Ispitivanje je pokazalo da riba ispaljuje kapljice brzinom od oko 2.5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (a) Koliki je impuls kapljice odmah po ispaljivanju? (b) Kolika je brzina ribe odmah po ispaljivanju kapljice? (c) Insekti lebde tik iznad površine vode, pa se može uzeti da je bzina kapljice neposredno pre sudara ista kao i u trenutku ispaljivanja. Kada pogodi insekta brzina kpaljice i insekta je 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolika je masa insekta?

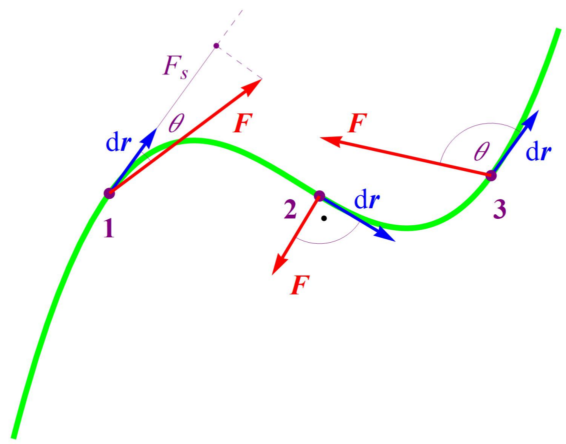
4.23 Raketa u međuzvezdanom prostoru, daleko od bilo kakve sile, izbacuje istu količinu gasa u jedinici vremena tokom kretanja. Da li je ubrzanje rakete konstantno? Objasnite.

4.24 Igračka sa oprugom stoji na glatkom horizontalnom stolu. Kada se opruga opusti igračka se rasturi na tri jednaka dela koji klize po podlozi. Jedan se kreće duž x-ose, brzinom od 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, drugi duž y-ose brzinom od 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. U kom smeru i kolikom brzinom se kretao treći deo?

5 Energija

Šta je energija? Jedna od osnovnih pojmova i fizičkih veličina u svim prirodnim naukama nije tako jednostavna za definisanje. Po jednoj definiciji energija je sposobnost tela da se kreću i uzajamno deluju. Kao druga definicija može da posluži prevod reči energija sa grčkog, a to bi bilo *spremnost na rad*. Zapravo, ove dve definicije su ekvivalentne.

Rad



Slika 5.1: Telo se kreće pod dejstvom promenljive sile, po prikazanoj putanji.

Neka se telo kreće duž putanje kao na slici 5.1, pod dejstvom sile $\boldsymbol{F}$. Elementarni rad je po definiciji:

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{5.1}$$

Skalarni proizvod iz definicije elementarnog rada je:

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F \cos\theta \mathrm{d}s = F_s \mathrm{d}s,$$

gde je: θ ugao između vektora sile $\boldsymbol{F}$ i elementarnog pomeraja $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ je elementarni put, dok je F_s projekcija sile na putanju u datoj tački, odnosno projekcija na pravac vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Projekcija sile na putanju, odnosno na tangentu na putanju je prikazana na slici 5.1, u tački 1.

Dakle, elementarni rad je:

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_s \mathrm{d}s. \tag{5.2}$$

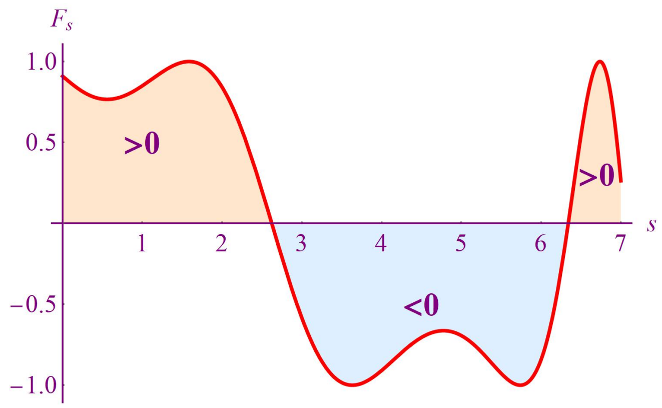
Rad zavisi od sile koja deluje na telo ali i od oblika putanje kojom se telo kreće. Ista sila može da deluje na isto telo u dve različite situacije, tako da se putanje tela razlikuju. U opštem slučaju, rad ove sile neće biti isti na dve različite putanje. Zbog toga se elementarni rad označava sa δA, da bi se razlikovalo od promene koja ne zavisi od putanje, i označava se sa $\mathrm{d}A$.

Iz definicije elementarnog rada proističe nekoliko zanimljivih slučajeva:

- elementarni rad je pozitivan ako je ugao između sile i elementarnog pomeraja oštar ($\cos\theta > 0$, tačka 1 na slici 5.1);

- elementarni rad je negativan ako je ugao između sile i elementarnog pomeraja tup ($\cos\theta < 0$, tačka 3 na slici 5.1);

- elementarni rad nenulte sile može da bude jednak nuli ako je ugao između sile i elementarnog pomeraja prav ($\cos\theta = 0$, tačka 2 na slici 5.1).



Slika 5.2: Rad sile na zadatoj putanji.

Ukupan rad sile na poznatoj putanji je jednak integralu elementarnog rada:

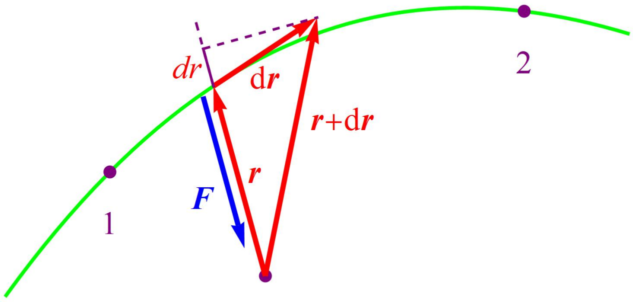
$$A = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 F_s \mathrm{d}s. \tag{5.3}$$

Pošto elementarni rad može da bude i pozitivan i negativan, tako i ukupni rad može da ima proizvoljan znak. Na slici 5.2 je prikazana zavisnost projekcije sile F_s od pređenog puta s. Rad koji je izvršila ova sila je jednak integralu iz definicije, a na slici se vidi kao površina ispod krive. Na nekim delovima putanje rad je pozitivan, a na jednom delu negativan.

Izraz za ukupni rad važi i u slučaju kretanja krutog tela ili sistema čestica, ali tada je elementarni pomeraj $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, pomeraj napadne tačke sile $\boldsymbol{F}$.

Primeri

ELASTIČNA SILA je približno jednaka $\boldsymbol{F}_{el} = -k\boldsymbol{r}$, gde je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja tela, a k koeficijent elastičnosti.



Slika 5.3: Elementarni pomeraj i priraštaj intenziteta vektora položaja.

Elementarni rad pri prelasku tela iz tačke 1 u tačku 2 je:

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -k\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -kr\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Skalarni proizvod $\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je jednak $\mathrm{d}r \cos\angle(\boldsymbol{e}_r, \mathrm{d}\boldsymbol{r})$, a to je projekcija elementarnog pomeraja ($\mathrm{d}\boldsymbol{r}$) na pravac vektora $\boldsymbol{e}_r$. Sa slike 5.3 se vidi da je to zapravo priraštaj intenziteta vektora položaja, koji se označava sa $\mathrm{d}r$.

Kvadrat intenziteta vektora položaja je jednak skalarnom proizvodu vektora sa samim sobom:

$$r^2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}.$$

Ako se nađe totalni diferencijal ove jednačine, dobija se:

$$2r\mathrm{d}r = \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

odakle je:

$$r\mathrm{d}r = \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Ova jednakost je opšta, važi za svaki vektor.

Elementarni rad je u tom slučaju jednak:

$$\delta A = -kr\mathrm{d}r.$$

Ukupan rad na celom putu je jednak:

$$A = -k\int_1^2 r\mathrm{d}r = -k\frac{r^2}{2}\bigg|_{r_1}^{r_2} = -\frac{k}{2}(r_2^2 - r_1^2),$$

odnosno:

$$A = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}. \tag{5.4}$$

GRAVITACIONA I KULONOVA SILA imaju oblik:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\alpha}{r^2}\boldsymbol{e}_r,$$

gde je α konstanta koja zavisi od toga da li je u pitanju gravitaciona ili Kulonova sila. U slučaju gravitacione sile $\alpha = -\gamma m_1 m_2$, gde je γ gravitaciona konstanta a m_1 i m_2 su mase tela koja interaguju, dok je u slučaju Kulonove sile $\alpha = kq_1q_2$ gde je $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, dok su q_1 i q_2 naelektrisanja tela.

Elementarni rad je:

$$\delta A = \frac{\alpha}{r^2}\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

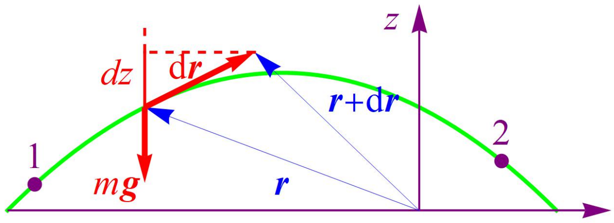
a to je, kao i u prethodnom primeru jednako:

$$\delta A = \frac{\alpha}{r^2}\mathrm{d}r.$$

Ukupan rad na nekom putu je jednak:

$$A = \int_1^2 \frac{\alpha}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}. \tag{5.5}$$

Rad u homogenom gravitacionom polju



Slika 5.4: Elementarni pomeraj tela koje se kreće u homogenom gravitacionom polju..

U blizini površine Zemlje, gravitaciona sila je približno konstantna, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, gde je $\boldsymbol{g}$ gravitaciono ubrzanje Zemlje. Za telo koje se kreće u polju Zemljine teže elementarni rad je:

$$\delta A = -mg\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Znak minus potiče od usmerenja z-ose, sila je suprotno usmerena od ose z, $\boldsymbol{k}$ je ort z-ose.

Skalarni proizvod $\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je projekcija elementarnog pomeraja na z-osu, a to je upravo priraštaj z koordinate, $\mathrm{d}z$,

$$\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}z.$$

$$\delta A = -mg\mathrm{d}z,$$

odnosno:

$$A = \int_1^2 -mg\mathrm{d}z = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2. \tag{5.6}$$

Iako je vrlo važno uočiti da rad sile zavisi od putanje tela, važno je i uočiti da postoje sile za koje on ne zavisi od putanje. Sile iz prethodnih primera su upravo takve. Sa druge strane sila trenja klizanja je takva da njen rad uvek zavisi od oblika putanje po kojoj se telo kreće.

Ako na telo deluje više sila onda je rad svih sila jednak zbiru radova pojedinačnih sila.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \dots,$$

onda je:

$$A = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_1^2 \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \dots.$$

Pri sabiranju radova različitih sila treba voditi računa o njihovom znaku, pa se često kaže da je rad rezultujuće sile jednak *algebarskom zbiru* radova pojedinačnih sila.

Jedinica mere za rad je džul, (J).

Snaga

Do sada je bilo reči samo o vezi oblika trajektorije na kojoj deluje sila, i rada koji ona izvrši. Međutim različite sile na istom putu mogu da izvrše isti rad za različito vreme. Zato može da se definiše *brzina vršenja rada* ili *snaga* (sile).

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}. \tag{5.7}$$

Pošto je elementarni rad $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, onda je:

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{5.8}$$

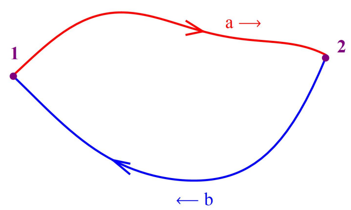
Jedinica mere za snagu je vat (W).

Konzervativne sile

Rad konzervativnih sila je totalni diferencijal koordinata i elementarni rad može da se označi sa $\mathrm{d}A$. Za nekonzervativne sile rad nije totalni diferencijal, pa je i oznaka različita.

Sila, u opštem slučaju, može da zavisi od položaja tela u prostoru, brzine kretanja tela i vremena. Ako sila zavisi samo od položaja tela onda se naziva *stacionarnom*. Na primer, ako se telo kreće pod dejstvom stacionarne sile, i ako pri tom kretanju više puta prođe kroz istu tačku, onda će sila na telo u toj tački biti uvek ista.

Rad stacionarnih sila takođe zavisi od putanje tela, ali među svim stacionarnim silama izdvajaju se one kod kojih rad ne zavisi od putanje. Takve sile se nazivaju *konzervativnim* silama.



Slika 5.5: Rad na zatvorenoj putanji.

Direktna posledica činjenice da rad konzervativnih sila ne zavisi od oblika putanje je da je rad na zatvorenoj putanji uvek jednak nuli za konzervativne sile. Neka se telo kreće po putanji prikazanoj za slici 5.5, pod dejstvom konzervativne sile. Telo kreće iz tačke 1 stiže u tačku 2, duž dela putanje a, zatim se vraća u tačku 1, putanjom b. Ukupan rad je jednak zbiru radova na putanji a i b:

$$A = A_{12}^{a} + A_{21}^{b}.$$

Sila koja deluje na telo je konzervativna, onda rad ne zavisi od oblika putanje pa je rad na delu putanje $A_{12}^{a} = \int_1^2 \mathrm{d}A$, odnosno $A_{21}^{b} = \int_2^1 \mathrm{d}A$. Drugi integral je $\int_2^1 \mathrm{d}A = -\int_1^2 \mathrm{d}A$, odnosno $A_{21}^{b} = -A_{12}^{b}$. Konačno, ukupan rad je:

$$A = A_{12}^{a} + A_{21}^{b} = A_{12}^{a} - A_{12}^{b}.$$

Pošto integrali ne zavise od oblika putanje, onda je $A_{12}^{a} = A_{12}^{b}$, odnosno ukupan rad na zatvorenoj putanji je jednak nuli:

$$A = A_{12}^{a} - A_{12}^{b} = 0.$$

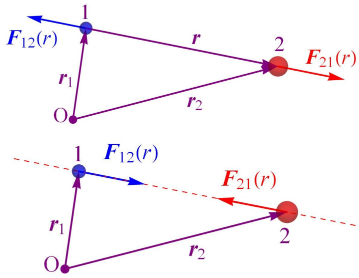
Dakle, ako rad ne zavisi od oblika putanje onda je rad na bilo kakvoj zatvorenoj putanji jednak nuli. Važi i obrnuto, ako je rad na nekoj zatvorenoj putanji jednak nuli onda on ne zavisi od oblika putanje.

Centralne sile

Sile koje zavise samo od rastojanja između tela koja interaguju, i koje deluju duž pravca koji spaja tela, nazivaju se *centralne sile*. Centralne sile su vrlo važan tip sila, pre svega zbog toga što može da se pokaže da je svaka centralna sila konzervativna. U ranijim primerima se vidi da gravitaciona, Kulonova i elastična sila, spadaju u centralne sile.

Ako dimenzije tela nisu zanemarljivo male, a tela interaguju centralnim silama, onda gornja definicija važi za svaki tačkasti delić tela, a kako će izgledati sile koje deluju na cela tela to zavisi od mnogo faktora, oblika tela, vrste interakcije i slično.

Neka dva tačkasta tela interaguju silom $\boldsymbol{F}$. Neka su vektori položaja tela $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$, kao na slici 5.6. Sila je centralna ako deluje duž pravca određenog relativnim vektorom položaja $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, i ako zavisi samo od intenziteta vektora $\boldsymbol{r}$, odnosno funkcija rastojanja između tela:



Slika 5.6: Pravac i smer centralnih sila.

$$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{e}_r, \tag{5.9}$$

gde je $f(r)$ proizvoljna funkcija koordinata, ali takva da je r jednako rastojanju između tela. Funkcija $f(r)$ zavisi od vrste interakcije između tela, ali ne i od puta koji tela prelaze tokom interakcije.

Na slici 5.6 su date dve mogućnosti za smerove delovanja centralnih sila interakcije dva tela. Obratite pažnju na to da se situacija koju slika ilustruje vrlo malo razlikuje od opšteg slučaja u kome važi treći Njutnov zakon. U čemu je razika?

Zavisnost intenziteta centralne sile $f(r)$ sugeriše da sila zavisi samo od položaja tela u prostoru (vrednost r), a ne od toga kako se telo našlo u toj tački prostora.

Rad centralne sile je:

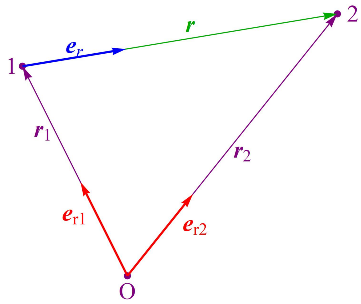
$$\delta A = f(r)\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Skalarni proizvod $\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je već izračunat ranije $\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r$, pa je rad:

$$\delta A = f(r)\mathrm{d}r,$$

odnosno:

$$A_{12} = \int_1^2 f(r)\mathrm{d}r = \Phi(r_2) - \Phi(r_1).$$



Slika 5.7: Relativno rastojanje i ort relativnog rastojanja.

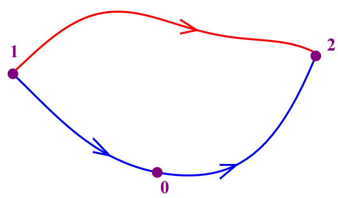
Funkcije Φ se dobijaju integracijom funkcije $f(r)$, i njihova vrednost je određena isključivo položajem tela (koordinatama) u početnom (r_1) i krajnjem položaju tela (r_2). Ovim je dokazano da je svaka centralna sila konzervativna.

Lako se može uopštiti dokaz na slučaj više centralnih sila. Proizvoljna kombinacija centralnih sila je uvek konzervativna.

Potencijalna energija tela

Za konzervativne sile rad koji one izvrše tokom kretanja tela iz položaja 1 do položaja 2 je jednak:

$$A_{12} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1).$$



Slika 5.8: Referentni nivo potencijalne energije.

Neka se kretanje posmatra u odnosu na fiksnu tačku 0 (kao na slici 5.8). Pošto rad ne zavisi od oblika putanje, onda se ukupan rad može napisati kao:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02}.$$

Koristeći osobine određenih integrala $A_{02} = -A_{20}$, dobija se:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^0 f(r)\mathrm{d}r - \int_2^0 f(r)\mathrm{d}r \\ &= \Phi(r_0) - \Phi(r_1) - \Phi(r_0) + \Phi(r_2) \\ &= (\Phi(r_0) - \Phi(r_1)) - (\Phi(r_0) - \Phi(r_2)). \end{aligned}$$

Za fiksiranu tačku O, izrazi u zagradama su funkcije položaja r_1 i r_2 respektivno. Svaka funkcija je određena jednim položajem u prostoru. Rad očigledno ne zavisi od izbora referentne tačke O. Izrazi u zagradama su *potencijalne energije* tela u položajima 1 i 2, u odnosu na tačku O. Fizički smisao potencijalne energije, $U^0(r_i)$, je da je ona jednaka radu potrebnom da se izvrši da se telo premesti iz položaja r_i u referentni položaj O.

Dakle rad konzervativne sile, pri pomeranju tela iz položaja 1 u položaj 2, je jednak umanjenju, odnosno negativnoj promeni potencijalne energije u ta dva položaja:

$$A_{12} = -\left(U_2^0 - U_1^0\right) = -\Delta U_{12}^0. \tag{5.10}$$

Drugim rečima, rad konzervativna sila vrši na račun promene potencijalne energije.

Promena neke veličine je jednaka razlici konačne i početne vrednosti. U tom smislu treba shvatiti *negativnu promenu* iz definicije potencijalne energije, dakle razlika početne i konačne vrednosti.

Rad konzervativne sile ne zavisi od izbora referentne tačke za potencijalnu energiju, pa se ona može uzeti sasvim proizvoljno. Zbog toga i oznaka referentnog nivoa u potencijalnoj energiji nije neophodna.

U primerima za rad pojedinih sila (odeljak 5) koji je napisan kao razlika dve veličine, lako se čitaju izrazi za potencijalnu energiju:

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} + C, \text{ za gravitacionu i Kulonovu silu,} \tag{5.11}$$

$$U(z) = mgz + C, \text{ za silu Zemljine teže,} \tag{5.12}$$

$$U(r) = \frac{kr^2}{2} + C, \text{ za elastičnu silu.} \tag{5.13}$$

Činjenica da rad ne zavisi od referentnog nivoa potencijalne energije se ogleda u tome da je potencijalna energija određena do na konstantu, odnosno potencijalnoj energiji je moguće dodati proizvoljnu konstantu, a da se rad ne promeni.

Iskaz *da neko telo ima potencijalnu energiju* nije korektan. Potencijalna energija je zajedničko svojstvo dva tela koja interaguju. Kako se to „zajedništvo” vidi u jednačinama 5.11-5.13?

Konačno, za svaku konzervativnu, i samo konzervativnu silu je moguće definisati potencijalnu energiju.

Potencijalna energija i sila

Diferencijalni oblik definicije potencijalne energije $A_{12} = -\Delta U_{12}$, je:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U.$$

Elementarni rad je $\mathrm{d}A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, odnosno $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_s \mathrm{d}s$. Tada je:

$$F_s \mathrm{d}s = -\mathrm{d}U,$$

gde je $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$, elementarni pređeni put, F_s je projekcija sile na pravac pomeraja $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, odnosno na tangentu na putanju.

Pošto je potencijalna energija definisana samo za konzervativne sile, kod kojih rad ne zavisi od oblika putanje, onda je u tom slučaju infinitezimalni rad totalni diferencijal, pa se može upotrebiti oznaka $\mathrm{d}A$.

Tada je projekcija sile na putanju jednaka:

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{5.14}$$

Pomeraj d$\boldsymbol{r}$ može da se izrazi u bilo kom koordinatnom sistemu. Neka je na primer d$\boldsymbol{r} = $ d$x\boldsymbol{i}$, tada je $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Ako pomeraj ima sve tri komponente, može da se pokaže da je, u Dekartovim koordinatama:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Sila je jednaka:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{5.15}$$

Parcijalni izvod, na primer $\frac{\partial U}{\partial x}$, funkcije više promenljivih se računa isto kao običan izvod, samo što se sve ostale promenljive funkcije po kojima se izvod ne traži uzmu da su konstantne.

odnosno:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = -\mathrm{grad}U. \tag{5.16}$$

Konzervativna sila je jednaka negativnom gradijentu potencijalne energije.

Gradijent je po definiciji, u Dekartovim koordinatama jednak:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5.17}$$

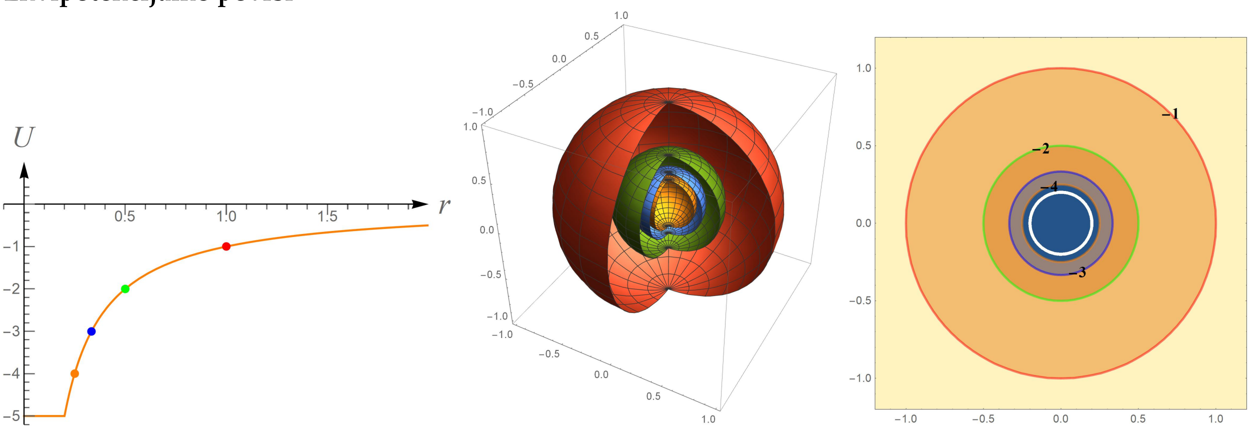
Veze konzervativne sile i potencijalne energije otkriva još jednu važnu posledicu proizvoljnosti u izboru referentne tačke za potencijalnu energiju. Iz definicije gradijenta je jasno da dodavanjem proizvoljne konstante potencijalnoj energiji sila ostaje ista. Ne samo da rad ne zavisi od izbora referentne tačke nego je i sila nezavisna. S obzirom da sila potpuno određuje kretanje tela dodavanjem konstante na potencijalnu energiju se ništa suštinski ne menja.

Pokazivanje da je konzervativna sila jednaka gradijentu potencijalne energije je jednostvanije ako se koristi matematika funkcija više promenljivih. Potencijalna energija zavisi od svih koordinata. U Dekartovim koordinatama $U = U(x, y, z)$, dok je $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$. Elementarni pomeraj je d$\boldsymbol{r}$ = d$x\boldsymbol{i}$ + d$y\boldsymbol{j}$ + d$z\boldsymbol{k}$. Totalni diferencial funkcije više promenljivih je d$U = \frac{\partial U}{\partial x}dx$ + $\frac{\partial U}{\partial y}dy$ + $\frac{\partial U}{\partial z}dz$. Onda je $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_xdx$ + F_ydy + F_zdz. Izjednačavanjem faktora uz iste priraštaje koordinata dobija se izraz koji povezuje komponente gradijenta potencijalne energije i komponente sile.

Kao što običan izvod funkcije jedne promenljive ima jasan geometrijski smisao, tako i gradijent funkcije više promenljivih ima geometrijsko značenje. Za to je potrebno definisati ekvipotencijalne površi.

Ekvipotencijalne površi su površi koje sadrže tačke u kojima potencijalna energija ima istu vrednost.

Primer 5.1
Ekvipotencijalne površi



Uzmimo na primer gravitacionu potencijalnu energiju, $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ (jednačina 5.11). Zavisnost potencijalne energije od rastojanja između dva tela je prikazana na prvoj slici (zašto postoji plato biće objašnjeno u glavi 8 posvećenoj gravitaciji). Ekvipotencijalne površi su površi na kojima potencijalna energija ima istu vrednost. U izrazu za potencijalnu energiju se vidi da će potencijalna energija bii ista za sve tačke koje imaju isto $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a to su sve tačke koje su na istom rastojanju od koordinatnog početka. Sve tačke na istom rastojanju od koordinatnog početka leže na sferi. Izaberimo četiri tačke na prvom grafiku, obeležene različitim bojama, sa različitim vrednostima potencijalne energije. Svaka tačka sa prvog grafika predstavlja sve tačke sa sfere. Sfere, ekvipotencijalne površi, za izabrane potencijalne energije su prikazane na drugoj slici. U bilo kojoj ravni koja sadrži koordinatni početak presek sfera sa ravni su kružnice, što je prikazano na trećoj slici.

Neka je putanja tela, s, kriva po ekvipotencijalnoj površi. Na njoj je potencijalna energija konstantna $U = const$. Onda je $\frac{\partial U}{\partial s} = 0$, odnosno $F_s = 0$ [1]. Ovo važi za proizvoljnu putanju po površi, što znači da je projekcija konzervativne sile na ekvipotencijalnu površ jednaka nuli. To dalje znači da je konzervativna sila uvek normalna na ekvipotencijalnu površ.

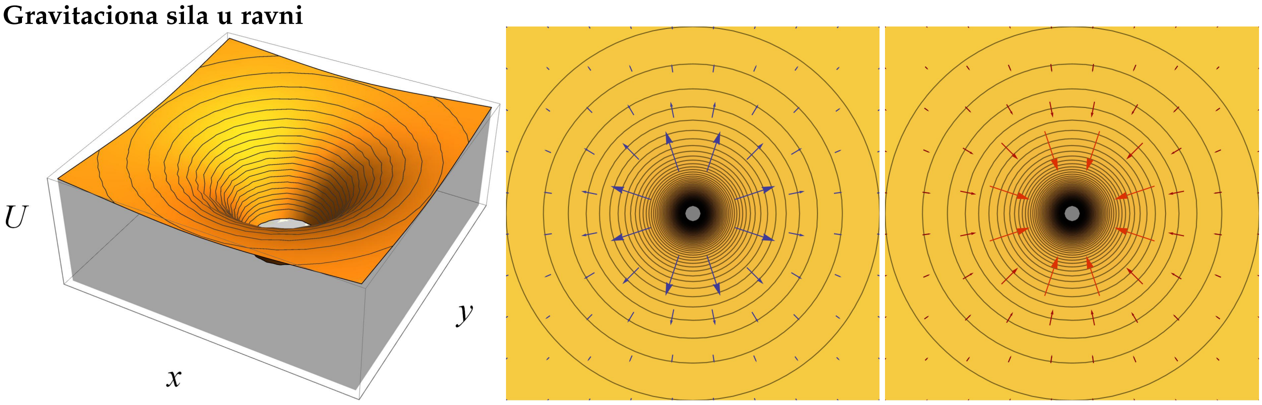
[1] Ako je cela trajektorija s na ekvipotencijalnoj površi onda je svako ∂s na njoj.

Posmatrajmo sada kretanje tela duž normale na ekvipotencijalnu površ (to u opštem slučaju ne mora da bude prava linija). Ako telo krene ka oblasti sa manjom potencijalnom energijom, onda je $\partial U < 0$, ∂s je uvek u smeru kretanja i samim tim pozitivna veličina. Iz jednačine 5.15 sledi da je komponenta sile duž ove trajektorije $F_s > 0$, što znači da sila deluje na telo težeći da ga pomeri ka oblastima sa manjom potencijalnom energijom. Ako telo krene ka oblastima sa većom potencijalnom energijom, onda je $\partial U > 0$, a samim tim $F_s < 0$, što opet znači da sila deluje na telo ka oblastima sa manjom potencijalnom energijom.

Dakle, nekoliko važnih stvari se može zaključiti. Konzervativna sila je uvek usmerena ka oblastima sa manjom potencijalnom energijom, uvek duž normale na ekvipotencijalnu površ. Pošto je gradijent uvek suprotno usmeren od sile, usmeren je u smeru povećanja potencijalne energije, takođe duž normale na ekvipotencijalnu površ, odnosno u smeru najbrže promene potencijalne energije.

Drugim rečima, konzervativna sila uvek deluje na telo tako da teži da mu smanji potencijalnu energiju.

Primer 5.2
Gravitaciona sila u ravni

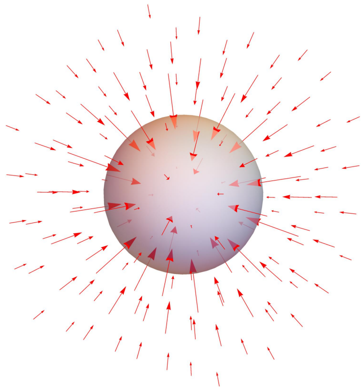


Razmotrimo gravitacionu potencijalnu energiju dva tela u ravni, $U(r) = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Neka je jedno telo, veće, u koordinatnom početku, a drugo, malo, možemo da pomeramo unutar ravni. Potencijalna energija je prikazana na prvoj slici. Ekvipotencijalne površi su u ovom slučaju linije, i to kružnice, što se lepo vidi na sledeće dve slike. Kružnice su izabrane tako da je između susednih kružnica ista promena potencijalne energije. Gušće linije pokazuju oblasti u kojima se funkcija brže menja. Na srednjoj slici su prikazani gradijenti potencijalne energije, a na desnoj gravitacione sile u nekim tačkama u ravni. Dužina strelica odgovara intenzitetu sile. Vidi se da je sila najjača u blizini velikog tela, a kako se udaljavamo od njega sila je sve slabija. Ovo je u potpunoj saglasnosti sa gustinom ekvipotencijalnih linija.

Polje

Definicija materije je da je materija supstanca i fizičko polje. Svako telo, samim tim materijalno, stvara polje oko sebe. Telo može da stvara i više polja različite vrste. Na primer, proton pošto je naelektrisan je izvor električnog polja, ali pošto ima masu onda je izvor i gravitacionog polja.

Ako se dva tela nađu na dovoljno bliskom rastojanju da počnu da interaguju, to zapravo znači da telo interaguje sa poljem drugog tela. Interakcija je posledica postojanja polja, pa samim tim i sila kao mera interakcije. Zanimljivo je koliko je Njutn dobro shvatao suštinu dinamike, kada je napisao da svaka sila ima materijalnu prirodu (odeljak 3). Nije znao za polje, bar ne u današnjem smislu, ali je vrlo dobro razumeo šta je uzrok interakciji.

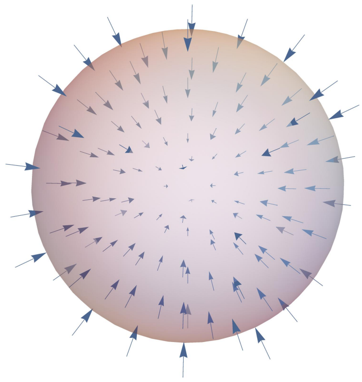


Slika 5.9: Gravitaciono (električno) polje.

Dakle, polje postoji ako postoji izvor, i za to je dovoljno jedno telo. Sila je mera interakcije, a za interakciju su potrebna dva tela.

Kao i sila i polje može da zavisi od položaja u prostoru, brzine izvora polja i vremena. Ako polje ne zavisi od vremena naziva se stacionarnim poljem. Stacionarno polje je uvek isto u istoj tački prostora. U stacionarnom polju i sila koja deluje na telo koje se u njemu nađe je takođe stacionarna.

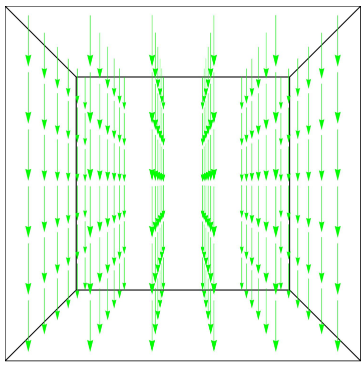
Fizička veličina koja karakteriše polje je *jačina polja*, ili *vektor jačine polja*.



Slika 5.10: Polje elastične sile.

Na primer, ako dva tela interaguju gravitacionom silom, onda je $\boldsymbol{F} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{e}_r$. Veličina $-\gamma\frac{M}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ je određena samo osobinama jednog tela, koje je izvor polja, i rastojanjem od njega, pa ona predstavlja jačinu gravitacionog polja, $\boldsymbol{G} = -\gamma\frac{M}{r^2}\boldsymbol{e}_r$. Gravitaciona sila je tada jednaka $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{G}$. Potrebno je drugo telo, mase m, da bi došlo do interakcije (isti zaključak bi se dobio i da je telo mase m uzeto za izvor polja).

Na slici 5.9 je prikazano gravitaciono (električno) polje (jednačine 3.8 i 3.9). Sfera je docrtana samo da bi se jasnije učila sferna simetrija polja. Vidi se da je polje jače u blizini izvora, strelice su duže. Druga slika (5.10) prikazuje polje elastične sile (jednačina 3.11). Polje je najslabije u blizini izvora i raste kako se rastojanje od izvora povećava. Treća slika (5.11) prikazuje *homogeno polje*, polje koje je isto u celom prostoru. Takvo polje je (približno) polje sile Zemljine teže (jednačina 3.10).



Slika 5.11: Homogeno polje, na primer za silu Zemljine teže.

Ako postoji više izvora polja, onda je rezultujuće polje jednako zbiru polja svih izvora, što predstavlja princip superpozicije:

$$\boldsymbol{G} = \sum_i \boldsymbol{G}_i.$$

Postoje polja za koja može da se definiše skalarna fizička veličina koja se naziva potencijal. Za konzervativne sile može da se definiše potencijalna energija $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}U$. U slučaju gravitacione sile

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{G}$, pa je $\boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{m}$. Veličina sa desne strane zavisi samo od jedne mase, i rastojanja od nje, odnosno od izvora polja, i naziva se *potencijal* ili skalarni potencijal, u ovom slučaju gravitacioni potencijal.

$$\boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}\varphi,$$

odnosno

$$\int_1^2 \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Gravitaciona potencijalna energija je $U = m\varphi$, dok je rad jednak $A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Potencijalna energija je definisana samo za konzervativne sile, tako je i skalarni potencijal definisan samo za ona polja koja daju konzervativne sile. Takva polja se nazivaju *potencijalnim poljima*. Dakle, skalarni potencijal je definisan samo za potencijalna polja.

Polje i skalarni potencijal su određeni osobinama izvora polja, jednog tela. Sa druge strane sila i potencijalna energija su određene osobinama više tela (bar dva) koja interaguju. Čak i kada govorimo o sili koja deluje na telo koje se kreće u nekom polju, ili odgovarajućoj potencijalnoj energiji, implicitno je uključen i izvor polja, dakle opet su u pitanju dva tela.

Kao i potencijalna energija, tako je i skalarni potencijal određen do na konstantu. Skalarni potencijal je aditivan, odnosno potencijal više izvora polja je jednak zbiru potencijala pojedinačnih izvora:

$$\boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \boldsymbol{G}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\sum_i \mathrm{d}\varphi_i = -\mathrm{d}\sum_i \varphi_i = -\mathrm{d}\varphi,$$

odnosno:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_i \varphi_i(\boldsymbol{r}).$$

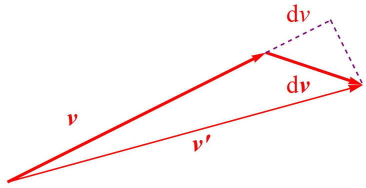
Kao i za konzervativne sile, lako se pokazuje da je jačina polja jednaka negativnom gradijentu skalarnog potencijala:

$$\boldsymbol{G} = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}).$$

U mnogim problemima u fizici je važno da se zna polje ili potencijal. Često je problem jednostavnije rešiti korišćenjem skalarnog potencijala, a zatim iz njega dobiti polje.

Kinetička energija

Neka se telo, mase m, kreće pod dejstvom sila, tako da je rezultujuća sila $\boldsymbol{F}$. Infinitezimalni pomeraj je iz definicije brzine $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$, dok je rezultujuća sila iz osnovne jednačine dinamike $\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$. Elementarni rad je $\delta A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Sa slike 5.12 se vidi da je skalarni proizvod brzine i priraštaja brzine jednak proizvodu intenziteta brzine i projekcije priraštaja na pravac brzine, što je jednako priraštaju intenziteta brzine (slično je bilo sa vektorom položaja), $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = v\mathrm{d}v$.



Slika 5.12: Promena brzine.

$$\delta A = mv\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{5.18}$$

Rad je jednak promeni fizičke veličine koja se naziva *kinetička energija tela*:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{5.19}$$

Ukupan rad je:

$$A_{12} = \Delta T = T_2 - T_1. \tag{5.20}$$

Treba voditi računa da je rad svih sila koje deluju na telo jednak priraštaju kinetičke energije. Ako su poznati radovi svih sila onda je priraštaj kinetičke energije jednak algebarskom zbiru radova svih sila koje na telo deluju.

Iz veze kinetičke energije i mehaničkog rada se vidi još nešto važno. Ako je rad svih sila pozitivan, to onda znači da se kinetička energija tela povećava, a ako je negativan ona se smanjuje. Sasvim je jasno da ako je ukupan rad jednak nuli da se kinetička energija tela na menja.

Veza između ukupnog rada i kinetičke energije važi u svim sistemima reference, samo se u neinercijalnim sistemima moraju uračunati i radovi inercijalnih sila.

Može da bude zbunjujuće da rad koji zavisi od oblika putanje tela, bude jednak totalnom difrencijalu kinetičke energije, koji ne zavisi od oblika putanje. Kako onda i rad nije totalni diferencijal? Ali to je samo prividno tako. Brzina zavisi od svih sila koje deluju na telo, ako su sile nekonzervativne onda će krajnja brzina zavisiti od toga kojim putem i koliko dugo se telo kretalo, a to se ne vidi eksplicitno u izrazu za promenu kinetičke energije. Drugim rečima da bi se izračunala konačna brzina tela pri delovanju sila među kojima je i neka nekonzervativna, u račun eksplicitno ili posredno ulazi i oblik putanje tela.

Ukupna mehanička energija tela

Neka na telo deluje više sila, među kojima su neke konzervativne a neke nisu. Rezultujuća sila može da se napiše kao zbir rezultujuće konzervativne sile i rezultujuće nekonzervativne sile $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{nk}$. Ukupan rad može da se napiše kao zbir rada svih konzervativnih sila i rada svih ostalih sila $A = A_k + A_{nk}$. Rad svih konzervativnih sila je jednak umanjenju potencijalne energije $A_k = -\Delta U$, dok je ukupan rad jednak priraštaju kinetičke energije:

$$\Delta T = A_k + A_{nk} = -\Delta U + A_{nk}.$$

odnosno:

$$\Delta(T + U) = A_{nk}. \tag{5.21}$$

Zbir kinetičke i potencijalne energije je ukupna mehanička energija tela $E = T + U$. Zbog toga što ukupna mehanička energija tela zavisi od potencijalne energije i ona je određena do na konstantu. Ipak priraštaj ukupne mehaničke energije je uvek isti, bez obzira na izabrani referentni nivo za potencijalnu energiju. Konačno:

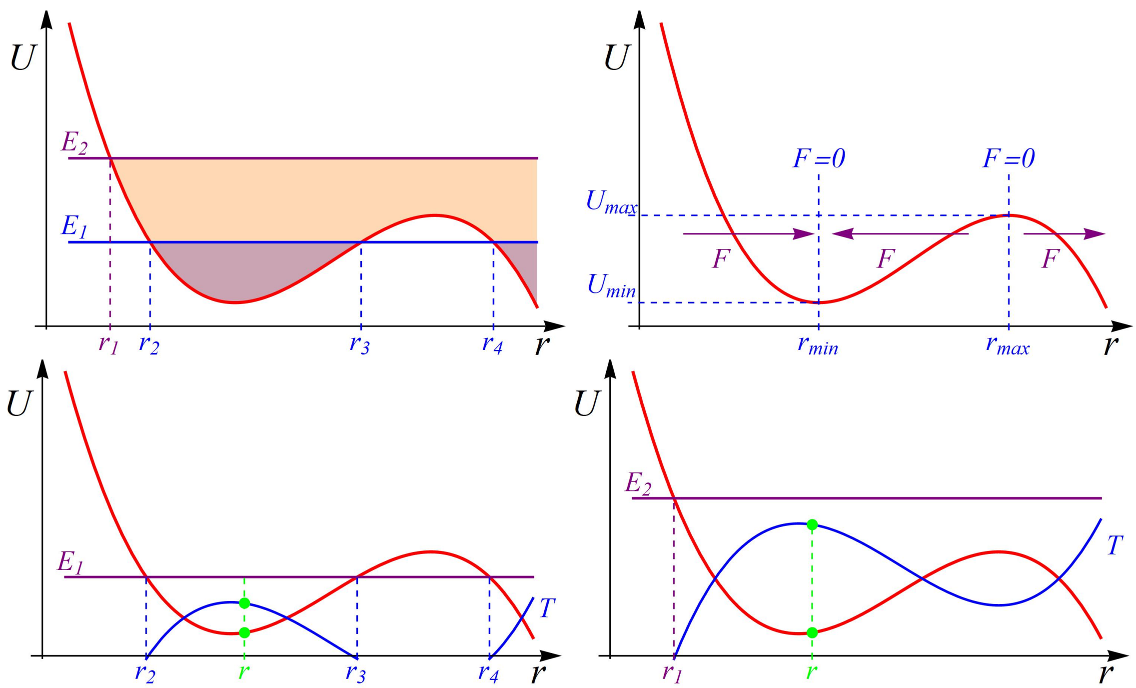
$$\Delta E = A_{nk}. \tag{5.22}$$

Priraštaj ukupne mehaničke energije tela je jednak ukupnom radu svih nekonzervativnih sila koje deluju na telo. Ako na telo ne deluju nekonzervativne sile ili ako je ukupan rad nekonzervativnih sila jednak nuli, onda je ukupna mehanička energija tela konstantna.

$$E = T + U = const. \tag{5.23}$$

Poslednji iskaz je zakon održanja energije za telo koje se kreće pod dejstvom konzervativnih sila.

Važno je uočiti da konzervativne sile ne menjaju ukupnu mehaničku energiju tela, a da samo nekonzervativne mogu da je promene. To je zakon održanja u širem smislu, ne samo da daje uslove pri kojima je energija održana, nego i daje način na koji energija tela može da se promeni.



Slika 5.13: Energijski dijagram tela u polju konzervativnih sila.

Neka se telo kreće u polju konzervativnih sila. Na grafiku (5.13) je prikazana potencijalna energija tela u zavisnosti od rastojanja do izvora polja. Pošto su sve sile koje deluju na telo konzervativne, onda je ukupna mehanička energija konstantna, $E = T + U = const$. Ako je poznata potencijalna enerija onda je dovoljno znati i ukupnu da bi se znala i kinetička $T = E - U = const - U$. Kinetička energija tela je uvek pozitivna, pa iz $E = T + U$ sledi da je $E \geq U$. Grafik zavisnosti potencijalne energije od položaja tela u prostoru sadrži mnogobrojne važne informacije. Neka je ukupna mehanička energija tela E_1, kao na slici 5.13. Telo može da se nađe samo u delu prostora u kome je ukupna mehanička energija veća ili jednaka potencijalnoj. Na slici su to oblasti u kojima je $r \in [r_2, r_3]$ i $r \geq r_4$. Oblast $r \in (r_3, r_4)$ je zabranjena za telo i naziva se *potencijalnom barijerom*. Vidi se takođe, da ako se telo nađe u oblasti $r \in [r_2, r_3]$ ono nema dovoljno energije da tu oblast napusti, pa se nalazi u *potencijalnoj jami*. Sa slike može po nešto da se kaže i o silama. Potencijalna energija za male vrednosti r do minimuma potencijalne jame opada, onda joj je prvi izvod po r negativan. Sila je negativni gradijent (izvod), pa je onda radijalna komponenta pozitivna, u smeru porasta r, a to znači da je sila odbojna. U tački minimuma potencijalne jame sila je jednaka nuli, i to odgovara ravnotežnom položaju tela. Desno od minimuma, izvod U je pozitivan, komponenta sile negativna, samim tim sila je privlačna. Dakle u potencijalnoj jami sila deluje tako da uvek deluje na telo tako da teži da ga vrati u ravnotežni položaj, i ako telo nema dovoljno energije, ono ne može da napusti jamu. Pored toga na slici se vidi i da je položaj u kome potencijalna energija ima minimum, položaj stabilne ravnoteže. To se ogleda u činjenici da ako se telo pomeri na bilo koju stranu od minimuma, na njega će delovati sila ka minimumu, odnosno ka položaju ravnoteže. Položaj u kome potencijalna energija ima maksimum je takođe ravnotežan, ali odgovara nestabilnoj, odnosno labilnoj ravnoteži. Kako god da se telo pomeri sila deluje tako da telo udaljava od položaja ravnoteže. Kinetička energija tela je $T = E_1 - U$, i prikazana je na srednjoj slici 5.13. U svakoj tački u prostoru je moguće odrediti potencijalnu i kinetičku energiju tela (zelene tačke za fiksirano r, na slici). U slučaju kada je ukupna mehanička energija veća, na primer E_2, onda ono ima dovoljno energije da ne bude zarobljeno u jami. Jedino ograničenje na kretanje tela je da ono ne može da priđe drugom telu (izvoru polja) na rastojanje manje od r_1.

Potencijalna energija sistema čestica

Neka tela u sistemu interaguju isključivo centralnim silama. Položaj svih tela u sistemu, odnosno skup svih koordinata tela predstavlja *konfiguraciju* sistema.

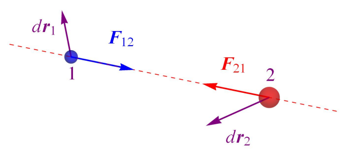
Sopstvena potencijalna energija sistema

NEKA SE SISTEM SASTOJI OD DVA TELA koja interaguju. Elementarni rad sila interakcije na oba tela je:

$$\delta A_{1,2} = \boldsymbol{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2.$$

S obzirom da je $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$, elementarni rad je $\delta A_{1,2} = \boldsymbol{F}_{12} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)$. Izraz u zagradi je relativni pomeraj tela 1 u odnosu na telo 2, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$.

$$\delta A_{1,2} = \boldsymbol{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$



Slika 5.14: Pomeraji usled interakcije u sistemu od dva tela.

Ukupan rad para sila interakcije koje deluju na dva tela je jednak radu koji izvrši jedna od njih delujući na telo koje se kreće u sistemu reference u kome ono drugo telo miruje. Pošto je pretpostavljeno da su sile interakcije centralne ovaj rad je jednak umanjenju potencijalne energije sistema:

$$\delta A_{1,2} = -\mathrm{d}U_{12},$$

odnosno:

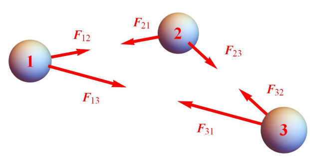
$$A_{1,2} = -\Delta U_{12},$$

gde ΔU_{12} zavisi samo od rastojanja između tela.

Sve oznake sugerišu da se radi o paru tela, a ne o oznakama početnog i krajnjeg stanja.

U SLUČAJU VIŠE TELA rad svih sila u sistemu je algebarski zbir radova na svim parovima tela. Za tri tela rad je jednak:

$$A = A_{1,2} + A_{1,3} + A_{2,3}. \tag{5.24}$$



Slika 5.15: Interakcija tri tela.

Pošto su sve sile centralne svaki od ovih radova je jednak umanjenju odgovarajuće potencijalne energije $A_{i,k} = -\Delta U_{ik}$:

$$A = -(\Delta U_{12} + \Delta U_{13} + \Delta U_{23}) = -\Delta(U_{12} + U_{13} + U_{23}) = -\Delta U_s, \tag{5.25}$$

gde je $U_s = U_{12} + U_{13} + U_{23}$ *sopstvena potencijalna energija* sistema koja zavisi od trenutnih relativnih položaja tela u sistemu, odnosno od trenutne konfiguracije sistema. Sopstvena potencijalna energija sistema je potencijalna energija konzervativnih sila interakcije u sistemu.

U opštem slučaju svakoj konfiguraciji interagujućeg sistema tela (čestica) odgovara određena vrednost sopstvene potencijalne energije. Rad svih unutrašnjih konzervativnih sila pri promeni te konfiguracije je jednak umanjenju sopstvene potencijalne energije sistema, i ne zavisi od toga kako je sistem promenio konfiguraciju.

$$A_{un} = -\Delta U_s. \tag{5.26}$$

Sada može da se dodefiniše pojam konzervativnih sila. Konzervativne sile zavise samo od konfiguracije sistema i njihov ukupan rad zavisi samo od početne i krajnje konfiguracije sistema. Sile koje nisu konzervativne se nazivaju *nekonzervativne*.

Slika 5.16: Izolovani podsistemi.

Sopstvena unutrašnja energija sistema nije aditivna. Uzmimo na primer dva sistema, svaki sa dve čestice u sebi, koji dolaze u kontakt.

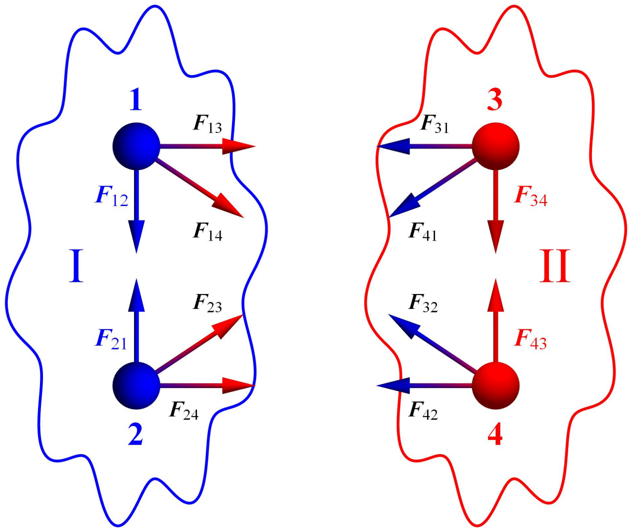
Neka su čestice u prvom podsistemu označene sa 1 i 2 a u drugom sa 3 i 4. Sopstvene unutrašnje energije podsistema su $U_{sI} = U_{12}$ i $U_{sII} = U_{34}$ respektivno. Očigledno je da će sopstvena unutrašnja energija celog sistema pored zbira sopstvenih unutrašnjih energija podsistema sadržavati i članove koji odgovaraju interakciji čestica iz jednog podsistema sa česticama iz drugog:

$$U_s = U_{sI} + U_{sII} + (U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24})\,, \tag{5.27}$$

gde zbir potencijalnih energija u zagradi odgovara potencijalnoj energiji interakcije podsistema. Dakle, sopstvena potencijalna energija sistema je jednaka zbiru svih sopstvenih potencijalnih energija podsistema i potencijalne energije interakcije između podsistema:

$$U_s = \sum_n U_{sn} + U_{int}. \tag{5.28}$$

Kao i potencijalna energija jednog tela u polju i sopstvena potencijalna energija sistema je određena do na proizvoljnu konstantu.



Slika 5.17: Interakcija podsistema.

Spoljašnja potencijalna energija

Neka se sistem nalazi u spoljašnjem polju konzervativnih sila. Tada je potencijalna energija celog sistema u spoljašnjem polju jednaka zbiru potencijalnih energija svakog tela iz sistema, u spoljašnjem polju:

$$U_{sp} = \sum_i U_i^{sp}. \tag{5.29}$$

Nazovimo ovu potencijalnu energiju *spoljašnjom potencijalnom energijom*. Pošto analiziramo samo konzervativne spoljašnje sile, onda je rad svih spoljašnjih sila jednak umanjenju spoljašnje potencijalne energije sistema u tom polju:

$$A_{sp} = -\Delta U_{sp}. \tag{5.30}$$

Primer 5.3

Naći potencijalnu energiju sistema tela u polju Zemljnine teže.

Rešenje: Sila Zemljine teže: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Potencijalna energija svakog tela u sistemu je jednaka $U_i = m_i g z_i$. Spoljašnja potencijalna energija sistema je jednaka $U_{sp} = \sum_i (m_i g z_i) = (\sum_i m_i z_i) g$. Izraz u zagradi je, iz definicije centra mase, jednak proizvodu mase sistema i z-koordinate centra mase $U_{sp} = Mgz_{cm}$. Tada je promena spoljašnje potencijalne energije jednaka $\Delta U_{sp} = Mg\Delta z_{cm}$.

Disipativne sile

Disipativne sile su sile trenja i sile otpora sredine. Skoro svaka od ovakvih sila može da se prikaže kao:

$$\boldsymbol{F} = -f(v)\boldsymbol{v}. \tag{5.31}$$

Brzina u jednačini 5.31 je brzina tela u odnosu na podlogu (sila trenja) ili u odnosu na sredinu kroz koju se kreće (sila otpora sredine), ili relativna brzina u odnosu na telo sa kojim interaguje silom ovakvog tipa.

U zavisnosti iz kog referentnog sistema se posmatra kretanje rad disipativnih sila može biti pozitivan i negativan. Ali ukupan rad svih unutrašnjih disipativnih sila u sistemu je uvek negativan i znak ne zavisi od sistema reference.

Primer 5.4

Dečak i skejt: Neka skejtbord stoji na horizonntalnoj podlozi. Dečak se zaleće i skače na skejt. Zaustavlja se u odnosu na skejt, ali zajedno sa skejtom počinje da se kreće. Za nepokretnog posmatrača kinetička energija dečaka se malo smanjila, pa je rad sile trenja negativan. Gledano iz sistema reference vezanog za skejt, skejt je mirovao pa se pokrenuo. Samim tim rad sile trenja koja deluje na skejt je pozitivan. Da li je ovaj zaključak tačan?

Disipativne sile u sistemu uvek deluju u paru na par tela (po trećem Njutnovom zakonu).

Elementarni rad za par tela je:

$$\delta A_{tr} = \boldsymbol{F}_{12} \cdot \boldsymbol{v}_1 \mathrm{d}t + \boldsymbol{F}_{21} \cdot \boldsymbol{v}_2 \mathrm{d}t,$$

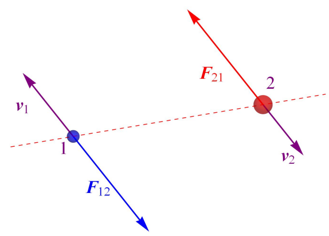
Pošto je $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$, onda je:

$$\delta A_{tr} = \boldsymbol{F}_{12} \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}t.$$

Pošto je $\boldsymbol{F}_{12} = -f(v)\boldsymbol{v}_r = -f(v)\boldsymbol{v}$, a v je relativna brzina, onda je

$$\delta A_{tr} = -f(v)\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = -f(v)v^2\mathrm{d}t.$$

Ako je (a uvek jeste) $f(v)$ pozitivna funkcija, onda je elementarni rad disipativne sile za par proizvoljnih tela uvek negativan, $\delta A_{tr} < 0$.



Slika 5.18: Disipativne sile.

Kinetička energija sistema

Rad svih sila koje deluju na proizvoljno telo u sistemu je jednak promeni njegove kinetičke energije. Ukupan rad svih sila koje deluju u sistemu i na sistem je jednak:

$$A = \sum_i A_i = \sum_i \Delta T_i = \Delta \sum_i T_i = \Delta T, \tag{5.32}$$

gde je T ukupna kinetička energija sistema. Dakle, rad svih sila koje deluju na sva tela u sistemu je jednak priraštaju kinetičke energije sistema. Ova relacija važi u svim sistemima reference (u neinercijalnim u rad je uključen i rad inercijalnih sila).

Kinetička energija je aditivna veličina, pošto ne zavisi eksplicitno od interakcije tela u sistemu.

Ako u sistemu postoje disipativne sile, onda one smanjuju kinetičku energiju (izolovanog) sistema.

Ukupna mehanička energija sistema

Rezultujuća sila svih sila koje deluju u sistemu tela je zbir rezultujuće unutrašnje i rezultujuće spoljašnje sile:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{un} + \boldsymbol{F}_{sp}.$$

Rezultujuća unutrašnja sila je zbir svih konzervativnih i svih disipativnih sila:

$$\boldsymbol{F}_{un} = \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_{tr}.$$

Ukupan rad je jednak priraštaju kinetičke energije sistema, a sa druge strane je jednak zbiru radova svih konzervativnih, disipativnih i spoljašnjih sila:

$$\Delta T = A_{un} + A_{sp} = A_k + A_{tr} + A_{sp}.$$

Kao što je pokazano rad svih unutrašnjih konzervativnih sila je jednak umanjenju sopstvene potencijalne energije sistema. Kada se to zameni u gornju jednačinu, dobija se:

$$\Delta T + \Delta U_s = A_{tr} + A_{sp}.$$

Član na levoj strani je promena mahaničke energije sistema ($E = T + U_s$):

$$\Delta E = A_{tr} + A_{sp}. \tag{5.33}$$

Dakle, algebarski zbir radova svih disipativnih i spoljašnjih sila je jednak priraštaju (ukupne) mehaničke energije sistema. Ukupna mehanička energija zavisi od brzina čestica, vrste interakcije i konfiguracije sistema. Zbog potencijalne energije u njoj određena je do na konstantu i nije aditivna veličina. U slučaju složenog sistema koji se sastoji od nekoliko podsistema ukupna mehanička energija je:

$$E = \sum_i E_i + U_{int}, \tag{5.34}$$

gde su u sumi ukupne mehaničke energije podsistema, a U_{int} je potencijalna energija interakcije između podsistema. Izraz 5.33 važi u svim referentnim sistemima.

Zakon održanja mehaničke energije

Iz izraza 5.33 može da se zaključi još jedna važna stvar. Ako je sistem izolovan i ako u njemu nema disipativnih sila, onda se ukupna mehanička energija sistema ne menja tokom kretanja. Odnosno:

$$E = T + U_s = const. \tag{5.35}$$

Ovo je formulacija zakona održanja energije. Na osnovu njega može da se da još jedna definicija konzervativnog sistema. Konzervativan sistem je onaj sistem čija je ukupna mehanička energija konstantna.

Zakon održanja energije dozvoljava promenu kinetičke i potencijalne energije, ali njihov zbir je uvek isti. Sasvim je jasno da zakon održanja energije važi samo u inercijalnim sistemima (kao i za jedno telo, odeljak 5).

Ako u izolovanom sistemu postoje disipativne sile, onda se tokom kretanja ukupna mehanička energija sistema smanjuje, $\Delta E = A_{tr} < 0$. Drugim rečima energija sistema se troši na rad protiv disipativnih sila.

Zakon održanja energije u ovom obliku već sugeriše univerzalni zakon održanja energije. On pored uslova za održanje energije precizira i načine na koje sistem gubi mehaničku energiju. Ali upravo činjenica da su i načini gubitaka mehaničke energije određeni sugeriše da ako se energija uzme u najširem smislu, ona mora biti održana. Samo tokom vremena ona može da promeni oblik. Zakon održanja energije je univerzalni zakon prirode, i prevazilazi oblasti važenja klasične mehanike.

Mehanička energija neizolovanog sistema može da bude održana ako spoljašnje sile kompenzuju rad disipativnih sila u sistemu.

Mehanička energija sistema u spoljašnjem polju

Neka se sistem nalazi u stacionarnom spoljašnjem polju. Onda se ukupan rad spoljašnjih sila može napisati kao zbir radova svih konzervativnih i ostalih, nekozervativnih, sila:

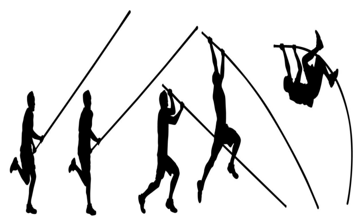
$$A_{sp} = A_{sp}^{k} + A_{sp}^{ost}.$$

Rad konzervativnih spoljašnjih sila je jednak umanjenju spoljašnje potencijalne energije $A_{sp}^{k} = -\Delta U_{sp}$. Kada se to uvrsti u izraz 5.33 dobija se:

$$\Delta(T + U_s + U_{sp}) = \Delta E' = A_{un}^{tr} + A_{sp}^{ost}, \qquad (5.36)$$

gde je E' ukupna mehanička energija sistema u spoljašnjem stacionarnom i konzervativnom polju. Tada može da se kaže da je ukupna mehanička energija sistema u spoljašnjem stacionarnom i konzervativnom polju konstantna ako nema spoljašnjih nekonzervativnih sila i unutrašnjih disipativnih sila.

Evo nekoliko primera kretanja u polju spoljašnjih konzervativnih sila. Zamislite dva tela spojena oprugom koja padaju u homogenom gravitacionom polju, bez otpora vazduha. Kretanje svakog pojedinačnog tela može da bude vrlo složeno. Ipak, pošto je spoljašnja sila, gravitaciona, konzervativna, kao i sila kojom tela interaguju (elastična), onda je ukupna mehanička energija sistema održana. Koršćenje zakona održanja značajno olakšava analizu ovog problema. Ili sistem Zemlja-Mesec u gravitacionom polju Sunca. Analiza kretanja Zemlje i Meseca u gravitacionom polju Sunca takođe može da bude težak zadatak, ipak ovaj sistem je konzervativan jer su i unutrašnja (interakcija Zemlja - Mesec) i spoljašnja sila (gravitaciono polje Sunca) konzervativne.



Slika 5.19: Skok motkom.

Još jedan ilustrativan primer koji može da se analizira tako što se posmatra transformacija mehaničke energije je sportska disciplina skok motkom. Atletičar(ka) se zaleće noseći motku. Ubrzava pri zaletu i tako povećava kinetičku energiju. Na mestu skoka motka se postavlja u ležište, što omogućava da se veliki deo kinetičke energije pretvori u potencijalnu energiju motke koja se pod dejstvom atletičarke savija. Kada se motka dovoljno savije, počinje da se ispravlja i tako vrši rad povećavajući potencijalnu energiju skakačice, tako što je podiže na visinu koja je dovoljna za preskakanje letvice. Potrebno je samo voditi računa da je ovo pojednostavljen opis, i da su zanemareni gubici energije (pre svega zbog sile trenja sa podlogom i sile otpora vazduha).

Mehanička energija u sistemu centra mase

Sistem (fizički) se posmatra iz dva sistema reference, nepokretnog K, i sistema centra mase. Veza između brzina u nepokretnom i sistemu centra mase je:

$$\boldsymbol{v}_i = \widetilde{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{V}_{CM},$$

gde je $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$ brzina tela u sistemu centra mase, a $\boldsymbol{V}_{CM}$ brzina centra mase.

Kinetička energija sistema je:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\widetilde{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{V}_{CM})^2 \\ &= \sum_i \frac{m_i \widetilde{v}_i^2}{2} + \sum_i m_i \widetilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \boldsymbol{V}_{CM} + \sum_i \frac{m_i V_{CM}^2}{2} \\ &= \widetilde{T} + \boldsymbol{V}_{CM} \cdot \left(\sum_i m_i \widetilde{\boldsymbol{v}}_i\right) + \frac{M V_{CM}^2}{2}. \end{aligned}$$

Srednji član u sebi ima zbir impulsa svih čestica u sistemu centra mase, a kao što je pokazano ranije taj zbir je uvek jednak nuli. Kinetička energija sistema tela je tada:

$$T = \widetilde{T} + \frac{M V_{CM}^2}{2}. \tag{5.37}$$

Drugi član je kinetička energija centra mase, kao da se jedno telo sa masom koja je jednaka ukupnoj masi sistema kreće brzinom koja jednaka brzini centra mase.

Sopstvena unutrašnja energija zavisi samo od konfiguracije sistema. Konfiguracija sistema je ista u bilo kom sistemu reference, pa samim tim i sopstvena potencijalna energija.

Ukupna mehanička energija je jednaka zbiru kinetičke i sopstvene potencijalne:

$$E = T + U_s = \widetilde{T} + \frac{M V_{CM}^2}{2} + U_s = \widetilde{E} + \frac{M V_{CM}^2}{2}, \tag{5.38}$$

gde je $\widetilde{E} = \widetilde{T} + U_s$, i naziva se unutrašnja mehanička energija sistema. Termin ima vrlo opravdan naziv. Unutrašnja mehanička energija sistema je zbir kinetičke energije sistema u sistemu centra mase, a ona potiče od kretanja tela unutar sistema, i sopstvene potencijalne energije koja potiče od interakcije tela u sistemu.

U izolovanom sistemu:

$$\Delta E = \Delta \widetilde{E}. \tag{5.39}$$

Priraštaj mehaničke energije sistema tela u bilo kom inercijalnom sistemu reference je jednak priraštaju unutrašnje mehaničke energije sistema. Ako je izolovan sistem konzervativan mehanička energija sistema je održana u bilo kom inercijalnom sistemu. Ovo je potpuno u skladu sa Galilejevim principom, odeljak 3.

Sudari

Značajan problem u fizici je problem dva tela koja se kreću, interaguju međusobno vrlo kratko vreme, i usled interakcije im se menja način kretanja. Ako se interakcija dovoljno slaba, odnosno ako se ona može svesti samo na direktni kontakt tela, onda se govori o sudarima. Ako interakcija nije zanemarljiva onda je to problem rasejanja.

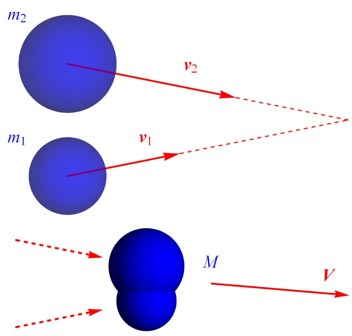
Jedan od standardnih sistema reference u kojima se analiziraju sudari je inercijalan sistem u odnosu na koji se tela kreću, i koji se naziva laboratorijski sistem reference. Pored toga problem dva tela se jednostavno postavlja i u sistemu centra mase, odeljak 4:

- impulsi tela su suprotno usmereni i istog su intenziteta, $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \mu(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$, $\widetilde{\boldsymbol{p}}_2 = \mu(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$, gde je μ redukovana masa sistema dva tela;
- kinetička energija sistema je $\widetilde{T} = \frac{\widetilde{p}^2}{2\mu}$;
- ako tela interaguju, ukupna mehanička energija je $\widetilde{E} = \widetilde{T} + U$.

Radi jednostavnosti mogu se uvesti i sledeća pojednostavljenja:

- laboratorijski sistem je inercijalan;
- sistem dva tela je izolovan;
- impulsi tela pre i posle sudara odgovaraju dovoljno velikim rastojanjima između tela da se potencijalna energija interakcije može zanemariti;
- dimenzije tela se mogu zanemariti, odnosno tela se kreću samo translatorno, ne rotiraju ni pre ni posle sudara.

Sudari se mogu podeliti na (apsolutno) eleastične, neelastične i apsolutno neelastične. Neelastični sudari su svi sudari u kojima mehanička energija sistema nije održana, odnosno u kojim se deo mehaničke energije gubi, to jest deo prelazi u druge oblike energije. S obzirom da se posmatra izolovani sistem od dva tela, onda je impuls takvog sistema uvek održan. Elastični sudari su oni kod kojih se gubitak mehaničke energije tokom sudara može zanemariti, odnosno može se uzeti da je mehanička energija održana. S obzirom da je interakcija između tela zanemarljiva mehanička energija sistema je jednaka kinetičkoj energiji. Dakle pod navedenim uslovima, impuls sistema je uvek održan, a kinetička energija je održana samo pri eleastičnim sudarima.



Slika 5.20: Apsolutno neelastični sudar, u laboratorijskom sistemu.

Apsolutno neelastični sudar

Specijalan slučaj neelastičnih sudara je apsolutno neelastičan sudar. To je sudar pri kome tela koja se sudaraju posle sudara nastavljaju da se kreću kao jedno telo. Neka se tela masa m_1 i m_2, pre sudara kreću brzinama $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$, respektivno.

Impuls sistema je održan, pa je:

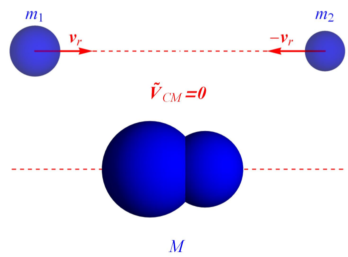
$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{V},$$

gde je $\boldsymbol{V}$ brzina novonastalog tela posle sudara.

Brzina tela posle sudara

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2},$$

je jednaka brzini centra mase.



Slika 5.21: Apsolutno neelastični sudar, u sistemu centra mase.

Pri apsolutno neelastičnom sudaru se izgubi deo kinetičke energije sistema dva tela. Gubitak energije je jednak razlici kinetičke energije sistema posle i pre sudara. Pošto je sistem izolovan onda je gubitak energije isti i u laboratorijskom i u sistemu centra mase:

$$Q = \Delta\widetilde{T} = \widetilde{T}' - \widetilde{T}.$$

Posle sudara telo miruje u sistemu reference vezanom za njega, pa je $\widetilde{T}' = 0$. Onda je gubitak energije jednak negativnoj kinetičkoj energiji sistema pre sudara:

$$Q = -\frac{\mu v_{rel}^2}{2}.$$

U sistemu centra mase se dobijeni rezultati vrlo lako vide i bez računa. Sistem je izolovan, pa je brzina centra mase konstantna. Posle sudara postoji samo jedno telo pa se ono mora kretati brzinom koju je imao centar mase pre sudara.

U sistemu centra mase dinamika dva tela koja mogu i da interaguju je potpuno ekvivalentna dinamici koju imaju dva tela koja ne interaguju, jedno ima masu kao i ceo sistem i kreće se brzinom centra mase, a drugo ima masu koja je jednaka redukovanoj masi sistema i kreće se brzinom koja je jednaka relativnoj brzini jednog tela u odnosu na drugo, takozvana relativna čestica. Posle sudara ostaje samo telo u centru mase, relativna čestica nestaje. Pre sudara je ukupna kinetička energija jednaka zbiru kinetičkih energija centra mase i relativne čestice, a posle sudara je ukupna kinetička energija jednaka kinetičkoj energiji centra mase. Pošto se brzina centra mase ne menja, ne menja se ni kinetička energija centra mase. Dakle sistem je izgubio energiju koja je jednaka energiji relativne čestice.

Elastični sudar

Pri elastičnom sudaru nema gubitaka energije, pa je onda ukupna mehanička energija sistema, odnosno ukupna kinetička energija sistema održana. Na osnovu pravca kretanja sudari se mogu podeliti na čeone i nečeone sudare.

PRI ČEONOM SUDARU oba tela se i pre i posle sudara kreću duž istog pravca. Postoje dve mogućnosti za čeoni sudar. Jedna je slučaj u kome tela idu jedno ka drugom, odnosno brzine su im suprotno usmerene, a druga da jedno telo ide ka drugom, sustižući ga, odnosno brzine su im u istom smeru pre sudara. Ako se ceo problem posmatra iz sistema centra mase nema potrebe razdvajati ova dva slučaja.

U sistemu centra mase impulsi dva tela su uvek suprotno usmereni, i istog su intenziteta, pre i posle sudara:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{p}'}_1 + \widetilde{\boldsymbol{p}'}_2 = 0,$$

odnosno:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = -\widetilde{\boldsymbol{p}}_2, \quad \widetilde{\boldsymbol{p}'}_1 = -\widetilde{\boldsymbol{p}'}_2.$$

Kinetička energija sistema je jednaka kinetičkoj energiji relativne čestice, i to važi i pre i posle sudara. U slučaju elastičnog sudara se kinetička energija sistema ne menja:

$$\frac{\widetilde{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\widetilde{(p')_1}^2}{2\mu} = \frac{\widetilde{p}_2^2}{2\mu} = \frac{\widetilde{(p')_2}^2}{2\mu},$$

pa se intenzitet impulsa oba tela ne menja zbog sudara, u sistemu centra mase:

$$|\widetilde{\boldsymbol{p}}_1| = |\widetilde{\boldsymbol{p}'}_1|, \quad |\widetilde{\boldsymbol{p}}_2| = |\widetilde{\boldsymbol{p}'}_2|.$$

S obzirom da se pravac kretanja ne menja, postoje samo dve mogućnosti za koje se intenzitet impulsa ne menja:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_i = \widetilde{\boldsymbol{p}'}_i, \text{ili } \widetilde{\boldsymbol{p}}_i = -\widetilde{\boldsymbol{p}'}_i, \quad i = 1, 2.$$

Prva mogućnost nema smisla za ovu postavku problema, odnosno moguća je samo ako se tela ne dodirnu tokom kretanja, tako da ostaje druga mogućnost. Usled sudara impulsi oba tela u sistemu centra mase samo promene smer:

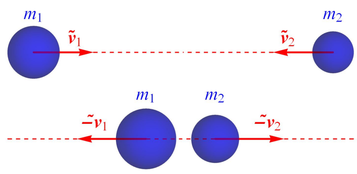
$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_i = -\widetilde{\boldsymbol{p}'}_i. \tag{5.40}$$

S obzirom da je:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_i = m_i \widetilde{\boldsymbol{v}}_i,$$

onda se lako vidi da i brzine tela u sistemu centra mase samo promene smer usled čeonog sudara:

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}_i = -\widetilde{\boldsymbol{v}'}_i.$$



Slika 5.22: Čeoni sudar.

Brzine tela u laboratorijskom sistemu su onda:

$$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{v}'}_i = \boldsymbol{V}_{CM} - \widetilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{V}_{CM} - (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_{CM}),$$

odnosno:

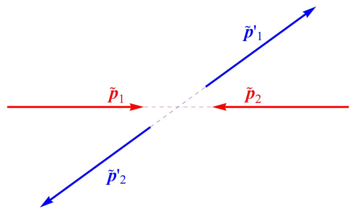
$$\boldsymbol{v}'_i = 2\boldsymbol{V}_{CM} - \boldsymbol{v}_i.$$

Analizom ove relacije mogu da se dobiju svi mogući slučajevi pri čeonom sudaru. U zavisnosti od toga kakve su brzine tela pre sudara i kolike su im mase, brzine posle sudara mogu da budu i u istom smeru kao i pre, ili u suprotnom. Ako su, na primer, mase tela jednake, onda je brzina centra mase jednaka srednjem vektoru brzine $\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$, pa su brzine tela posle sudara jednake:

$$\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_2, \text{ odnosno } \boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_1.$$

Pretpostavimo da pri nečeonom sudaru jedno od dva tela koja se sudaraju miruje. Zovimo ga nadalje metom. U slučaju kada nema interakcije između tela, i kada je sistem tela izolovan, onda je ovaj sistem u kome jedno telo miruje inercijalan i potpuno ekvivalentan laboratorijskom. Drugo telo, koje se kreće, možemo da nazovemo projektilom.

U sistemu centra mase što se intenziteta impulsa tiče sve ostaje isto kao i kod čeonog sudara, intenzitet se ne menja, jedino se promeni pravac duž koga se tela kreću posle sudara. Uzrok promene pravca je interakcija tela tokom sudara.



Slika 5.23: Apsolutno elastični nečeoni sudar. Impulsi u sistemu centra mase.

Ako izračunamo impulse tela u laboratorijskom sistemu, posle sudara, dobijamo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1' &= m_1\boldsymbol{v}_1' = m_1(\boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{v}_1}') = m_1\boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{p}_1}', \qquad (5.41)\\ \boldsymbol{p}_2' &= m_2\boldsymbol{v}_2' = m_1(\boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{v}_2}') = m_2\boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{p}_2}'. \qquad (5.42)\end{aligned}$$

Pošto je $\widetilde{\boldsymbol{p}_1}' = -\widetilde{\boldsymbol{p}_2}'$, kada saberemo ove dve jednačine dobijemo:

$$\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = (m_1 + m_2)\boldsymbol{V}_{CM}.$$

Iz izraza za brzinu centra mase koja je izražena preko impulsa, $\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{m_1+m_2} = \boldsymbol{V}_{CM}$, i pretpostavke da drugo telo pre sudara miruje, $\boldsymbol{p}_2 = 0$, dobija se da je:

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{V}_{CM} = \boldsymbol{p}_1,$$

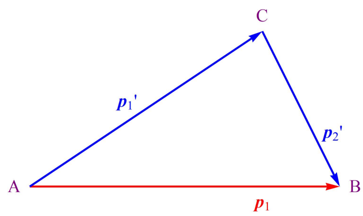
odnosno:

$$\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{p}_1, \qquad (5.43)$$

što i nije preveliko iznenađenje, zato što je dobijena jednačina za zakon održanja impulsa.

Ove izvedene veze između impulsa i brzina tela pre i posle sudara će nam biti potrebne za konstrukciju dijagrama impulsa.

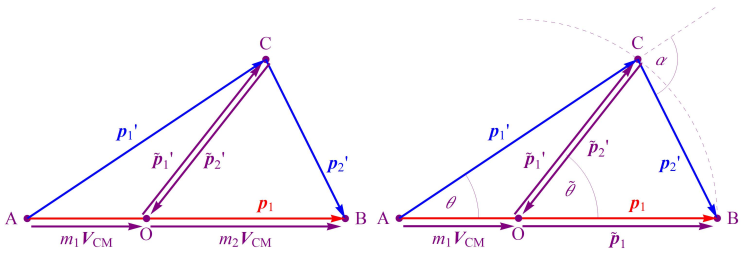
Vektorski dijagram impulsa



Slika 5.24: Apsolutno elastični nečeoni sudar. Impulsi u laboratorijskom sistemu.

Impulsi tela posle sudara se mogu prikazati kao zbir dva vektora (jednačine 5.41). Vidi se da su prvi, kao i drugi sabirci vektori duž istih pravaca. Oba prva sabirka su proporcionalna brzini centra mase, dok su impulsi tela posle sudara u sistemu centra mase suprotno usmereni. To znači da na slici na kojoj su prikazani impulsi tela u laboratorijskom sistemu (slika 5.24), postoji tačka, O na primer, koja deli duž $\overline{AB}$ na dva dela, u odnosu $m_1 : m_2$, kao što je prikazano na slici 5.25. Tada je duž $\overline{OC}$ jednaka intenzitetu impulsa tela posle sudara u sistemu centra mase.

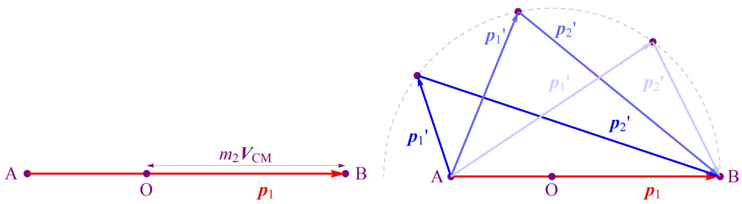
Impuls tela 1 u sistemu centra mase je $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \mu(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$. Pošto je laboratorijski sistem izabran tako da je u njemu brzina tela 2 jednaka nuli ($\boldsymbol{v}_2 = 0$), onda je $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \mu\boldsymbol{v}_1$. Tada je $\mu\boldsymbol{v}_1 = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_1$. Sa druge strane, brzina centra mase je $\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1}{m_1+m_2}$. Vidi se da je $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = m_2\boldsymbol{V}_{CM}$, odnosno $\widetilde{\boldsymbol{p}}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_1$. Impuls(i) tela pre sudara u sistemu centra mase su paralelni impulsu tela 1, pre sudara, u laboratorijskom sistemu i dužina odsečka $\overline{OB}$ je jednaka intenzitetu $|\widetilde{\boldsymbol{p}}_1|$. S obzirom da se intenziteti impulsa tela u sistemu centra mase ne



Slika 5.25: Apsolutno elastični nečeoni sudar. Dijagram impulsa.

menjaju usled sudara onda je i dužina odsečka $\overline{OC} = \overline{OB}$, odnosno tačke B i C leže na kružnici poluprečnika $m_2\boldsymbol{V}_{CM}$, sa centrom u tački O.

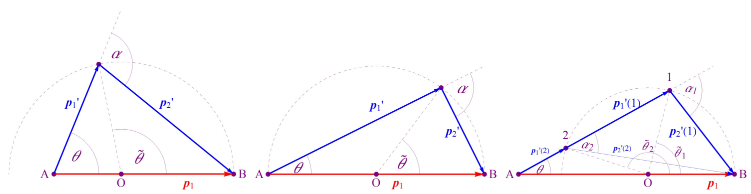
Pored impulsa i uglovi između impulsa zavise od izbora referentnog sistema. Neka je ugao između pravaca kretanja prvog tela pre i posle sudara, $\theta = \angle(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1')$, ugao rasejanja (skretanja projektila) projektila u laboratorijskom sistemu reference, i $\widetilde{\theta} = \angle(\widetilde{\boldsymbol{p}}_1, \widetilde{\boldsymbol{p}}_1')$ u sistemu centra mase. Ugao između impulsa tela 1 i 2 posle sudara u laboratorijskom sistemu reference je $\alpha = \angle(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2')$. Svi uglovi su prikazani na slici 5.25.



Slika 5.26: Konstrukcija dijagrama impulsa.

Neka se telo mase m_1 kreće brzinom v_1, i apsolutno elastično sudara sa telom mase m_2, koje je pre sudara mirovalo. Izvedene relacije i zaključci nam omogućavaju da formulišemo pravila za konstrukciju dijagrama impulsa:

- Nacrtati vektor $\boldsymbol{p}_1$. Neka su njegovi krajevi označeni sa A i B, slika 5.26.
- Odrediti mesto tačke O, koja se nalazi na rastojanju $m_2\boldsymbol{V}_{CM}$ od tačke B.
- Nacrtati polovinu kružnice poluprečnika koji je jednak impulsu tela u sistemu centra mase, $|\mu v_1|$, sa centrom u tački O.
- Svaka tačka na kružnici odgovara jednoj od mogućih situacija posle sudara.

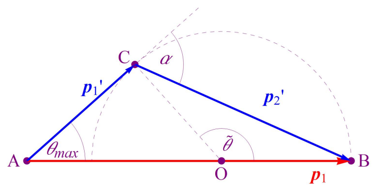


Slika 5.27: Moguće situacije posle elastičnog sudara dva tela.

Jasno je da je za konkretan sudar potrebno znati još neki podatak o kretanju tela nakon sudara. Na primer, ako bi se znao ugao rasejanja projektila, onda bi postojala samo jedna mogućnost za impulse tela posle sudara. Ipak i u ovako opštem obliku moguće je uočiti nekoliko važnih stvari. U zavisnosti od odnosa masa postoje tri slučaja, slika 5.27:

- $m_1 < m_2$, tačka A je unutar kruga. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ i $\alpha > \frac{\pi}{2}$.
- $m_1 = m_2$, tačka A je na kružnici i $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- $m_1 > m_2$, tačka A je van kruga i $0 < \theta < \theta_{max}$ i $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Bez obzira na opštost, vidi se da je ukoliko je projektil manje mase od mete, ugao pod kojim se razleću tela posle sudara uvek tup. Ako su projektil i meta jednakih masa, onda je ugao rasejanja uvek prav. Posebno je zanimljiv slučaj kada projektil ima veću masu od mete. Onda za svaki ugao skretanja projektila postoje dva moguća rezultata sudara. Dakle, nije više dovoljno znati ugao skretanja projektila da bi slučaj bio jednoznačan. Pored toga, postoji najveći mogući ugao skretanja projektila θ_{max}, koji je određen odnosom masa tela 5.28.



Slika 5.28: Maksimalan ugao rasejanja.

Sa slike je jasno da je $\sin\theta_{max} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = \frac{m_2}{m_1}$.

Dijagrami impulsa daju dosta informacija o sudarima, ali bez konkretnih podataka ne mogu dati jedinstveno krajnje rešenje.

Dijagrami impulsa se mogu konstruisati i za neelastične sudare, ali je metod nešto složeniji, i prevazilazi okvir ovog kursa. Detalji se mogu naći u Irodovljevoj knjizi I. E. Irodov [1980].

Zadaci

Rad i snaga

5.1 Procenite da li je ukupan rad prikazan na slici 5.2 pozitivan ili negativan?

5.2 Telo klizi po hrapavoj horizontalnoj podlozi. Putanja je kružnica poluprečnika R. Naći rad sile trenja za vreme za koje telo napravi pun krug. Da li rezultat zavisi od putanje tela?

5.3 Na telo koje se kreće deluje nekoliko sila tako da rezultujuća sila nije jednaka nuli. Prilikom kretanja na nekom putu ukupan rad svih ovih sila je jednak nuli. Da li na osnovu ovoga može nešto da se kaže o pravcu i smeru rezultujuće sile?

5.4 Koliki rad izvrši Koriolisova sila tokom jednog perioda rotacije ravni oscilovanja Fukoovog klatna?

5.5 Na pravom horizontalnom putu automobil ubrzava tako što motor razvija konstantnu snagu. Kakvo je ubrzanje automobila tokom ovakvog ubrzavanja?

5.6 Poslednjih godina vrlo su popularne trke uz stepenice. Najveća visinska razlika je u trci uz Avalski toranj, 136 m. Rekord iznosi 3 minuta i 21 sekunda. Kolika je srednja snaga bila potrebna rekorderu da se popne za ovo vreme? Šta biste rekli, da li je rezultat realističan? Objasnite.

5.7 Promenom koordinatnog sistema često možemo da promenimo znak nekim fizičkim veličinama. Da li možemo da tako promenimo koordinatni sistem da rad promeni znak? Objasnite.

5.8 Lift je okačen o nesitegljivu sajlu koja ga podiže konstantnom brzinom. Koji je znak ukupnog rada izvršenog nad liftom?

5.9 Kada kreće, lift iz prethodnog primera ubrzava. Po trećem Njutnovom zakonu lift deluje na sajlu silom istog intenziteta kao i sila kojom sajla vuče lift. Da li je ukupan rad onda jednak nuli? Ako jeste, kako onda lift povećava kinetičku energiju?

5.10 Sila deluje na elastičnu oprugu, istegne je za dužinu x od ravnotežnog položaja, i izvrši rad A. (a) Ako deluje dvostruko jača sila koliko će biti istezanje? Koliki će rad izvršiti ova sila? (b) Ako početna sila treba da istegne oprugu za $2x$ koliki rad će izvršiti (u poređenju sa A)?

5.11 Od vašeg stana do fakulteta ima 5 km. Rešili ste malo da popravite kondiciju pa ne koristite prevoz. Ako pretrčite ovaj put, brzinom 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ potrebna snaga je oko 700 W. Ako lagano prepešačite, brzinom od 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, snaga je oko 290 W. Za koji način vam treba više energije? Zašto intenzivnije vežbe sagorevaju manje energije nego manje intezivne?

5.12 Radim kao konj Radnik treba da utovari sanduke u kamion. Svaki sanduk mase 30 kg treba podići na visinu od 1 m, do prikolice kamiona. Koliko sanduka radnik treba da podigne za jedan minut da bi radio (a) snagom od pola konjske snage?; (b) snagom od 100 W?

5.13 Dok lebde insekti pri svakom zamahu krilima na dole, deluju silom koja je dvostruko veća od njihove težine. Ako je masa insekta oko 10 g, i ako je prosečan put koji krila pređu pri zamahu nadole oko 1 cm, i ako insekt napravi oko 100 takvih zamaha u sekundi, odredite srednju snagu insekta pri lebdenju.

5.14 Kroz ljudsko srce dnevno prođe oko 7500 l krvi. Ako pretpostavimo da je rad pri pumpanju tolike količine krvi jednak radu potrebnom da se ista tolika količina krvi podigne na visinu prosečne osobe (neka bude 1.7 m), izračunati rad koji srce izvrši za jedan dan. Kolika je snaga srca, pod ovim pretpostavkama?

Konzervativne sile i potencijalna energija

5.15 Sila Zemljine teže mg je konzervativna, a kako onda sila trenja klizanja, koja deluje na telo koje klizi po horizontalnoj podlozi, μmg nije?

5.16 Potencijalna energija konzervativne sile je $U(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}$. Izračunati silu.

5.17 Kako izgledaju ekvipotencijalne površi za elastičnu i gravitacionu silu?

5.18 Student je na času čuo da je samo promena potencijalne energije važna, pa je odlučio da u zadatku sa elastičnom oprugom uzme da je potencijalna energija jednaka nuli onda kada je opruga istegnuta za x_1, odnosno da je $U = \frac{k}{2}(x - x_1)^2$. Da li je ovo tačno? Objasnite.

5.19 Dva majstora popravljaju krov na nekoj kući. Jedan je na krovu a drugi pored kuće. Majstoru na krovu ispada čekić i slobodno pada na zemlju. Postavimo dva referentna sistema kod svakog majstora po jedan. Nulti nivo potencijalne energije u sistemu na krovu je na krovu, a u sistemu na zemlji je na zemlji. Da li je potencijalna energija čekića ista u svakom trenutku u oba referentna sistema? Da li je kinetička energija čekića ista? Da li je promena potencijalne energije ista u oba sistema?

5.20 Telo se kreće pod dejstvom konzervativne sile. U nekoj tački sila je jednaka nuli. Šta se može reći o potencijalnoj energiji u toj tački: i potencijalna energija je jednaka nuli, potencijalna energija ima maksimum, potencijana energija ima minimum, potencijalna energija ima ekstrmum?

5.21 Podigli ste knjigu na neku visinu iznad stola. Tokom podizanja kog znaka je rad gravitacione sile? Da li se gravitaciona potencijalna energija povećava ili smanjuje? Kada pustite knjigu da padne na sto kog znaka je rad gravitacione sile? Da li se gravitaciona potencijalna energija povećava ili smanjuje?

5.22 Drvena kocka je zakačena za kraj opruge. Kocka je pomerena tako da se opruga sabila. Kog je znaka rad sile elastičnosti pri sabijanju opruge? Da li se potencijalna energija opruge povećava ili smanjuje?

5.23 Dva kamena različitih masa su ispaljena sa horizontalne površi, vertikalno naviše uz pomoć sprave sa oprugom. Za oba kamena opruga je bila identično sabijena. Ako se otpor vazduha i masa opruge može zanemariti koja od sledećih tvrdnji je tačna: (a) Oba kamena će dostići istu maksimalnu visinu; (b) Oba kamena će u najvišoj tački putanje imati istu potencijalnu energiju, ako se u oba slučaja nulti nivo potencijalne energije nalazi u tački ispaljivanja kamenja.

5.24 Na neko telo deluje sila $F = kx$, gde je k pozitivna konstanta. Da li je ova sila konzervativna? Ako jeste, skicirati potencijalnu energiju. Da li je u tački $x = 0$ ravnotežni položaj? Da li će se telo vrlo malo pomereno iz ovog položaja vratiti u njega pod dejstvom date sile?

5.25 Dva tela interaguju konzervativnom silom. Sila može biti privlačna ili odbojna. Ako izaberemo nulti nivo potencijalne energije za beskonačno rastojanje između tela, objasnite zašto je u tom slučaju, za konačno rastojanje između tela, potencijalna energija pozitivna za odbojnu, a negativna za privlačnu silu?

5.26 Potencijalna energija sile F je $U = ax^4$, gde je a pozitivna konstanta. Kako je usmerena sila F?

5.27 Nutritivna kalorija je jednaka energiji od 4186 J, i mera je energije koja se oslobodi iz hrane pri varenju. Jedna pločica od žitarica i suvog voća ima 150 nutritivnih kalorija. Kada pojedete jednu ovakvu pločicu, na koju visinu treba da se popnete da biste potrošili svu dobijenu energiju? Kolika će biti visina ako se samo 15% energije pločice može iskoristiti za mehaničku energiju?

5.28 U odnosu na svoju veličinu buva je jedan od najboljih skakača u živom svetu. Buva dužine 2 mm, mase 0.5 mg može da skoči i do 20 cm uvis. (a) Kolikom brzinom buva odskoči od podloge pri ovakvom skoku? (b) Kolika je kinetička energija buve pri odskoku, i kolika je kinetička energija po jedinici mase? (c) Kada bi skakač u vis, visok 2 m i mase 75 kg, mogao da skoči uvis isto koliko i buva u odnosu na njenu dužinu, kolika bi bila visina tog skoka? Kolika bi mu brzina bila potrebna pri odskoku da izvede takav skok? (d) Prosečna visina skoka uvis iz mesta je oko 60 cm, kolika je kinetička energija po jedinici mase skakača iz pitanja pod (b)? (e) Odakle buvi tolika energija za skok?

5.29 Tetive u našem telu služe za povezivanje mišića sa kostima. Pretpostavimo da za njih važi Hukov zakon. Utvrđeno je da opterećenje od 250 g izaziva istezanje od 1.25 cm tetive. (a) Naći koeficijent elastičnosti tetive. (b) Maksimalna sila koju tetiva može da izdrži a da ne pukne je 140 N. Koliko je istezanje tetive pri delovanju ovolike sile? Kolika je potencijalna energija tetive pri ovakvom istezanju?

5.30 Treba da napravite oprugu koja će biti upotrebljena u spejs šatlu, da lansira satelit mase 1200 kg, brzinom 2.5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, dok je šatl u orbiti oko Zemlje. Maksimalno ubrzanje koje satelit može da dobije je 5g. Ako se masa opruge, uzmak šatla pri ispaljivanju satelita, kao i promene gravitacione potencijalne energije mogu zanemariti, odrediti kolika je konstanta elastičnosti opruge? Koliko opruga treba da bude sabijena pre ispaljivanja satelita?

Kinetička i ukupna mehanička energija

5.31 Glavica kupusa mase 1 kg slobodna pada sa stola, verikalno, brzinom od 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, knjiga mase 1 kg klizi po stolu brzinom od 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i mala bundeva mase 1 kg ispada iz kamiona tako da joj je horizontalna komponenta brzine 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a vretikalna 3 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. U kakvom su odnosu kinetčke energije ova tri tela?

5.32 Ako je ranije pokazano da je $A_{12} = -\Delta U$, a sada da je $A_{12} = \Delta T$. To onda znači da je $-\Delta U = \Delta T$, odnosno $\Delta(T + U) = 0$. Da li je to tačno?

5.33 Da li ukupan rad izvršen na nekom telu tokom pomeranja može da bude negativan? Ako može, da li po apsolutnoj vrednosti može da bude veći od početne kinetičke energije?

5.34 Na telo deluju sile tako da ga ubrzaju iz mirovanja do brzine v. Ukupan rad svih sila je A. Koliki rad treba da izvrše ove sile da ko konačna brzina bila tri puta veća?

5.35 Automobil koji se kreće autoputem ima poveliku kinetičku energiju u odnosu na benzinsku pumpu pored puta, ali mu je kinetička energija jednaka nuli u odnosu na vozača. Kada automobil koči do zaustavljanja, da li će isti rad biti izvršen u oba ova referentna sistema?

5.36 Da li rad sile trenja može da bude pozitivan?

5.37 Na telo deluju sile, tako da je rezultujuća sila različita od nule. Da li je moguće da neka od sledećih veličina bude konstantna: (a) intenzitet brzine; (b) brzina; (c) kinetička energija?

5.38 Da li telo može da se kreće konstantnom brzinom ako na njega deluje nekoliko sila, i rezultujuća sila nije jednaka nuli? Da li u istoj situaciji kinetička energija može da bude konstantna?

5.39 Napisati silu trenja klizanja u opštem obliku za disipativne sile.

5.40 Da li je priraštaj mehaničke energije neizolovanog sistema jednak priraštaju sopstvene mehaničke energije (u sistemu centra mase)? Zašto?

5.41 Ista lopta je bačena više puta tako da je intenzitet brzine uvek isti, a samo se ugao koji pravac početne brzine zaklapa sa horizontalom menja (kosi hitac). S obzirom da je intenzitet brzine isti, u svim slučajevima je ista i početna kinetička energija lopte. Ako zanemarimo otpor vazduha, zašto onda lopta ne dostigne svaki put istu maksimalnu visinu?

5.42 Devojka vežba skokove u vodu sa tramboline. Sa svakim odskokom od tramboline devojka postiže veću visinu (pre skoka u vodu). Objasnite kako devojka povećava svoju mehaničku energiju.

5.43 Kada nam je hladno trljamo dlanovima nadlaktice, koje se tako zagreju. Objasnite kako se zagreju. Odakle dolazi toplota?

5.44 Pokazati da je $\tilde{T} = \frac{1}{2}\mu\tilde{v}_{rel}^2$.

5.45 Zamislite ovakvu situaciju: Neko vam baci tenisku lopticu i vi je uhvatite. Potom vam kaže da treba da uhvatite kuglu za kuglanje, s tim što možete da birate između dve opcije, da kugla ima impuls kao što je imala loptica, ili da kugla ima istu kinetičku energiju kao što je imala loptica. Šta biste izabrali i zašto?

5.46 Kinetička energija jednog tela može da se izrazi preko impulsa tela kao $T = p^2/2m$. Kako je onda moguće da u nekom problemu impuls sistema bude održan a kinetička energija ne?

5.47 Dva automobila ubrzavaju, plavi od 10 do 15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a crveni od 15 do 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kojem automobilu se više promeni kinetička energija?

5.48 Dva kamena masa m i $2m$ istovremeno počnu da padaju slobodno sa iste visine. Sila otpora vazduha se može zanemariti. U kakvom su odnosu potencijalne energije kamenja u istim trenucima pada? U kakvom su odnosu kinetičke energije?

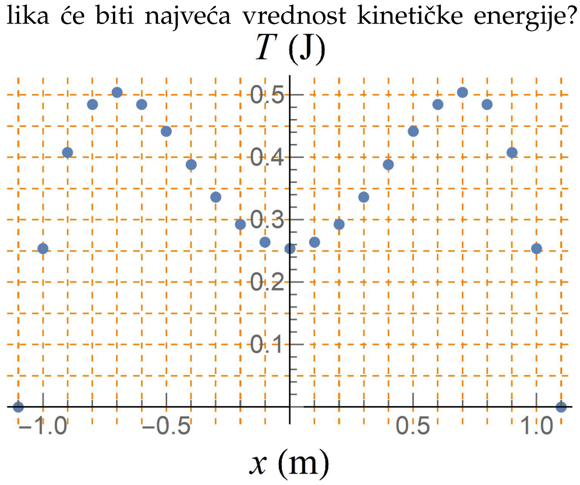
5.49 Jabuka slobodno pada sa drveta. Ako se zanemari otpor vazduha, koje fizičke veličine su joj održane tokom kretanja, impuls, kinetička energija, mehanička energija?

5.50 Sistem čestica se kreće tako da mu je kinetička energija konstantna. Koji je najopštiji iskaz o sistemu u ovom slučaju: sistem je izolovan, u sistemu interagujućih čestica nema disipativnih sila, sistem čine neinteragujuće čestice, rad svih spoljašnjih sila je jednak radu svih disipativnih?

5.51 Odrasli gepard, najbrža velika mačka, mase 70 kg, iz mirovanja strelovito ubrza do brzine od 116 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Koliki rad izvrši gepard pri ovakvom ubrzanju? Kada bi bilo moguće da ubrza do dvostruko veće brzine, koliko puta bi rad bio veći?

5.52 Pre više od 50000 godina veliki meteor je udario u Zemlju. Današnjim merenjima je utvrđeno da je masa meteora bila oko 1.5×10^8kg, a brzina pri udaru oko 13 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. (a) Koliku kinetčku energiju je meteor predao Zemlji? Uporedite to sa eksplozijom nuklearne bombe od jednog megatona. Megaton je $4.184\ \times10^{15}$J.

5.53 Na telo deluje konzervativna sila, pri čemu se ono kreće duž x-ose. Telo kreće iz mirovanja iz tačke $x = -1.1$m. Tokom kretanja tela merena je njegova brzina u funkciji položaja, tako da je moguće izračunati i kinetičku energiju tela u svakoj tački u kojoj je izmerena brzina. Na grafiku je prikazana zavisnost kinetičke energije od položaja tela. Neka je potencijalna energija U jednaka nuli za $x = 0$. (a) Skicirajte potencijalnu energiju tela. (b) Da li je potencijalna energija simetrična u odnosu na $x = 0$ (parna funkcija)? (c) Kolika je vrednost U u tački $x = -1.1$m? (d) Koliko ima tačaka ravnoteže tela? U kojoj od njih je stabilna ravnoteža? (e) Za koje vrednosti položaja tela je sila pozitivna? Negativna? (f) Ako telo pustite iz tavčke $x = -0.9$ m, bez početne brzine, kolika će biti najveća vrednost koordinate x tokom kretanja? Kolika će biti najveća vrednost kinetičke energije?



5.54 Treba da napravite sigurno klatno za muzej nauke. Klatno se sastoji od metalne kugle, mase m, i lake žice, nepoznate dužine l. Uređaj za testiranje je postavljen u tačku vešanja i meri silu zatezanja žice. Kada klatno miruje, lopta je 0.9 m iznad poda, i uređaj pokazuje silu od 209 N. Ispitivanje se sastoji u sledećem: otklonite kuglu za neki ugao od vertikale, tako da žica bude i dalje zategnuta, izmerite visinu na kojoj je centar kugle. Zatim pustite lagano kuglu, i očitate vrednost sile zatezanja u trenutku kada je kugla u najnižoj tački putanje. Rezultati merenja su dati u tabeli.

h (m)	0.9	1	3	5	7	9	11
T (N)	209	210	228	245	263	281	299

Pretpostavimo da je kugla zanemarljivih dimenzija, da se masa žice može zanemariti i da je mehanička energija održana tokom jednog merenja. (a) Nacrtajte zavisnost T od h, i sa grafika odredite dužinu žice, l. (b) Ako je maksimalna sila zatezanja za koju žica još uvek ne pukne, 505 N, koja je maksimalna visina sa koje može da se pusti kugla? (c) Kolika je masa kugle? (d) Posle merenja ste ostavili klatno koje je oscilovalo. Sutradan je klatno mirovalo, a niko nije mogao mu priđe, dok vi ne dođete. Kako se to desilo?

Sudari

5.55 Ako je impuls jednog tela jednak nuli, da li i njegova kinetička energija mora da bude jednaka nuli? Ako je ukupan impuls para čestica jednak nuli da li kinetičke energije ovih tela moraju da budu jednake nuli? Ako je kinetička energija para čestica jednaka nuli, dali impulsi ovih čestica moraju da budu jednaki nuli? Objasnite.

5.56 Da li je moguće da posle apsolutno neelastičnog sudara kinetička energija novonastalog tela bude jednaka nuli? Ako je moguće, koliki je impuls sistema pre i posle sudara? Da li je onda i ukupna kinetička energija dva tela pre sudara jednaka nuli?

5.57 Dve kuglice od plastelina se sudare i usled sudara zalepe jedna za drugu. Koje fizičke veličine sistema od dva tela su održane u ovom sudaru, impuls, kinetička energija, mehanička energija?

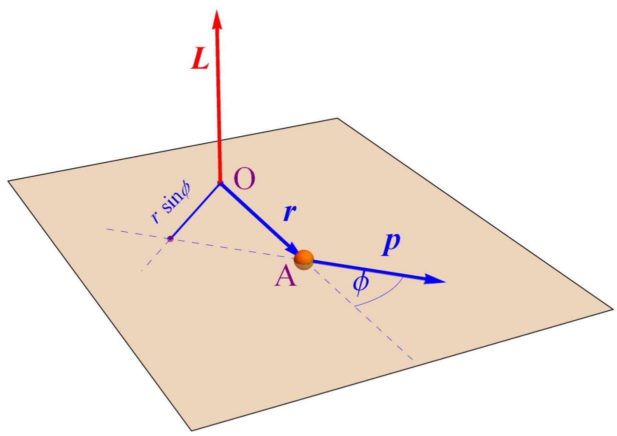
5.58 Dva tela masa m i $2m$ spojena su oprugom zanemarljive mase, i nalaze se na glatkom horizontalnom stolu. Tela miruju dok je opruga sabijena. Kada se opruga pusti šta se može reći o kretanju tela: (a) Oba tela će dobiti impulse jednakih intenziteta; (b) oba tela će dobiti istu količinu kinetičke energije od opruge; (c) telo veće mase će dobiti više kinetičke energije; (d) telo manje mase će dobiti više kinetičke energije. Objasnite.

5.59 U nuklearnim reaktorima se koristi teška voda (D_2O, gde je D deuteron) kao moderator (usporava neutrone). Neka se neutron elastično sudari sa deuteronom koji je pre sudara mirovao. (a) Kolika će biti brzina neutrona posle čeonog sudara, u poređenju sa njegovom brzinom pre sudara? (b) Kolika će biti kinetička energija neutrona posle sudara u poređenju sa kinetičkom energijom pre sudara? (c) Koliko ovakvih sudara je potrebno da se brzina neutrona smanji 60 000 puta?

5.60 Neutron koji miruje se raspadne na proton i elektron. Energija koja se oslobodi ide na kinetičku energiju elektrona i protona. Koliki je odnos kinetičkih energija protona i elektrona posle raspada, ako je masa protona 1836 puta veća od mase elektona?

6
Moment impulsa

Moment impulsa čestice



Slika 6.1: Moment impulsa tela.

Telo se kreće i u jednom trenutku se nađe u tački A (kao na slici 6.1). Vektor položaja tela, u odnosu na unapred izabranu tačku O, je $\boldsymbol{r}$. Neka telo u tom trenutku ima impuls $\boldsymbol{p}$. Tada je moguće definisati *moment impulsa*[1] tela, $\boldsymbol{L}$, kao:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}. \tag{6.1}$$

[1] U upotrebi su još neki nazivi: angularni moment, ugaoni (uglovni) moment i moment količine kretanja.

Moment impulsa je aksijalni vektor. Ako impuls pokazuje smer rotacije oko ose koja prolazi kroz tačku O, onda vektori $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{L}$ čine desni trijedar.

Intenzitet momenta impulsa je:

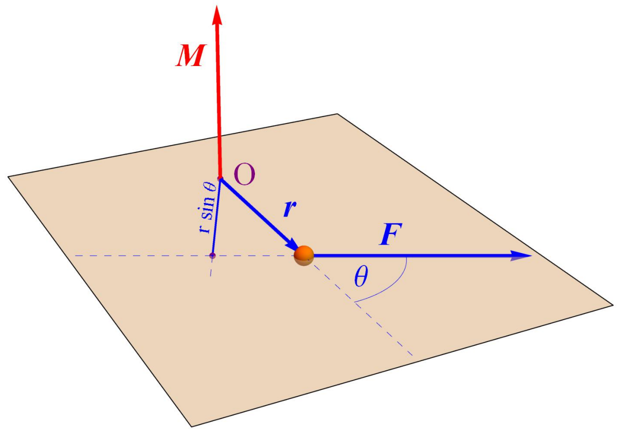
$$|\boldsymbol{L}| = rp\sin\phi = lp, \tag{6.2}$$

gde je $l = r\sin\phi$ krak vektora $\boldsymbol{p}$ u odnosu na tačku O, a ϕ je ugao između vektora $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{p}$.

Jednačina momenata

Izvod momenta impulsa po vremenu je:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}.$$



Slika 6.2: Moment sile koja deluje na telo.

Ako je tačka O nepokretna onda je $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$, a pošto je $\boldsymbol{v} \uparrow\uparrow \boldsymbol{p}$, onda je prvi vektorski proizvod jednak nuli. Sa druge strane izvod impulsa po vremenu je jednak sili koja deluje na telo, pa se cela jednačina svodi na:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{6.3}$$

Vektorski proizvod na desnoj strani je fizička veličina koja se naziva *momentom sile*.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{6.4}$$

Moment sile je, kao i moment impulsa, definisan u odnosu na tačku iz koje polazi vektor položaja, O. Intenzitet momenta sile je jednak:

$$|\boldsymbol{M}| = rF\sin\theta = lF, \tag{6.5}$$

gde je l krak sile u odnosu na tačku O.

Dakle, jednačina momenata je:

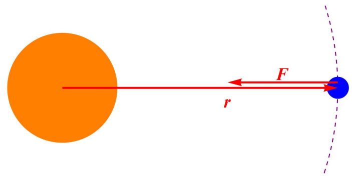
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}. \tag{6.6}$$

Promena momenta impulsa tela u jedninici vremena, u odnosu na tačku O, jednaka je ukupnom momentu svih sila koje deluju na to telo, u odnosu na istu tačku.

U neinercijalnim sistemima treba uključiti i momente inercijalnih sila u odnosu na istu tačku.

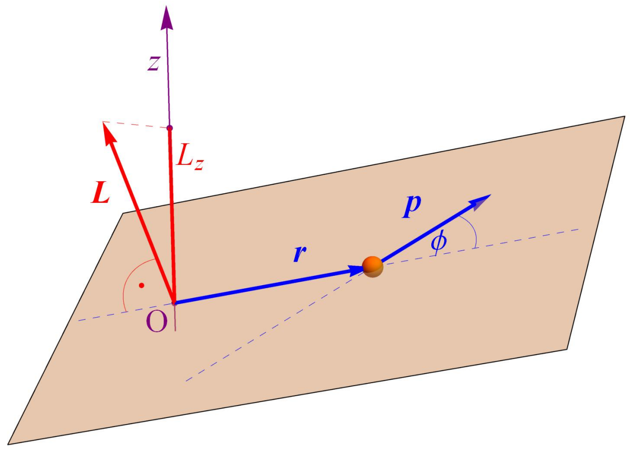
Važna posledica jednačine momenata je da ako je ukupan momenat svih sila koje deluju na telo, u odnosu na neku tačku, jednak nuli onda je moment impulsa tela, u odnosu na istu tu tačku, konstantan. Ovo je zakon održanja momenta impulsa za jedno telo.

Kao i kod drugih zakona održanja u situacijama kada moment impulsa nije održan, jednačina momenata pokazuje kako se moment impulsa menja. $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$, onda je $\boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = \int_1^2 \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$. Da bi se našla promena momenta impulsa potrebno je znati kako moment sile zavisi od vremena. U slučaju kada je moment sile konstantan $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}t$.



Slika 6.3: Moment centralne sile. Moment centralnih sila je uvek jednak nuli u odnosu na jedno od dva tela. Na primer moment gravitacione sile Sunca, koji deluje na neku planetu, u odnosu na Sunce, je jednak nuli (slika 6.3). Isto važi za moment svake centralne sile u odnosu na izvor polja. $\boldsymbol{F} = f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_r$, odnosno $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_r = f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_r = 0$. Iz jednačine momenata onda sledi da je u tom slučaju moment impulsa tela na koje deluju centralne sile konstantan.

Moment impulsa i moment sile u odnosu na neku nepokretnu osu



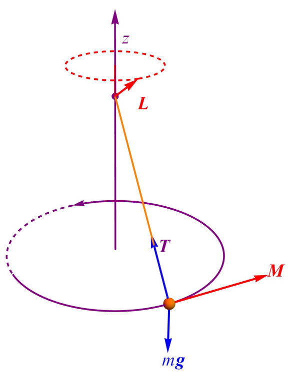
Slika 6.4: Moment impulsa tela u odnosu na nepokretnu osu.

Posmatrajmo kretanje u odnosu na neku nepokretnu osu, sasvim proizvoljnu. Neka je ta osa, na primer z-osa. Momenti u odnosu na proizvoljnu tačku sa ose su $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{M}$, a njihove projekcije na z-osu su L_z i M_z. Onda je komponenta jednačine momenata duž z-ose:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z.$$

Ako je z-komponenta momenta sile jednaka nuli onda se z-komponenta momenta impulsa ne menja. Istovremeno, moment impulsa tela može da se menja.

Primer 6.1
Konusno klatno



Telo okačeno o neistegljivu nit, rotira oko nepokretne ose, tako da opisuje kružnicu. Moment gravitacione sile je uvek normalan na ravan u kojoj je tačka vešanja i sila Zemljine teže. Moment sile zatezanja je jednak nuli, pošto je sila zatezanja kolinearna sa vektorom položaja u odnosu na tačku vešanja. Ukupan moment sila je jednak momentu gravitacione sile. Moment impulsa tela je normalan na ravan koju u kojoj leže tačka vešanja (i cela nit) i brzina tela, kao što je prikazano na slici. Pošto su ukupni moment sile i brzina paralelni vektori u ovom primeru, odnosno moment sila leži u ravni normalnoj na z-osu, onda je z-komponenta momenta impulsa tela održana. Zanimljivo je u ovom primeru da je ukupan moment sila konstantnog intenziteta i ortogonalan je na moment impulsa. Onda moment sila ne može da promeni intenzitet momenta impulsa, već samo njegov smer.

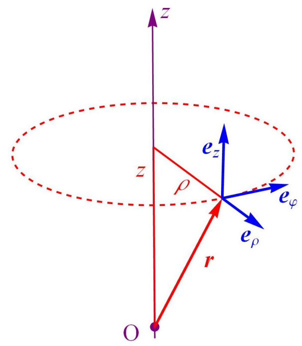
Posmatrajmo kretanje tela oko fiksne ose u cilindričnim koordinatama. Vektor položaja je $\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$, a impuls $\boldsymbol{p} = p_\rho \boldsymbol{e}_\rho + p_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi +$

$p_z \boldsymbol{e}_z$. Moment impulsa je:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix}$$

Razvijanjem ove determinante dobija se da je $L_z = \rho p_\varphi$. Cirkumferalna komponenta impulsa je $p_\varphi = m v_\varphi$, gde je $v_\varphi = \omega_z \rho$, gde je ω_z z-komponenta ugaone brzine, kojom rotira vektor položaja. Dakle:

$$L_z = m\rho^2 \omega_z.$$



Slika 6.5: Cilindrične koordinate.

Potpuno analogno je:

$$M_z = \rho F_\varphi,$$

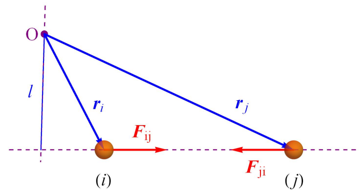
gde je F_φ cirkumferalna komponenta sile.

Važno je uočiti da z-komponente momenta impulsa i momenta sile ne zavise od izbora koordinatnog početka, iako vektori $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{M}$, zavise.

Zakon održanja za sistem čestica

Moment impulsa sistema čestica je jednak zbiru momenata impulsa svih čestica u sistemu, u odnosu na istu tačku:

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{L}_i.$$



Slika 6.6: Momenti sila interakcije tela u sistemu čestica.

Neka svaki moment sile može da se razloži na zbir momenta unutrašnjih i spoljašnjih sila:

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}_i^{un} + \boldsymbol{M}_i^{sp}.$$

Tada je jednačina momenata za sistem čestica:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{M}_i^{un} + \sum_i \boldsymbol{M}_i^{sp}.$$

Za par čestica unutrašnje sile zadovoljavaju treći Njutnov zakon $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. I ako čestice i i j ne mogu da imaju iste vektore položaja, pošto su sile duž iste prave, onda one imaju iste krake, a to znači i da su i momenti sila duž iste prave, ali su suprotno usmereni (slika 6.6). Dakle, za svaki par čestica momenti unutrašnjih sila, u odnosu na istu tačku, se potiru $\boldsymbol{M}_{ij} = -\boldsymbol{M}_{ji}$. Tada je ukupni moment unutrašnjih sila jednak nuli, $\sum_i \boldsymbol{M}_i^{un} = 0$.

Jednačina momenata je tada:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}^{sp}. \tag{6.7}$$

Izvod ukupnog momenta impulsa sistema čestica je jednak rezultujućem momentu spoljašnjih sila, pri čemu su svi momenti uzeti u odnosu na istu tačku.

Priraštaj momenta impulsa sistema je jednak integralu rezultujućeg momenta spoljašnjih sila:

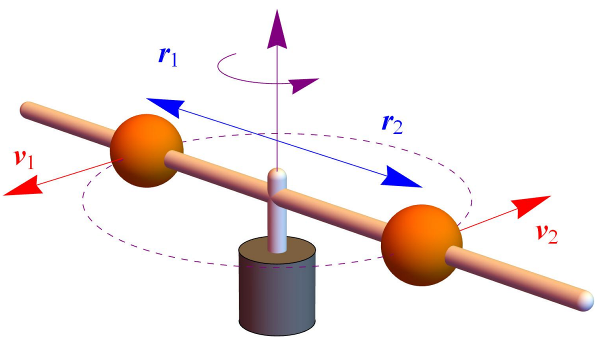
$$\boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = \int_1^2 \boldsymbol{M}^{sp} \mathrm{d}t.$$

Obe prethodne jednačine važe u svakom referentnom sistemu, samo što u neinercijalnom treba uzeti u obzir i momente inercijalnih sila.

Jednačina 6.7 ima i jedan vrlo važan specijalan slučaj. Moment impulsa izolovanog sistema se ne menja tokom vremena. Ovo važi za bilo koju tačku inercijalnog sistema. Momenti impulsa sistema će se razlikovati ako promenimo tačku u odnosu na koju ih posmatramo ali će za svaki izbor tačke ostati konstantni. To što se moment impulsa sistema ne menja ne znači da se ne mogu menjati pojedinačni momenti impulsa čestica.

U slučaju kada sistem nije izolovan jednačina 6.7 pokazuje kako se moment impulsa sistema menja.

Primer 6.2



Dve kuglice, jednakih masa, koje se nalaze na glatkoj šipki, po kojoj mogu da klize bez trenja. Sistem je zarotiran do ugaone brzine ω, i kuglice su oslobođene da mogu slobodno da klize po štapu. Momenti gravitacione sile su paralelni brzinama tela, dok su momenti impulsa vertikalni. Za sistem od dva tela ukupan moment sila je jednak nuli. Momenti sila su ortogonalni na početne momente impulsa pa je onda ukupan moment impulsa konstantan, $\boldsymbol{L}_{uk} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = const$. Sa druge strane $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2$, pa je onda $\boldsymbol{L}_{uk} = 2\boldsymbol{L}_i$ $(i = 1, 2)$. $\boldsymbol{L}_i = m\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$. Dalje, $r_i v_i = r_i^2 \omega = const$. Dakle, što su kuglice dalje od ose rotacije, to je ugaona brzina sistema manja.

Rezultat pokazuje kako u izolovanom sistemu može da se menja ugaona brzina. Klizačica ili balerina posle piruete šire ruke, centar mase se pomera od ose rotacije pa se ugaona brzina smanjuje. Slično tome i skakači u vodu se posle nekoliko salta ispravljaju i značajno smanjuju ugaonu brzinu, i bezbedno uleću u vodu.

Za neizolovan sistem je moguće ponekad naći tačku u odnosu na koju je moment spoljašnjih sila jednak nuli, i tada je moment impulsa sistema održan, ali u odnosu na tu tačku. U tom slučaju impuls sistema se menja sa vremenom, pošto sistem nije izolovan, a moment impulsa se ne menja.

Moguće je takođe da se u neizolovanom sistemu održava samo neka komponenta momenta impulsa, duž pravca duž kojeg je odgovarajuća komponenta momenta spoljašnje sile jednaka nuli.

Primer 6.3

Sistem u kome su Zemlja i Mesec nije izolovan, pošto se nalazi u gravitacionom polju Sunca. Ali u sistemu reference vezanom za Sunce moment gravitacione sile Sunca je jednak nuli pa je moment impulsa sistema održan. Impuls sistema zavisi od vremena, jer sistem nije izolovan.

Drugi primer je kretanje u homogenom gravitacionom polju. Moment gravitacione sile je horizontalan, pa je onda vertikalna komonenta, duž pravca delovanja gravitacione sile (L_z) konstantna, i ako ukupan moment impulsa ($\boldsymbol{L}$) nije.

Ispostavlja se da zakon održanja momenta impulsa važi i kada ne važe Njutnovi zakoni, pa je i to jedan od opštih zakona prirode.

Postoji jedan važan specijalan slučaj za neizolovane sisteme. U sistemu izdvojimo dve tačke u odnosu na koje računamo momente, O i O'. Neka su vektori položaja čestica u odnosu na tačku O', $\boldsymbol{r}_i'$. Tada je:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_i'.$$

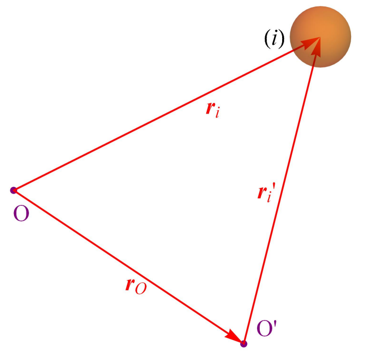
Zamenom u izraz za momente sila dobija se:

$$\boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i.$$

Druga suma predstavlja moment spoljašnjih sila u odnosu na tačku O'. U prvoj sumi vektor položaja $\boldsymbol{r}_O$ je isti za sve sabirke, a suma svih sila daje rezultujuću spoljašnju silu.

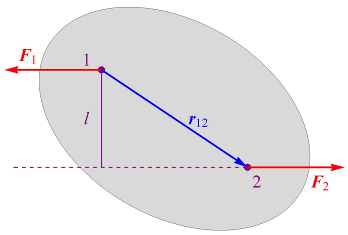
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{F}. \tag{6.8}$$

Rezultat 6.8 ima jednu vrlo važnu posledicu. Ako je rezultujuća spoljašnja sila jednaka nuli. Tada je moment svih sila isti u odnosu na bilo koju tačku u sistemu.



Slika 6.7: Dve referentne tačke za momente u sistemu.

Primer 6.4



Dve sile deluju na telo, na suprotne strane, istog intenziteta, u različitim tačkama. Rezultujuća spoljašnja sila je jednaka nuli. Moment spoljašnjih sila nije jednak nuli, i nezavisno od izbora tačke u odnosu na koju se računa moment impulsa, on je jednak $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_{12} \times \boldsymbol{F}_2$, odnosno $|\boldsymbol{M}| = lF$. Pokazati!

Sistem centra mase

Neka sistem CM u opštem slučaju neinercijalan. Onda je ukupna sila zbir svih sila interakcije i inercijalnih sila:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{int} + \boldsymbol{F}_{in}.$$

U sistemu CM sistem miruje kao celina. Tada je rezultujuća sila jednaka nuli. Na osnovu rezultata iz prethodnog odeljka, to znači da moment svih sila koje deluju na sistem ne zavisi od izbora tačke u odnosu na koju se posmatra. Dalje, može se pokazati da je ukupan moment svih inercijalnih sila jednak nuli u odnosu na CM.

Neka je $\boldsymbol{F}_i = -m\boldsymbol{a}_O$, gde je $\boldsymbol{a}_O$ ubrzanje CM. Moment inercijalnih sila je:

$$\boldsymbol{M}_{CM}^{in} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (-m_i \boldsymbol{a}_O) = -\left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\right) \times \boldsymbol{a}_O.$$

Izraz na desnoj strani u zagradi je $M\boldsymbol{r}_{CM}$, a pošto je položaj centra mase u sistemu CM nulti vektor, onda je i moment inercijalnih sila jednak nuli.

Sopstveni moment impulsa i sistem CM

Moment impulsa u odnosu na tačku O' je:

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_O \times \boldsymbol{p}_i + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}_i.$$

Druga suma na desnoj strani je moment impulsa sistema u odnosu na tačku O'.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_O \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{L}', \tag{6.9}$$

gde je $\boldsymbol{p}$ ukupan impuls sistema. Ako je ukupan impuls sistema jednak nuli onda moment impulsa sistema ne zavisi od izbora tačke u odnosu na koju se posmatra. To je upravo slučaj u sistemu CM. Dakle, moment impulsa sistema ne zavisi od izbora tačke O u sistemu centra mase.

Neka je $\boldsymbol{L}$ moment impulsa sistema u laboratorijskom sistemu. Pošto sopstveni moment impulsa u sistemu CM, $\boldsymbol{L}'$, ne zavisi od izbora tačke O' neka je onda $O' = O$. Tada je $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}'_i$. Brzina svake čestice je $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_i$.

Moment impulsa sistema je:

$$\boldsymbol{L} = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{V}_{CM} + \sum_i m_i\widetilde{\boldsymbol{r}}_i \times \widetilde{\boldsymbol{v}}_i = M\boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{V}_{CM} + \widetilde{\boldsymbol{L}},$$

Odnosno:

$$\boldsymbol{L} = \widetilde{\boldsymbol{L}} + M\boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{V}_{CM}. \tag{6.10}$$

Moment impulsa sistema može da se predstavi kao zbir sopstvenog momenta impulsa i momenta impulsa koji potiče od kretanja sistema (centra mase) kao celine.

Jednačine momenata u sistemu CM

U sistemu centra mase jednačina rotacije krutog tela je:

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{L}}}{\mathrm{d}t} = \widetilde{\boldsymbol{M}}. \tag{6.11}$$

Moment sila, $\widetilde{\boldsymbol{M}}$, ne zavisi od tačke u odnosu na koju se posmatra, pa referentna tačka može da bude centar mase. A u sistemu CM je moment svih inercijalnih sila jednak nuli. To znači da je izvod sopstvenog momenta impulsa jednak momentu svih spoljašnjih (pravih) sila:

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{L}}}{\mathrm{d}t} = \widetilde{\boldsymbol{M}}_{CM}. \tag{6.12}$$

Ako je moment svih spoljašnjih sila jednak nuli, onda je sopstveni moment impulsa sistema konstantan.

Za bilo koju komponentu jednačine duž ose koja prolazi kroz CM, na primer z-osu, važi:

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{L}_z}{\mathrm{d}t} = \widetilde{M}_z^{CM}.$$

Ako je neka komponenta momenta spoljašnjih sila jednaka nuli, onda je ista ta komponenta momenta impulsa konstantna.

Sistem centra mase za dva tela - podsetnik

Na primeru dva tela koja interaguju mogu lako da se uoče prednosti korišćenja centra mase u opisivanju kretanja. Prelaskom sa dva realna (fizička) tela na centar mase i relativnu česticu, jednačine kretanja se prilično pojednostavljuju, pre svega nisu više spregnute. U tabeli 6.1 su upoređene jednačine za ova dva pristupa.

Dva tela, masa m_1 i m_2, se kreću brzinama $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$. Vektori položaja tela su $\boldsymbol{r}_1 = \tilde{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{r}_{CM}$ i $\boldsymbol{r}_2 = \tilde{\boldsymbol{r}}_2 + \boldsymbol{r}_{CM}$. Ukupna masa sistema je $M = m_1 + m_2$, μ je redukovana masa sistema, relativna brzina $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$, dok je $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$.

	Dva tela	CM i relativna čestica
J-ne kretanja	$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12}\ (+\boldsymbol{F}_1)$	$M\ddot{\boldsymbol{r}}_{CM} = 0\ (+\boldsymbol{F})$
	$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21}\ (+\boldsymbol{F}_2)$	$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{12}$
Impuls	$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$	$M\boldsymbol{V}_{CM}$
Energija		
T	$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$	$\frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$
E	$T + U$	$\tilde{T} + U + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$
Moment impulsa	$m_1\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2$	$\mu\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_r + M\boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{V}_{CM}$

Tabela 6.1: Impuls, energija i moment impulsa dva realna tela i za centar mase i relativnu česticu.

Zadaci

6.1 Pokazati da moment impulsa konusnog klatna koje rotira konstantnom ugaonom brzinom ne menja intenzitet, već samo smer.

6.2 Pokazati da je moment centralne sile u odnosu na tačku izvora polja jednak nuli.

6.3 Da li je moguće da impuls sistema čestica nije održan a moment impulsa sistema jeste? Ako je moguće smislite primer.

6.4 Pokazati da moment impulsa dva tela može da se izrazi kao zbir momenta impulsa relativne čestice i mometa impulsa centra mase.

6.5 Materijalna tačka (čestica) se kreće pravolinijski, konstantnom brzinom. Najmanje rastojanje između tela i koordinatnog početla je L. Da li moment je impulsa čestice u odnosu na ovaj koordinatni početak jednak nuli? Da li se moment impulsa menja tokom kretanja čestice?

6.6 Helikopter ima veliku elisu koja rotira u horizontalnoj ravni koja mu omogućava da leti. Pored nje postoji i mala elisa na zadnjem delu helikoptera koja rotira u vertikanoj ravni. Čemu služi ova elisa? Neki veliki helikopteri nemaju zadnju elisu, ali zato imaju dve velike, jednu iznad druge koje rotiraju u suprotnom smeru. Zašto rotiraju u suprotnom smeru?

6.7 Stojite na centru velikog diska koji može da rotira bez trenja, oko svoje ose. Disk rotira nekom ugaonom brzinom. U jednom trenutku krenete ka obodu diska. Dok se krećete šta se dešava sa ukupnim momentom impulsa, a šta sa ugaonom brzinom diska?

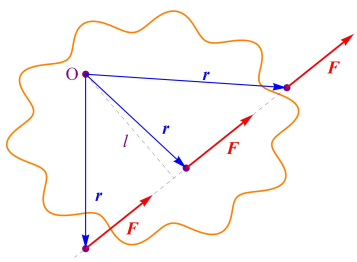
7
Dinamika krutog tela

Proizvoljno kretanje krutog tela može da se razloži na translatorno kretanje jedne tačke, centra mase tela (ne nužno tačke na telu) i rotacije oko ose koja prolazi kroz centar mase. Razlaganje kretanja se opisuje uz pomoć dve jednačine:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \quad \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{L}}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \widetilde{\boldsymbol{M}}_{CM}. \tag{7.1}$$

Ako su poznati zakoni spoljašnjih sila, njihove napadne tačke i početni uslovi, mogu, u principu da se izračunaju položaji i brzine svake tačke krutog tela, u svakom trenutku.

I ako su jednačine jednostavnog oblika nije uvek moguće rešiti ih. U opštem slučaju osa rotacije, na primer, može da menja pravac tokom vremena što značajno otežava rešavanje problema. Ipak, mogu da se izdvoje pojedini specijalni slučajevi, koji mogu sasvim adekvatno da ilustruju dinamičke probleme krutog tela.



Slika 7.1: Napadna tačka sile.

Ravnoteža krutog tela

Pre nego što se pređe na kretanje, mogu da se formulišu uslovi za mirovanje krutog tela. Telo (sistem) miruje ako nema ničeg što bi ga pokrenulo. To znači da rezultujuća (spoljašnja) sila mora da bude jednaka nuli i moment svih (spoljašnjih) sila u odnosu na bilo koju tačku mora da bude jednak nuli.

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{sp} = 0 \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{M}_i^{sp} = 0. \tag{7.3}$$

U neinercijalnom sistemu, za uslove ravnoteže, moraju se uračunati i inercijalne sile.

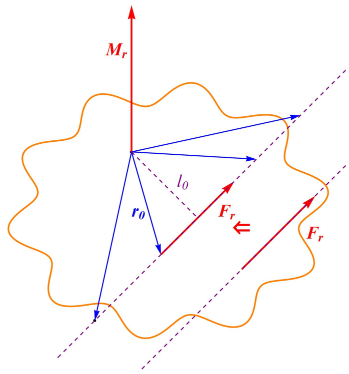
Specijalni slučajevi kretanja krutog tela

Metod ekvivalentne sile

Ako na telo deluje više sila uvek je moguće naći rezultujuću silu, i tako problem svesti na delovanje jedne sile. U slučaju krutog tela na koje deluje više sila, sile imaju različite momente, pa bez obzira što se kretanje centra mase može svesti na problem jedne, rezultujuće sile, rezultujući moment sile u opštem slučaju nije jednak momentu rezultujuće sile.

Ipak, kada je ukupni moment spoljašnjih sila normalan na rezultujuću silu, ceo problem dinamike krutog tela može da se svede na problem krutog tela na koje deluje jedna sila.

Ako je moment sila u odnosu na neku tačku $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{F}$, onda postoji vektor $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0 \perp \boldsymbol{M}$, takav da je za zadate sile i momente sila $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{F}$. Vektor $\boldsymbol{r}_0$ nije jednoznačno određen. Ako na neki $\boldsymbol{r}_0$ dodamo bilo koji vektor paralelan sili dobićemo vektor koji zadovoljava iste uslove, odnosno daće isti moment sila (slika 7.2).



Slika 7.2: Ekvivalentna sila.

Ako su poznati rezultujuća sila i rezultujući moment sila onda je krak sile jednak $l_0 = \frac{M}{F}$.

Ako je rezultujući moment sila normalan na rezultujuću silu, onda sistem sila koje deluju na određene tačke na telu može da se zameni *rezultantom*, koja je jednaka rezultujućoj sili $\boldsymbol{F}$, i čiji je moment jednak zbirnom momentu svih sila.

Ako se sile transliraju duž pravca njihovog dejstva jednačine kretanja ostaju iste. Sila ostaje ista a i momenti se ne menjaju pošto se krak sile ne menja. Dakle, napadna tačka sile nije toliko važna koliko tačan pravac duž koga sila deluje.

Primer 7.1

Naći moment gravitacione sile na kruto telo u homogenom gravitacionom polju.

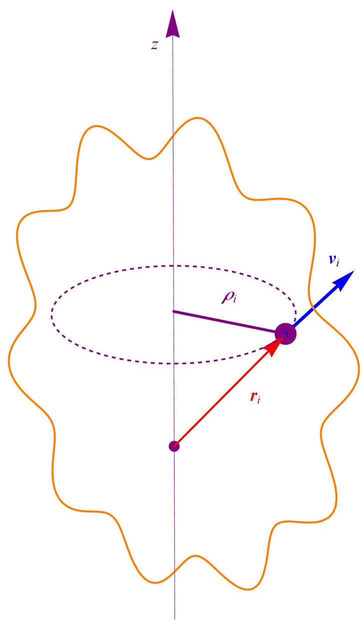
Rešenje: Sila koja deluje na bilo koji delić krutog tela je $\boldsymbol{F}_i = m_i \boldsymbol{g}$, ukupan moment gravitacione sile je $\boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{g}$. U homogenom polju može se uzeti da gravitaciona sila deluje duž pravca koji prolazi kroz centar mase. U sistemu centra mase moment gravitacione sile je jednak nuli.

Rotacija oko nepokretne ose

Neka kruto telo rotira oko nepokretne ose. Neka je ta osa z-osa referentnog sistema. Tada je moment impulsa tela jednak zbiru momenata impulsa svih delića tela, u odnosu na istu osu. Već je pokazano da ako je osa rotacije nepokretna onda moment impulsa ne zavisi od izbora referentne tačke na osi.

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega_z, \tag{7.4}$$

gde je m_i masa i-tog delića tela, ρ_i rastojanje tog delića do ose rotacije i ω_z projekcija ugaone brzine ω za z-osu. Brzina i-tog delića je izražena preko ugaone brzine tela $v_i = \rho_i \omega_z$. Fizičku veličinu u zagradi možemo da nazovemo momentom inercije tela u odnosu na z-osu $I = \sum_i m_i \rho_i^2$. Tada je:



Slika 7.3: Rotacija krutog tela oko nepokretne ose.

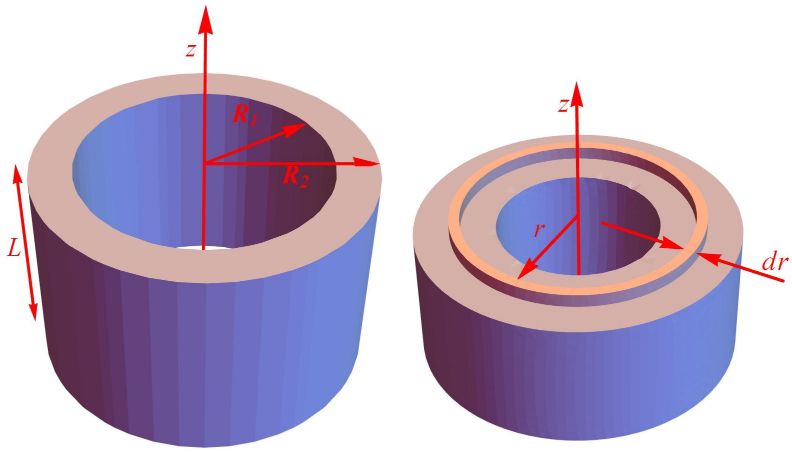
$$L_z = I\omega_z. \tag{7.5}$$

Moment inercije zavisi od rasporeda masa u odnosu na osu oko koje telo rotira. U kontinualnom slučaju $I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$, gde je ρ gustina tela a dV element zapremine.

U opštem slučaju je $\boldsymbol{L} = \hat{I}\omega$, gde je $\hat{I}$ tenzor inercije. Zbog tenzorske prirode momenta inercije vektori momenta impulsa i ugaone brzine ne moraju da budu paralelni.

U opštem slučaju nije uvek jednostavno, a ponekad nije ni moguće izračunati moment inercije u odnosu na neku osu.

Kao primer može da posluži račun momenta inercije šupljeg valjka, mase m i untrašnjeg i spoljašnjeg poluprečnika R_1 i R_2, respektivno,



Slika 7.4: Moment inercije valjka.

u odnosu na osu koja se poklapa sa uzdužnom osom simetrije valjka. Uzmimo tanak cilindar, širine dr i visine koja je jednaka visini valjka (slika 7.4). Zapremina ovog tankog cilindra je $dV = 2r\pi L dr$, a onda je masa $dm = \rho 2r\pi L dr$. Pošto je gustina jednaka količniku mase tela i njegove zapremine $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{(R_1^2 - R_2^2)\pi L}$, onda je masa izdvojenog cilindra $dm = \frac{2m}{(R_1^2 - R_2^2)} r dr$. Moment inercije je zbir svih ovako izabranih cilindara, od poluprečnika R_1 do poluprečnika R_2.

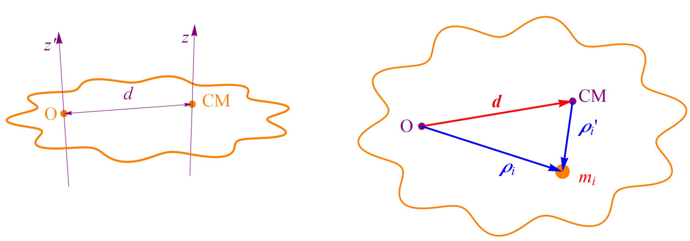
$$I = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2m}{(R_1^2 - R_2^2)} r^3 dr = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2).$$

Kao što se vidi rezultat ne zavisi od dužine (visine) valjka.

Iz rezultata dobijenog u prethodnom primeru lako mogu da se izvedu izrazi za momente inercije nekoliko tela. Rezultati su, pored ostalih, dati u tabeli 7.1.

Na isti način se može pokazati da je moment inercije tankog homogenog štapa, u odnosu na osu koja je normalna na njega i polazi kroz centar mase jednak $I = \frac{1}{12} m L^2$, gde je L dužina štapa.

Već kod simetričnih tela je očigledno da bi računanje momenta inercije u odnosu na bilo koju drugu osu koja nije osa simetrije tela moglo da bude vrlo teško. Ipak, u slučaju ose koja je paralelna osi koja prolazi kroz centar mase tela značajno olakšanje donosi Štajnerova teorema. Neka je poznat moment inercije tela u odnosu na osu



Slika 7.5: Štajnerova teorema: Veza između vektora položaja gledano iz dva sistema reference.

koja prolazi kroz centar mase. Moment inercije u odnosu na osu koja je paralelna ovoj i na rastojanju d od nje je:

$$I = I_{CM} + md^2. \tag{7.6}$$

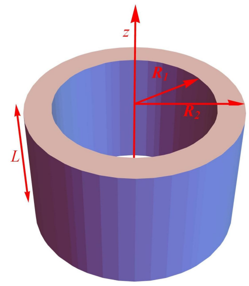
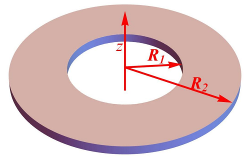
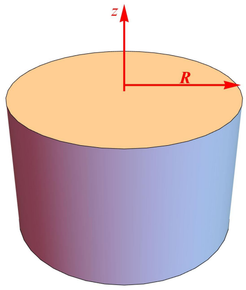
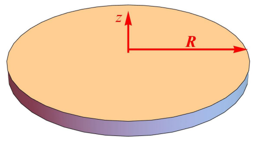
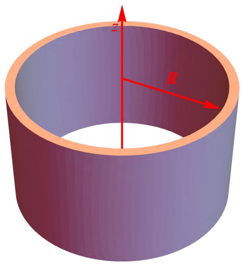
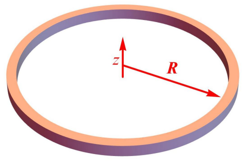
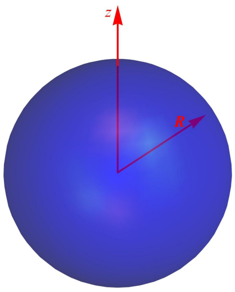
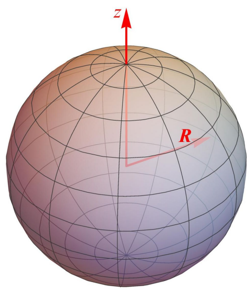
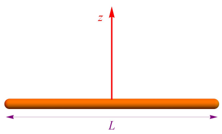
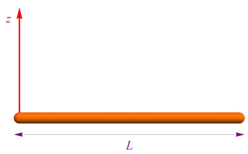
Telo		I_{zz}	Telo		I_{zz}
Šuplji valjak		$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$	Šuplji disk		$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
Puni valjak		$\frac{1}{2}mR^2$	Puni disk		$\frac{1}{2}mR^2$
Tanak cilindar		mR^2	Tanak prsten		mR^2
Lopta		$\frac{2}{5}mR^2$	Sfera		$\frac{2}{3}mR^2$
Štap		$\frac{1}{12}mL^2$	Štap		$\frac{1}{3}mL^2$

Tabela 7.1: Momenti inercije cilindrično i sferno simetričnih tela u odnosu na osu simetrije.

Neka su rastojanja istog delića tela od jedne i druge ose $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{\rho}'$, respektivno. Tada je $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{d}$. ρ je rastojanje do ose u odnosu na koju tražimo moment inercije, a ρ' rastojanje do ose koja prolazi kroz centar mase tela. Kada se ovo zameni u izraz za moment inercije, dobija se:

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i \left(\boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{d}\right)^2 = \sum_i m_i \left(\rho_i'^2 + 2\boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{d} + d^2\right)$$

$$= \sum_i m_i \rho_i'^2 + \sum_i 2 m_i \boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{d} + \sum_i m_i d^2 = I_{CM} + \sum_i 2 m_i \boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{d} + m d^2.$$

Srednji član sadrži $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$. U sistemu CM se zna da je $\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = 0$.

Vektori ρ_i odgovaraju projekcijama vektora položaja na horizontalnu ravan. Ako je zbir vektora jednak nuli onda i zbir projekcija na neku osu ili ravan mora takođe da bude jednako nuli. Zamislite da nije tako, onda bi rezultujući vektor iz ravni morao da se sabere u nulu sa nekim njemu ortogonalnim vektorom, što nije moguće. Dakle, u sistemu CM $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$, pa je time i teorema dokazana.

Jednačina kretanja

Iz izraza 7.4, diferenciranjem po vremenu, se lako dobija jedačina kretanja za telo koje rotira oko fiksne ose.

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t},$$

odnosno:

$$M_z = I\alpha_z, \tag{7.7}$$

gde je α_z z-komponenta ugaonog ubrzanja, a M_z z-komponenta rezultujućeg momenta sila.

Izborom ose rotacije, odnosno njenog smera, bira se i pozitivni smer rotacije, ako je $\boldsymbol{M}||\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$, onda je $M_z > 0$, ako su ovi vektori antiparalelni onda je projekcija M_z negativna.

Jednačina 7.7 je potpuno analogna osnovnoj jednačini dinamike, i mogu da se izvedu slični zaključci:

- $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{\alpha}$ su duž istog pravca, pa onda ako je projekcija ukupnog momenta sile pozitivna, onda je i projekcija ugaonog ubrzanja pozitivna, odnosno telo povećava ugaonu brzinu;
- uz početne uslove za φ_0 i ω_0, moguće je rešiti jednačinu kretanja za kruto telo;
- u neinercijalnom sistemu reference treba uzeti u obzir i momente inercijalnih sila.

Kinetička energija tela koje rotira oko nepokretne ose se dobija lako ako se brzina svakog delića izrazi preko ugaone brzine, $v_i = \rho_i\omega$. Onda je kinetička energija jednaka:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

odnosno:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{7.8}$$

Rad spoljašnjih sila je jednak promeni kinetičke energije tela $\delta A = \mathrm{d}T$, odnosno $\delta A = \mathrm{d}(\frac{1}{2}I\omega^2) = I\omega\mathrm{d}\omega$. Sa druge strane $I\mathrm{d}\omega = M_z\mathrm{d}t$, odnosno

$$\delta A = M_z\omega\mathrm{d}t = M_z\mathrm{d}\varphi$$

. Rad za konačni ugao rotacije je:

$$A = \int_0^\varphi M_z\mathrm{d}\varphi.$$

Jasno je da ako je projekcija momenta sila konstantna onda je ukupan rad $A = M_z\varphi$.

Kretanje krutog tela u ravni

Pri kretanju krutog tela u ravni centar mase tela se sve vreme kreće u istoj ravni koja je nepokretna u laboratorijskom sistemu(glava 2). Istovremeno vektor ugaone brzine je sve vreme ortogonalan na tu ravan. Kretanje krutog tela u ravni uvek može da se razloži na kretanje centra mase, pod dejstvom sila koje deluju na telo i rotaciju oko ose koja prolazi kroz centar mase (rotacija oko nepokretne ose u sistemu centra mase), pod dejstvom momenata svih sila, u odnosu na istu osu. U sistemu centra mase osnovna jednačina dinamike rotacije je $I_{CM}\alpha = M_{CM}$, pa su jednačine kretanja tela:

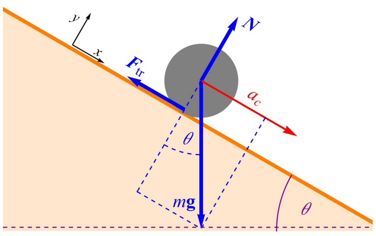
U moment sila M_{CM} ulaze samo momenti sila interakcije, pošto je pokazano da su momenti inercijalnih sila u sistemu CM jednaki nuli.

$$m\boldsymbol{a}_{CM} = \boldsymbol{F}, \quad I_{CM}\alpha_z = M_{CM}.$$

Rešavanjem jednačina kretanja, uz početne uslove, dobija se $\boldsymbol{r}_{CM}(t)$ i $\varphi(t)$, što potpuno određuje položaj krutog tela.

Projekcije ω_z, α_z i φ_z su iste i u laboratorijskom i u sistemu CM, pošto se sistem CM kreće traslatorno, normalno na osu rotacije.

Primer 7.2



Naći jednačine kretanja tela koje se kotrlja bez klizanja niz strmu ravan.
Rešenje: Sila trenja $\boldsymbol{F}_{tr}$ je sila trenja mirovanja, i ona nije poznata, da bi se rešio sistem

$$ma_{CM} = mg\sin\theta - F_{tr},$$

$$I_{CM}\alpha = F_{tr}r,$$

mora da se zna još jedna veza. Nju daje uslov da se radi o kotrljanju bez klizanja, odnsno da tačka dodira tela sa podlogom, u trenutku dodira miruje. To znači da je tada $a_{CM} = \alpha r$. Uz ovu vezu sistem jednačina se lako rešava.

Kinetička emergija krutog tela može da se napiše kao zbir kinetičke energije tela u sistemu centra mase i kinetičke energije centra mase:

$$T = \tilde{T} + \frac{1}{2}mV_{CM}^2.$$

U sistemu centra mase telo samo rotira oko nepokretne ose, pa je kinetička energija jednaka:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mV_{CM}^2. \tag{7.9}$$

Sila trenja kotrljanja ne vrši nikakav rad, pa je ukupna mehanička energija tela koje se kotrlja konstantna. Sila trenja kotrljanja je sila statičkog trenja, deluje na tačku (tačke) dodira tela i podloge. Pri kotrljanju bez klizanja te tačke miruju u odnosu na podlogu, u svakom trenutku, pa je onda rad sile koja deluje na njih jednak nuli.

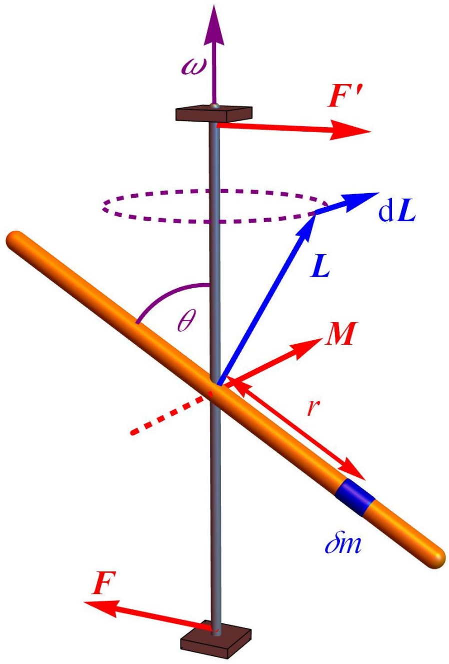
Prvi član odgovara rotaciji oko ose koja prolazi kroz centar mase tela, a drugi je kinetička energija centra mase.

Kretanje oko slobodnih osa. Glavne ose tela

Ako se kruto telo zarotira i prepusti samo sebi osa rotacije će, u principu, menjati svoj položaj u prostoru. Ako ne želimo da osa menja položaj onda na nju moraju da deluju neke sile koje će da je fiksiraju. Ovo lepo ilustruje sledeći primer.

Sredina homogenog štapa čvrsto je pričvršćena za osu rotacije, i zaklapa sa njom ugao θ. Naći moment spoljašnjih sila koje će omogućiti da osa ne menja svoj položaj u prostoru.

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$



Slika 7.6: Sile koje održavaju položaj ose rotacije u prostoru.

Delić štapa mase δm ima moment impulsa $\delta \boldsymbol{L}$. Vektor $\delta \boldsymbol{L} = \delta m \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ je normalan na štap, i to ne zavisi od toga koji delić je u pitanju. To znači da je i ukupan moment impulsa normalan na štap ($\delta \boldsymbol{L} || \boldsymbol{L}$). Sa slike je dalje očigledno da moment impulsa nije paralean ugaonoj brzini.

Za vreme dt moment impulsa se promeni za d$\boldsymbol{L}$. $|\mathrm{d}\boldsymbol{L}| = L \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\omega \mathrm{d}t$. Ugao $\frac{\pi}{2} - \theta$ je ugao između vektora momenta impulsa i ugaone brzine. Po definiciji vktorskog proizvoda $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}\mathrm{d}t$, odnosno $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}$.

Da bi osa održavala položaj u prostoru mora da postoji moment spoljašnjih sila koje to omogućavaju.

Iz prethodnog primera se vidi da je za $\theta = \frac{\pi}{2}$ moment spoljašnjih sila jednak nuli, odnosno da je moment impulsa paralelan ugaonoj brzini, i nema potrebe da spoljašnje sile fiksiraju osu.

Osa rotacije koja bi zadržala položaj u prostoru bez delovanja spoljašnjih sila se naziva *slobodna osa rotacije*. Svako kruto telo ima tri ortogonalne slobodne ose rotacije koje prolaze kroz centar mase, i one se nazivaju *glavne ose rotacije*.

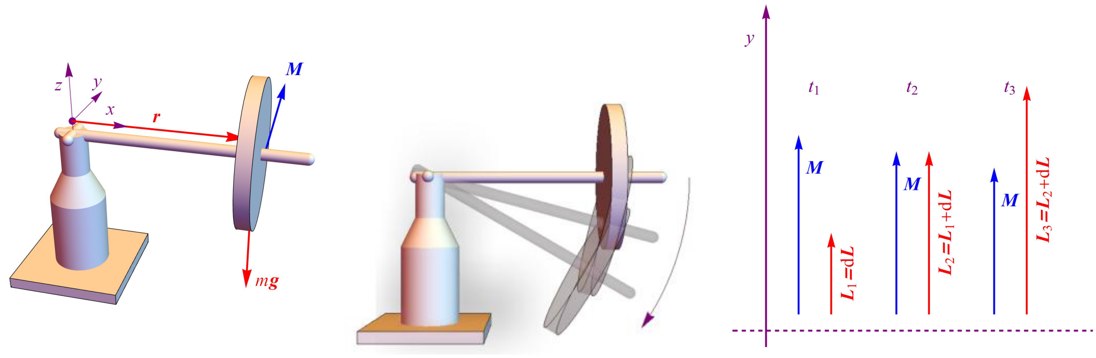
Glavne ose rotacije se dobijaju i rešavanjem svojstvenog problema tenzora inercije.

Nalaženje glavnih osa rotacije je neuporedivo lakše za simetrična tela. Bar jedna osa je duž ose simetrije tela.

Ako telo rotira oko glavne ose moment impulsa je paralelan ugaonoj brzini i proporcionalan njoj, koeficijent proporcionalnosti je odgovarajući moment inercije. Isto važi i za rotaciju oko bilo koje ose koja je paralelna glavnoj osi.

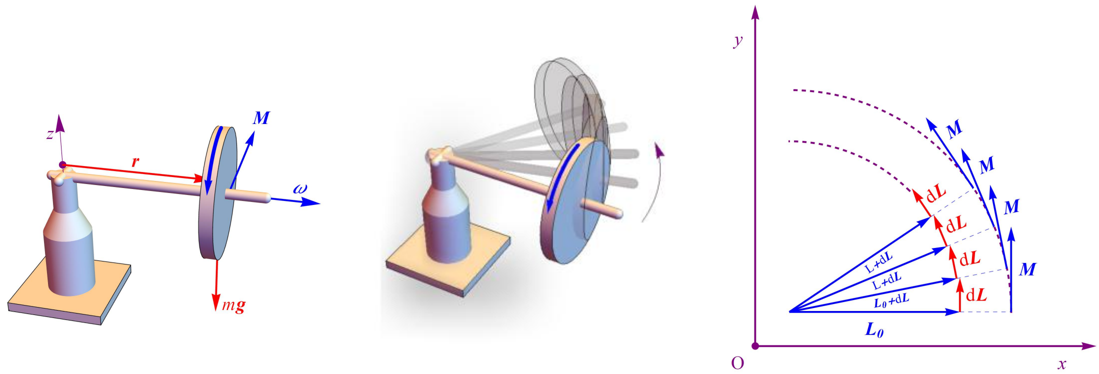
Žiroskop

Primer za najjednostavniji žiroskop može da bude disk na osovini koja je fiksirana jednim krajem oko koga može da rotira (slika 7.7).



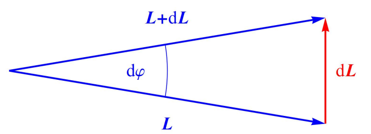
Slika 7.7: Jednostavni žiroskop.

Ako disk ne rotira i nema trenja $\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}$. Pošto nema rotacije sopstveni moment impulsa, na početku kretanja, je jednak nuli, a promena ukupnog momenta impulsa je $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$. Pravac momenta sile se ne menja tokom kretanja. Sistem (osovina) rotira oko tačke oslonca u vertikalnoj ravni (pada), dok disk ne udari u podlogu.



Slika 7.8: Jednostavni žiroskop koji precesira.

Ako disk rotira, sopstveni moment impulsa nije nula. Neka je na primer x-osa duž osovine, tada je $\boldsymbol{L}_0 = L_0\boldsymbol{e}_x$. Priraštaj momenta impulsa je $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$. Moment sile je ortogonalan na sopstveni moment impulsa, pa je i $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ ortogonalno na sopstveni moment impulsa. Sa druge strane moment sile je ortogonalan i na ugaonu brzinu, pa se ugaona brzina ne menja tokom kretanja. To onda znači i da se sopstveni moment impulsa ne menja tokom kretanja. To znači da je $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ uvek u horizontalnoj ravni, moment sile je uvek normalan na osovinu, a to dovodi do toga da osovina ne pada, nego precesira (rotira oko vertikalne ose koja prolazi kroz kraj osovine). Ovo je potpuno analogno kretanju loptice na konopcu, koja rotira.



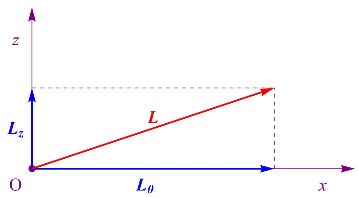
Slika 7.9: Promena momenta impulsa žiroskopa tokom precesije u ravni normalnoj na osu precesije.

Neka je ugao precesije $\mathrm{d}\varphi = \Omega\mathrm{d}t$. $|\boldsymbol{L}|\mathrm{d}\varphi = |\mathrm{d}\boldsymbol{L}|$, pa je $\mathrm{d}\varphi = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{L}|}{|\boldsymbol{L}|}$. Ugaona brzina precesije se dobija kada se ovaj izraz podeli sa $\mathrm{d}t$, odnosno $\Omega = \frac{M\mathrm{d}t}{I\omega\mathrm{d}t} = \frac{mgr}{I\omega}$.

Zanimljivo je da ugaona brzina precesije zapravo ne zavisi od mase diska. Zašto?

I Zemlja precesira, ali je period precesije oko 26000 godina.

Ipak analiza promene momenta impulsa žiroskopa tokom precesije nije sasvim tačna. Čim žiroskop počne da precesira pojavljuje se i vertikalna komponenta momenta impulsa koja odgovara precesiji. Ali ako je $\omega \gg \Omega$, onda je intenzitet ukupnog momenta impulsa pri-

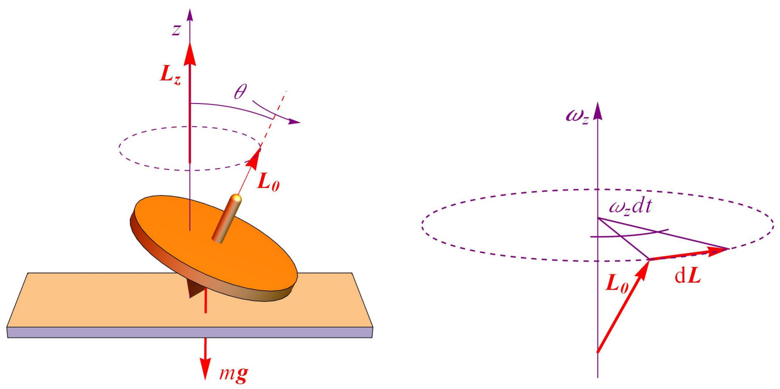


Slika 7.10: Promena momenta impulsa žiroskopa tokom precesije - potpuna slika.

bližno jednak intenzitetu sopstvenog momenta impulsa, ali i $\boldsymbol{L} \approx \boldsymbol{L}_0$. U slučaju da se ugaone brzine ne razlikuju mnogo onda se vidi i nutacija, odnosno kretanje ose gore-dole, tokom precesije.

Čigra

Svako masivno simetrično kruto telo koje rotira velikom ugaonom brzinom oko svoje ose simetrije naziva se čigra. Ogled pokazuje da ako je osa rotacije čigre nagnuta u odnosu na vertikalu onda čigra precesira, odnosno sopstvena osa rotacije rotira oko vertikalne ose. Što je sopstvena ugaona brzina veća to je ugaona brzina precesije manja. A to je isto kao kod žiroskopa.



Slika 7.11: Čigra.

Ukupan moment impulsa je $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 + \boldsymbol{L}_z$, gde je $\boldsymbol{L}_z$ moment impulsa koji potiče od precesije. Ako je osa rotacije osa simetrije tela, onda je $\boldsymbol{L}_0 = I\boldsymbol{\omega}$. Neka je sopstvena ugaona brzina mnogo veća od ugaone brzine precesije, $\omega \gg \omega_z$. Onda je i $L_0 \gg L_z$, odnosno $\boldsymbol{L} \approx \boldsymbol{L}_0 = I\boldsymbol{\omega}$.

U odnosu na tačku kontakta čigre i podloge, promena ukupnog momenta impulsa je $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t$. U odnosu na tačku kontakta moment sile reakcije podloge je jednak nuli, pa ako se sila trenja zanemari jedina sila čiji je moment različit od nule je sila Zemljine teže. Tada je $\mathrm{d}\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{L}$, pa je moment sile teže uzrok precesiranja čigre.

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{L}| = L\sin\theta\omega_z\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\omega}_z \times \boldsymbol{L}\mathrm{d}t.$$

Odnosno:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega}_z \times \boldsymbol{L}.$$

Moment sile utiče na brzinu precesije a ne na ugaono ubrzanje oko sopstvene ose. Da bi precesija bila stabilna intenzitet momenta sile mora da bude konstantan i da moment sile prati kretanje ose rotacije.

Primer 7.3

Naći ugaonu brzinu precesije čigre mase m, koja rotira velikom ugaonom brzinom ω oko ose simetrije. Težište je na rastojanju L od tačke oslonca.

Rešenje:

$$\boldsymbol{\omega}_z \times \boldsymbol{L} = \omega_z L\sin\theta = \omega_z I\omega\sin\theta,$$

Pošto je $|\boldsymbol{M}| = mgl\sin\theta$, onda je $\omega_z I\omega\sin\theta = mgl\sin\theta$. Konačno je:

$$\omega_z = \frac{mgl}{I\omega}$$

.

Zadaci

Dinamika krutog tela

7.1 Naći primer u kome rezultujući moment sila nije jednak momentu rezultujuće sile.

7.2 Naći primer u kome rezultujuća sila nije ortogonalna na rezultujući moment sila.

7.3 Da li je moguće da rezultujuća sila i rezultujući moment sila budu paralelni vektori?

7.4 Podaci na CD-u su zapisani u uskim kanalima oko 10^{-7}m dubokim. Kanal je na jednom disku u obliku spirale, od centra ka obodu diska, sa najmanjim poluprečnikom od 25 i najvećim od 58 mm. Podaci se očitavaju sa diska konstantnom brzinom od 1.25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (a) Kolika je ugaona brzina diska pri očitavanju podataka iz kanala najbližeg osi diska? A kolka kada se čita iz najdaljeg dela kanala? (b) Na jedan disk može najviše da stane 74 minuta muzike. Koliko bi bio dugačak kanal sa potpuno popunjenog diska ako bi se on ispravio? (c) Koliko je srednje ugaono ubrzanje pri čitanju diska, maksimalno popunjenog?

7.5 Šta je centar mase a šta težište tela?

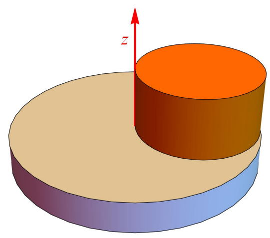
Moment inercije

7.6 Pokazati da je moment inercije tankog homogenog štapa, mase m i dužine L, u odnosu na osu koja je normalna na njega i prolazi kroz jedan od njegovih krajeva, jednak $\frac{1}{3}mL^2$.

7.7 Moment inercije homogene loptice od plastelina, poluprečnika R, je I. Loptica je spljoštena tako da se dobije homogen disk istog poluprečnika. Naći moment inercije diska izražen preko momenta inercije loptice.

7.8 Kako biste eksperimentalno odredili moment inercije nepravilnog tela u odnosu na unapred zadatu osu?

7.9 Naći moment inercije tela sa slike u odnosu na prikazanu z-osu. Telo je sastavljeno od dva homogena valjka, poluprečnika $2R$ i R, masa m_1 i



m_2, respektivno.

7.10 Dve paralelne ose prolaze kroz tačke A i B na krutom telu mase m. Centar mase tela nije ni u jednoj od ove dve tačke, niti je na zadatim osama. Ako je poznat moment inercije I_B, koliki je moment inercije I_A? Normalno rastojanje između osa je d.

7.11 Ako se led na polovima Zemlje potpuno istopi i voda homogeno rasporedi po planeti, kako će se promeniti dužina trajanja dana?

7.12 Učestvujete na takmičenju gde treba da konstruišete vozilo koje će se najbrže spustiti niz brdo. Pravila su stroga. Ograničena je masa vozila i masa vozača, nema sopstvenog pogona i karoserija je svima ista. Jedino imate slobodu da birate oblik točkova (svi su jednakih masa i poluprečnika). Kakav oblik ćete izabrati prstenast, diskove, šuplje sfere ili lopte?

7.13 U poznatom restoranu, tokom pauze, mladi kuvari su se zabavljali tako što su napravili trku jajima. Napravili su strmu ravan i puštali jaja da se kotrljaju niz nju. Kada je naišao šef kuhinje rekao je da ih neće kazniti ako mu odgovore da li puštanjem jaja da se kotrljaju mogu da odrede koje je jaje kuvano a koje sveže. Da li mogu?

7.14 Osno simetrično telo je takvo da su najudaljenije tačke od ose rotacije na rastojanju R. Da li možete da preraspodelite masu tela tako da mu moment inercije u odnosu na osu simetrije bude veći od mR^2?

7.15 Za ozbiljno bavljenje biciklizmom često je potrebno da imate bicikl što je moguće manje mase. Imate dve opcije koje daju istu masu biciklu. Lakši ram i teži točkovi ili obrnuto teži ram i lakši točkovi. Šta ćete izabrati i zašto?

7.16 Procenite vaš moment inercije u odnosu na osu koja je vertikalna osa simetrije tela. Stojite mirno ispruženih ruku (u odručenom stavu).

7.17 U odnosu na koju osu će puni valjak imati isti moment inercije kao šupji, istog poluprečnika i mase, koji rotira oko uzdužne ose simetrije?

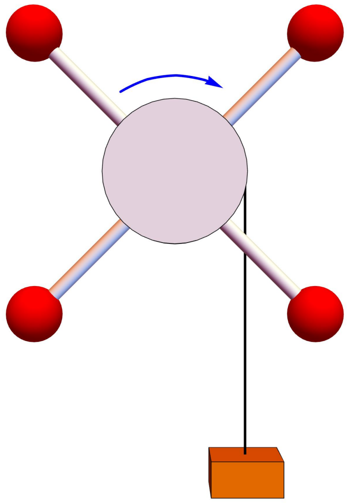
Kinetička energija rotacije

7.18 Lopta poluprečnika R rotira oko ose koja prolazi kroz njen centar, i ima kinetičku energiju T. Koliki poluprečnik treba da ima druga lopta, koja bi imala istu masu, rotirala istom ugaonom brzinom, a kinetička energija bi joj bila $3T$?

7.19 Dve identične kugle, A i B, su zakačene za kraj dvaju identičnih lakih žica. Drugi krajevi žica su namotani na kotur. Za kuglu A kotur je puni disk, a za kuglu B šuplji disk, iste mase i poluprečnika. Ako se kugle puste sa iste visine u istom trenutku, iz mirovanja, i pređu isti put (dok se žica odmotava), koja kugla će imati veću kinetičku energiju? Koja kugla će imati veću kinetičku energiju posle određenog vremena?

7.20 Točak A ima tri puta veći moment inercije od točka B, u odnosu na osu simetrije točka (normalnu na ravan u kojoj je točak). Ugaona brzina točka B je četiri puta veća. Koji točak ima veću kinetičku energiju i koliko puta?

7.21 U sistemu prikazanom na slici četiri identične kugle su pričvršćene na valjak uz pomoć četiri identične šipke. Na valjak je namotan laki konopac, na čijem kraju se nalazi teg. Kada se teg pusti, on dostigne brzinu v, spustivši se za rastojanje d. Kada se kugle pomere ka valjku, sve na isto rastojanje od ose i teg pusti da pada, kolika će mu biti brzina, kada se spusti za d, veća, manja ili ista kao u prvom slučaju? Objasnite.



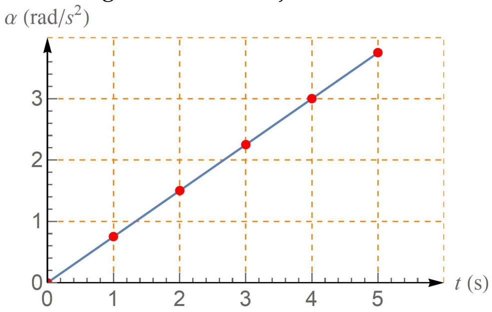
7.22 Maglina Rak je oblak usijanog gasa, oko 10 svetlosnih godina u prečniku, koji je ostao od eksplozije supernove. Maglina oslobađa energiju brzinom (energija u jedinici vremena) od oko 5×10^{31} W. Maglina dobija energiju od rotacione kinetičke energije brzo rotirajuće neutronske zvezde koja se nalazi u njenom centru. Neutronska zvezda se obrne jednom oko svoje ose za 0.0331 s i ovaj period se povećava za 4.22×10^{-13} s za svaku proteklu sekundu. (a) Ako je energija u jedinici vremena koju izgubi neutronska zvezda jednaka energiji koji oslobodi maglina, koliki je moment inercije neutronske zvezde? (b) Po teorijskim modelima masa neutronske zvezde u Maglini Raka je oko 1.4 puta veća od mase Sunca. Ako pretpostavimo da je zvezda homogena sfera koliki joj je poluprečnik? (c) Kolika je brzina tačke na ekvatoru neutronske zvezde? Kolika je ona u poređenju sa brzinom svetlosti? (d) Pretpostavite da je zvezda homogena i izračunajte njenu gustinu. Uporedite dobijenu gustinu sa gustinom granita i atomskog jezgra. Da li može da se kaže da je neutronska zvezda jedno ogromno atomsko jezgro?

Jednačina kretanja krutog tela

7.23 Na telo deluje jedna sila. Da li ona istovremeno da izazove i translatorno i rotaciono kretanje tela?

7.24 Dva tela su istog oblika, napravljena od istog materijala i oba su homogena. Jedno telo je po svakoj dimenziji dva puta veće od drugog. Ako na oba tela deluje isti moment sila, u kakvom odnosu će biti ugaona ubrzanja ova dva tela?

7.25 Motor pokreće disk, koji rotira. Na disku su senzori uz čiju pomoć je moguće meriti ugaono ubrzanje diska. Na slici su prikazani rezultati jednog testiranja i dato je kako ugaono ubrzanje zavisi od vremena.



(a) Koliko obrtaja disk napravi za 3 s? (b) Kolika je ugaona brzina diska posle 5 s? Kolika je ugaona brzina diska posle dva obrtaja?

7.26 Jegulja je zmijolika riba, dugog tela. Standardne dužine jegulje su oko 1 m i prečnik tela je oko 10 cm. Jegulje imaju mala usta, ali to nadoknađuju specijalnom tehnikom. Kada zagrizu plen zavrte se veoma brzo oko svoje ose i tako otkinu poveliko parče. Izmereno je da rotacija jegulje oko sopstvene ose može da bude i do 14 obrtaja u sekundi. (a) Istraživač je snimio jegulju koja se vrti dok otkida deo plena. Brzina kamere kojom je snimnjena jegulja je 120 slika u sekundi. Za koliki ugao se jegulja zarotirala između dve slike na snimku, ako rotira najvećom zabeleženom ugaonom brzinom? (b) U jednom trenutku izmereno je da jegulja napravi 14 obrtaja u sekundi u smeru kazaljke na satu, a 10 sekundi kasnije 8 obrtaja u sekundi u suprotnom smeru. Koliko je srednje ugaono ubrzanje jegulje za ovo vreme? (c) Jegulja ima kinetičku energiju dok se vrti brzinom od 14 obrtaja u sekundi. Kada bi se kertala pravolinijski sa istom kinetičkom energijom, kolika bi joj bila brzina? (d) Postoje vrste jegulja koje imaju istu masu, ali su četiri puta kraće i dvostruko deblje. Koliki im je moment inercije, u odnosu na uzdužnu osu tela, u poređenju sa standarnom jeguljom?

7.27 Pri naglom kočenju automobila prednji kraj mu se spusti a zadnji malo podigne. Zašto?

7.28 Rad je, po dimenzijama, proizvod sile i dužine. Moment sile je po dimenzijama proizvod sile i dužine. Da li su onda rad i moment sile ekvivalentne veličine?

7.29 Javio vam se čovek koji ima vrlo vrednu kuglu, ali ne zna da li je šuplja ili puna. Pokušavao je da kuckanjem odredi kakva je ali nije uspeo. Da li biste mogli da smislite jevtin ogled kojim bi se utvrdilo da li je kugla puna ili nije, a da pri tome ne oštetite kuglu?

7.30 Dve identične kugle, A i B, su zakačene za kraj dvaju identičnih lakih žica. Drugi krajevi žica su namotani na kotur. Za kuglu A kotur je puni disk, a za kuglu B šuplji disk, iste mase i poluprečnika. Ako se kugle puste sa iste visine u istom trenutku, koja žica će imati veću silu zatezanja?

7.31 Lopta se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi, brzinom v, koja glatko prelazi u strmu ravan, i lopta počinje da se penje do visine h_0 u odnosu na horizontalni deo. Kolika će biti visina ako se: (a) upotrebi lopta dva puta većeg prečnika, a iste mase; (b) upotrebi lopta dvostruko veće mase; (c) upotrebi lopta dvostruko većeg prečnika i mase; (d) lopta kreće tako da u podnožju strme ravni ima dvostruko veću ugaonu brzinu?

7.32 Točak se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Gledano iz inercijalnog sistema reference koji miruje (vezan je za podlogu) da li na točku postoji tačka čija je brzina vertikalna? Da li postoji tačka čija je brzina horizontalna i suprotna brzini centra mase? Da li se nešto menja u slučaju da točak proklizava?

7.33 Obruč, homogeni valjak, sfera i homogena lopta su istovremeno pušteni sa vrha strme ravni. Kojim redosledom će stizati do podnožja? Da li je važno da imaju iste mase? Iste poluprečnike?

7.34 Lopta se kotrlja bez klizanja, brzinom v, po horizontalnoj podlozi koja glatko prelazi u strmu ravan. U kom slučaju će se lopta popeti na veću visinu ako pri penjanju nastavi da se kotrlja bez klizanja ili ako je podloga glatka pa nema trenja?

7.35 Studentkinja sedi na stolici koja rotira. U široko odručenim rukama drži dva jednaka tega. Ako istovremeno ispusti tegove šta će se desiti sa njenom ugaonom brzinom?

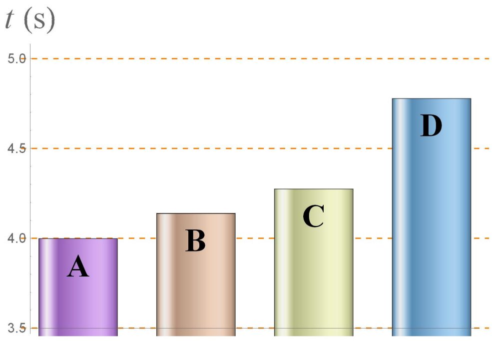
7.36 Studentkinja sedi na stolici koja rotira. U široko odručenim rukama drži dva jednaka tega. U jednom trenutku skupi ruke uz telo, i dalje držeći tegove. Šta će se desiti sa njenom ugaonom brzinom? Nema spoljašnje sile koja ima nenulti moment u odnosu na osu rotacije, tako da bi onda ugaono ubrzanje trebalo da bude jednako nuli. A kako se onda ugaona brzina menja? Objasnite.

7.37 Zamislite sledeći ogled. Kokošije jaje brzo rotira na stolu. Ako bi ste uspeli samo na kratko da ga zaustavite i pustite, sveže jaje bi nastavilo da rotira (manjom ugaonom brzinom), dok kuvano ne bi. Objasnite ovu razliku?

7.38 Asteroid leti pravo prema centru Zemlje i udara u nju na ekvatoru i prodre malo ispod površine gde se zaustavi. Kolika je masa asteroida (izražena preko mase Zemlje) ako se posle udara dužina dana povećala za 33.33%? Pretpostavite da je asteroid malih dimenzija u poređenju sa Zemljom, kao i da je Zemlja homogena.

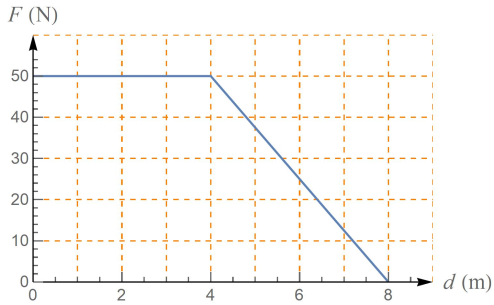
7.39 Dete stoji na obodu diska koji može da rotira oko vertikalne ose bez trenja. Dete u rukama drži tešku loptu (medicinku). Disk miruje, i dete miruje u odnosu na disk. U jednom trenutku dete baci loptu, horizontalno, u pravcu tangente na obod diska, brzinom v, u odnosu na zemlju. Kolika će biti ugaona brzina diska? Dečak miruje u odnosu na disk i posle bacanja lopte. Masa diska je M, poluprečnik R, masa dečaka m i masa lopte je m_l.

7.40 U ogledu su različita tela, iste mase 1.2 kg, puštana da se kotrljaju bez klizanja niz dugu rampu, nagibnog ugla 25°. Tela su homogena i to puni valjak, tanak šuplji valjak, lopta i sfera tankog zida. Mereno je vreme potrebno svakom telu da se spusti sa istog mesta do podnožja rampe. Rezultati su prikazani na grafiku.



(a) Na osnovu rezultata prikazanih na grafiku odredite kojim slovom je označeno koje telo. (b) Koje telo ima najveću ukupnu kinetičku energiju? (c) Koje telo ima najveću kinetičku energiju rotacije? (d) Koliki, najmanje, treba da bude koeficijent statičkog trenja da bi se sva tela kotrljala bez klizanja?

7.41 Testirate kako se ponaša mali (prečnika 35 cm) disk pod dejstvom dobro kontrolisane sile. Disk se nalazi na sredini horizontalno postavljene osovine za koju je vezan tako da može da rotira bez trenja. Disk sve vreme rotacije stoji vertikalno. Na obod diska je namotana lagana neistegljiva nit. Na slobodan kraj niti deluje sila koju možete dobro da podesite. Sila deluje tako da je nit sve vreme horizontalna. Pored intenziteta sile istovremeno merite dužinu puta koji slobodan kraj niti pređe i vreme delovanja sile. U početku disk miruje. (a) Prvo odredite moment inercije diska. Za to merenje sila je podešena na 30 N, a slobodan kraj niti pređe 8.25 m za 2.00 s. Koliki je moment inercije diska? (b) U drugom testu disk ponovo miruje i na njega deluje sila čiji je intenzitet prikazan na grafiku. Kolika je kinetička energija diska u trenutku kada slobodan kraj pređe 8 m? (c) Kolika je ugaona brzina diska u trenutku kada prestane delovanje sile (d=8 m)?



Žiroskop i čigra

7.42 Žiroskop precesira oko vertikalne ose. Kako će se promeniti ugaona brzina precesije ako se promeni samo jedna veličina, i to: (a) ugaona brzina rotacije se poveća dva puta; (b) masa se poveća dva puta; (c) moment inercije u odnosu na osu rotacije se poveća dva puta; (d) rastojanje od tačke oslonca do centra mase rotirajućeg diska poveća dva puta? Šta ako se sve prethodno navedene promene istovremeno naprave?

7.43 Žiroskop napravi pun krug precesirajući oko vertikalne ose za 5.2 s. Dva minuta kasnije on napravi pun krug precesirajći za 2.3 s. Ako niko nije dirao žiroskop šta se onda desilo?

7.44 Jednostavni žiroskop, kao na slici 7.7, precesira. Šta će se desiti ako na kraj osovine (najdalje od tačke oslonca) okačite neki teg?

7.45 U vatrenom oružju metak pri izlasku iz cevi rotira oko uzdužne ose. Kako ovakvo kretanje sprečava nekontrolisanu rotaciju metka oko proizvoljne ose, posle ispaljivanja?

7.46 Hablov teleskop mora da bude stabilan dok je usmeren ka cilju koji treba da bude posmatran duže vreme. Stabilizacija se vrši velikim brojem žiroskopa koji rotiraju brzinom od 19200 obrtaja u sekundi. Time se teleskop ne pomeri više od 2 milionita dela stepena. Jednostavan model ovih žiroskopa može da bude takav da su to cilindri tankih zidova, mase 2 kg i prečnika 5 cm, koji rotiraju oko uzdužne ose simetrije. Koliki bi trebalo da bude moment sile da bi izazvao precesiju od 1.0×10^{-6} stepeni za 5 sati posmatranja?

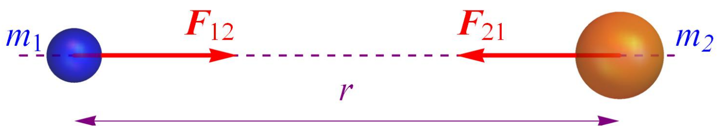
7.47 Ugaona brzina precesije žiroskopa na Zemlji je $0.5 rad/s$. Kolika bi ona bila na Mesecu?

8
Gravitacija

Gravitaciona sila

Od pamtiveka ljudi su posmatrali noćno nebo i pokušavali su da odgonetnu zakone kretanja nebeskih tela.

Njutn je ustanovio da je sila zbog koje tela slobodno padaju na zemlju, ista sila koja je uzrok kretanju planeta oko Sunca. Ovo je njegov ključni doprinos teoriji gravitacije (univerzalni zakon gravitacije). Pored toga, Njutn je shvatio da je otkrićem oblika gravitacione sile postalo moguće odgovoriti na mnogobrojna pitanja o kretanjima nebeskih tela. Zapisao je da je „svemir doznatljiv", odnosno možemo objasniti, razumeti i osvetliti mnogobrojne tajne svemira.



Slika 8.1: Gravitaciona sila.

Univerzalni zakon gravitacije pokazuje da se svaka dva tela u svemiru privlače međusobno. Sila je srazmerna proizvodu masa tela, a obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja među njima.

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r. \tag{8.1}$$

Gravitaciona sila je centralna.

Važna posledica oblika gravitacione sile je i da su sva velika nebeska tela gotovo sfernog oblika, što su veća to im je oblik, po pravilu, bliži idealnoj lopti. Delići tela pod dejstvom gravitacione sile teže da budu na najmanjem rastojanju do centra tela i tako se vremenom pomeraju (odnosno telo se deformiše) tako da telo postiže sferni oblik.

Gravitaciona sila nije jedina odgovorna za oblik tela. Ako se pogledaju relativna odstupanja od sfernog oblika za Mesec, Zemlju i Jupiter (tabela 8.1), vidi se da je Mesec najbliži idealnom sfernom obliku. Razlog za malo spljošteniji oblik Zemlje i malo više spljošteniji oblik Jupitera je centrifugalna sila, koja deluje na planete zbog rotacije oko sopstvene ose.

Brojčanu vrednost gravitacione konstante je prvi izmerio lord Kevendiš (1797–1798 godine) uz pomoć torzione vage. Dobio je vrednost koja je gotovo neverovatno bliska danas najpreciznije određenoj, $\gamma = 6.673 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

Kevendišova aparatura (osavremnjena) se sastoji od dva para masivnih kugli. Parovi su čvrsto povezani, kao na primer tegovi za vežbanje (slika 8.2). Oba para kugli mogu da rotiraju oko iste ose. Jedan par je okačen o tanko vlakno i može slobodno da rotira uvrćući vlakno. Veličina uvrtanja se meri na osnovu položaja odbije-

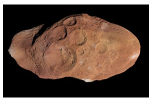
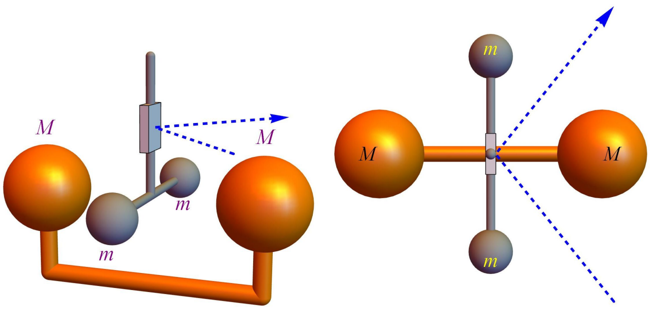
Telo		R_{ekv} (km)	Dim. (km)	%
Demos		6.2	15 × 12.2 × 11	
Fobos		11.27	27 × 22 × 18	
Amaltea		46.14		
Mesec		1738.1	1738.1 × 1736.0	0.12
Zemlja		6378.1	6378.1 × 6356.8	0.33
Jupiter		71492	71492 × 66854	6.5
Sunce		695700		

Tabela 8.1: Oblici i dimenzije nekih nebeskih tela. U trećoj koloni je dat ekvatorijalni poluprečnik kod sferi bliskih oblika. Dimezije duž tri ortogonalna pravca, za nepravilna tela, ili dva za pravilna su date u sledećoj koloni. U poslednjoj koloni je dato relativno odstupanje od sfernog oblika.



Slika 8.2: Kevendišov eksperiment. Sa desne strane je shematski prikaz aparature gledan odozgo.

nog svetlosnog (laserskog) snopa od ogledala koje je fiksirano na vlakno. Drugi par kugli može da se okreće oko vertikalne ose i postavi tako da je jedna kugla od fiksiranih bliža jednoj od kugli okačenih o vlakno. Zbog različitih rastojanja među kuglama gravitaciona sila izaziva uvrtanje vlakna, a veličina tog uvrtanja se može odrediti iz promene položaja lika odbijene svetosti.

I ako je gravitaciona interakcija najslabija interakcija u prirodi, ona je praktično jedina važna za kretanje i oblik nebeskih tela. Uz malo aproksimacija može da se kaže da je gravitaciona sila uredila vidljivi deo svemira onako kakvim ga vidimo.

Gravitaciona sila je odgovorna i za ogroman pritisak u unutrašnjosti zvezda. Ovaj pritisak stvara ogromnu temperaturu koja omogućava nuklearne reakcije.

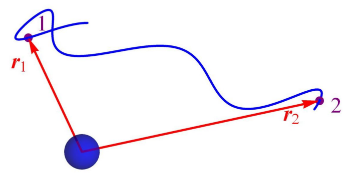
Gravitaciona potencijalna energija

Kao što je pokazano u odeljku 5, gravitaciona sila je centralna i samim tim je konzervativna. Rad koji je potrebno izvršiti da neko telo pređe iz tačke 1 u tačku 2, u gravitacionom polju je jednak:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r \mathrm{d}r,$$

kada se uvrsti izraz za silu, dobija se:

$$A_{12} = -\gamma m M_z \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\gamma m M_z}{r_2} - \frac{\gamma m M_z}{r_1}.$$



Slika 8.3: Kretanje tela u gravitacionom polju.

Pošto je rad jednak umanjenju potencijalne energije tela $A_{12} = U_1 - U_2$, onda je jasno da je gravitaciona potencijalna energija jednaka:

$$U = -\gamma \frac{m M_z}{r}. \tag{8.2}$$

Kada je rad gravitacione sile negativan onda se gravitaciona potencijalna energija povećava, odnosno telo se udaljava od izvora polja. Kada je rad pozitivan onda se potencijalna energija smanjuje, odnosno telo se približava izvoru polja.

Sila je gradijent potencijalne energije:

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\, U, \quad \text{odnosno} \;\; F_r = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}.$$

Gravitaciona sila je konzervativna, pa ako se telo kreće u gravitacionom polju, i pri tome nema drugih sila koje deluju na telo, onda je mehanička energija tela održana.

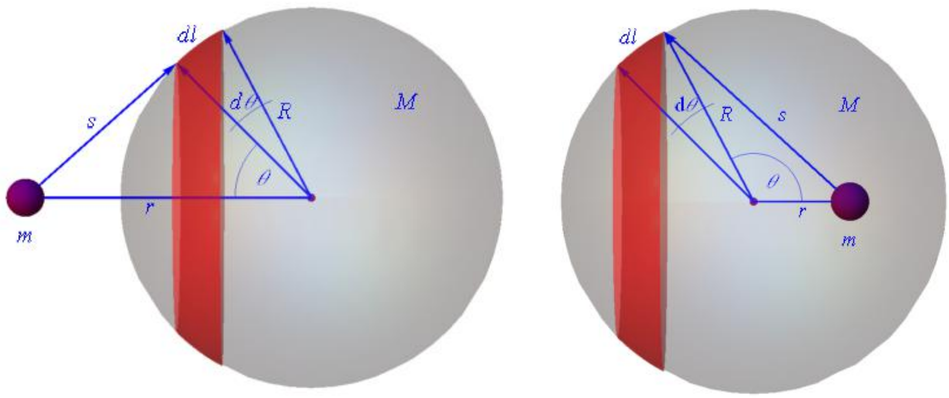
Dinamika tela u gravitacionom polju ne zavisi od toga da li se na potencijalnu energiju doda proizvoljna konstanta. To nam omogućava da biramo nulti nivo potencijalne energije onako kako nam najviše odgovara u konkretnom problemu.

Do sada su svi rezultati za gravitacionu silu i gravitacionu potencijalnu energiju dobijeni pod pretpostavkom da su dimenzije tela koja inetraguju zanemarljivo male. Ako tela nisu zanemarljivo malih dimenzija, ili ako su nepravilnog oblika, a pri tome i na malim međusobnim rastojanjima pitanje je u kojoj meri su gornji rezultati dobri.

Gravitaciona potencijalna energija interakcije sferno simetričnih tela

U slučajevima kada dimenzije tela nisu zanemarljive najjednostavnije je analizirati tela koja su homogena i simetrična. Neka dva tela interaguju. Jedno telo je homogena sfera, a drugo je mnogo manje od sfere, pa se može uzeti kao da je materijalna tačka. Masa sfere je M, malog tela m, i malo telo je na rastojanju r od centra sfere. Postoje dva moguća slučaja, malo telo je izvan sfere ili je unutar sfere. Jednostavniji put je prvo izračunati potencijalnu energiju, pa onda naći silu, kao gradijent potencijalne energije.

Izdelimo sferu na infinitezimalno tanke prstenove (kao na slici 8.4) mase dM. Svaki delić prstena je na istom rastojanju s od tela. Telo je



Slika 8.4: Gravitaciona potencijalna energija sfere i tela. Telo se nalazi van sfere (levo) i unutar sfere (desno).

homogeno pa je samim tim homogen i svaki njegov deo. Sabiranjem svih delića prstena koji se nalaze na istom rastojanju od tela dobija se masa celog prstena. Potencijalna energija prstena i tela je:

$$\mathrm{d}U = -\gamma \frac{m\mathrm{d}M}{s}.$$

Masa prstena je:

$$\mathrm{d}M = \sigma \mathrm{d}S = \frac{M}{4R^2\pi} 2(R\sin\theta)\pi R\mathrm{d}\theta = \frac{M}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

gde je σ površinska gustina prstena, dS njegova površina, $R\sin\theta$ je poluprečnik prstena, dok je $R\mathrm{d}\theta$ njegova širina.

Onda je:

$$\mathrm{d}U = -\gamma \frac{mM\sin\theta\mathrm{d}\theta}{s}.$$

Sa slike 8.4 se vidi da je po kosinusnoj teoremi:

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta.$$

Ako se nađe diferencijal ovog izraza, dobija se:

$$2s\mathrm{d}s = 2rR\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

pošto su r i R konstantni. Iz gornjeg izraza se dobija:

$$\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{s\mathrm{d}s}{rR}.$$

Dakle:

$$\mathrm{d}U = -\frac{\gamma mM}{2rR}\mathrm{d}s.$$

Ako se telo nalazi van sfere, onda su granice u kojima treba integraliti elementarnu potencijalnu energiju:

$$s \in [r - R, r + R].$$

$$U = \int_{r-R}^{r+R} \mathrm{d}U = -\frac{\gamma mM}{2rR}\left((r+R) - (r-R)\right) = -\gamma\frac{mM}{r}. \qquad (8.3)$$

Dakle, potencijalna energija je ista kao što bi bila za dve materijalne tačke masa m i M na rastojanju r. Izraz za potencijalnu energiju daje i potencijal polja koje stvara sfera mase M:

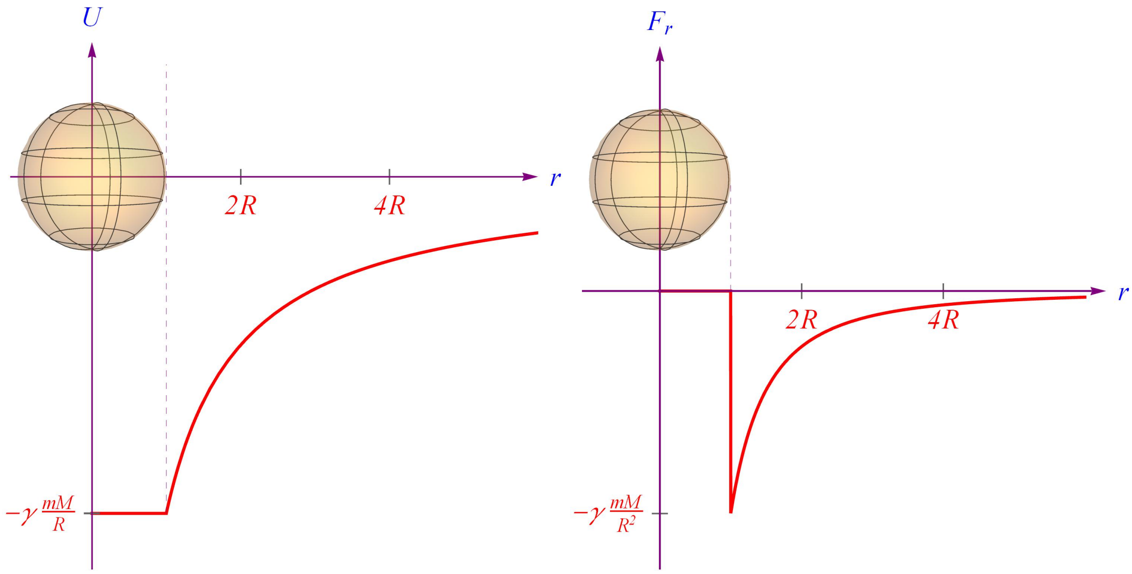
$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r}. \tag{8.4}$$

U unutrašnjosti sfere granice integracije su:

$$s \in [R - r, R + r].$$

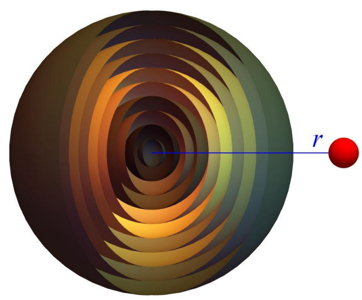
$$U = -\gamma \frac{mM}{2rR} 2r = -\gamma \frac{mM}{R}. \tag{8.5}$$

Potencijalna energija unutar homogene sfere je konstantna, a isto važi i za potencijal, $\varphi = -\gamma \frac{M}{R}$. To znači da je gravitaciona sila koja deluje na telo unutar homogene sfere jednaka nuli, kao i gravitaciono polje unutar sfere.



Slika 8.5: Gravitaciona potencijalna energija tela u polju homogene sfere (levo) i inetnzitet gravitacione sile na telo (desno).

Za homogenu loptu rezultat može da se dobije ako se ona podeli da niz infinitezimalno tankih, koncentričnih, sfera, svaka mase $\mathrm{d}m_i$ (slika 8.6). Rastojanje od centra svih sfera do tela je isto. Tako da je potencijalna energija lopte i tela zbir potencijalnih energija svih sfera i tela.



Slika 8.6: Gravitaciona potencijalna energija tela u polju homogene lopte. Ukupna potencijalna energija je zbir potencijalnih energija koncentričnih tankih sfera i tela van njih.

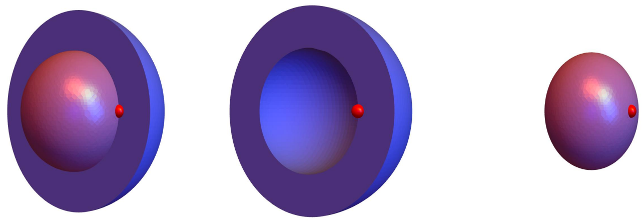
$$U_{lopta} = \sum U_{sfera} = -\gamma \frac{m}{r} \sum_i \mathrm{d}M_i.$$

Poslednja suma daje ukupna masu lopte, pa je:

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}, \quad F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \tag{8.6}$$

kao u slučaju dve materijalne tačke.

Unutar lopte svi delovi lopte koji su na većem rastojanju od centra nego telo ne utiču na silu (pošto je sila unutar sfere jednaka nuli i to ne zavisi od debljine sfere, slika 8.7). Jedino što utiče je deo lopte čiji je prečnik manji ili jednak rastojanju tela od centra (slika 8.7 desno).



Slika 8.7: Deo unutrašnjosti lopte koji deluje na telo.

Masa dela lopte koji deluje na telo na rastojanju r od centra lopte je $m_u = \rho\frac{4}{3}r^3\pi$, gde je ρ gustina lopte. Sila je tada:

$$F_r = -\frac{\gamma m m_u}{r^2},$$

odnosno,

$$F_r = -\frac{4}{3}\frac{\gamma m \pi r^3 \rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\gamma\pi m \rho r.$$

Kada se zameni gustina lopte, $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}r^3\pi}$, u gornju jednačinu, dobija se:

$$F_r = -\frac{\gamma m M r}{R^3}.$$

Potencijalna energija može da se nađe i kao rad potreban da telo sa površine lopte dođe u unutrašnjost na rastojanje r od centra lopte. Rad konzervativne sile je jednak umanjenju potencijalne energije (odeljak 5):

$$A = -\Delta U.$$

Za telo koje se kreće sa površine i spušta do rastojanja r od centra lopte promena potencijalne energije je $\Delta U = U(r) - U(R)$, dok je rad:

$$A = \int_R^r \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\gamma\frac{mM}{R^3}\int_R^r r\mathrm{d}r = -\gamma\frac{mM}{2R^3}\left(r^2 - R^2\right).$$

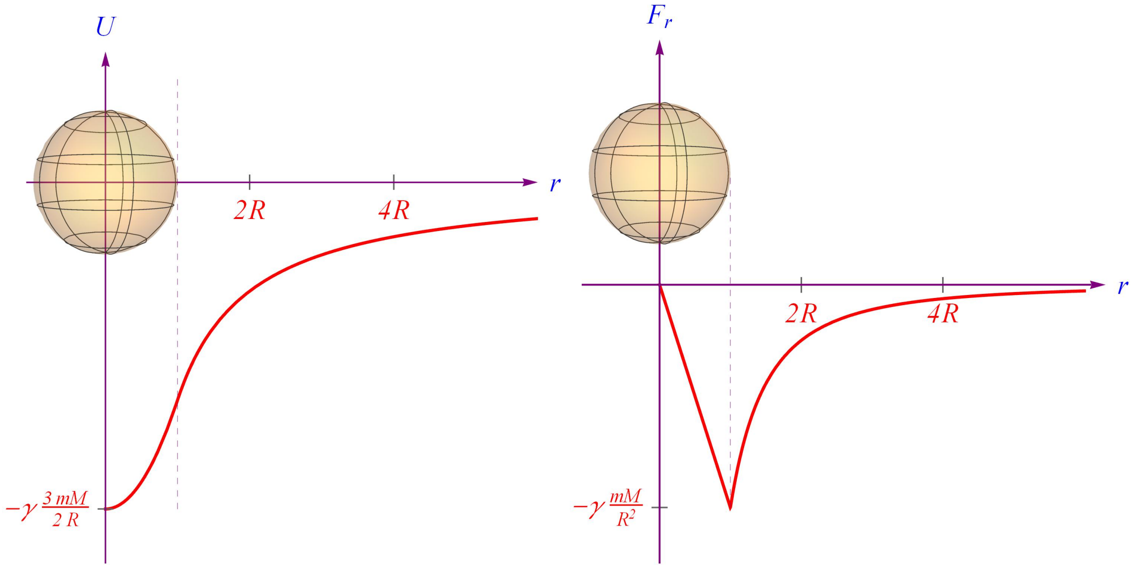
Tada je:

$$U(r) = U(R) - A = -\gamma\frac{mM}{R} - \gamma\frac{mM}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right),$$

$$U(r) = -\gamma\frac{mM}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right). \tag{8.7}$$

Potencijalna energija interakcije dve homogene sfere ili lopte je takođe jednaka potencijalnoj energiji dve materijalne tačke, koje imaju iste mase kao i odgovarajuća tela, a nalaze se u centrima sfera. Ovo se može pokazati, na primer preko polja. Polje koje stvara homogeno sfernosimetrično telo je van tela isto kao i polje koje stvara materijalna tačka iste mase kao i telo, koja se nalazi na mestu u kome je centar tela. To važi za oba tela. Ako su im polja ista kao i polja materijalnih tačaka, onda je i sila interakcije ista kao i za materijalne tačke.

U slučajevima kada su nehomogena i nepravilna tela u pitanju, na malim rastojanjima od njih određivanje polja ili sile može da bude vrlo složen zadatak. Ali kako rastojanja između tela rastu, tako je interakcija sve sličnija interakciji materijalnih tačaka.



Slika 8.8: Gravitaciona potencijalna energija tela u polju homogene lopte (levo) i inetnzitet gravitacione sile na telo (desno).

Sila Zemljine teže

Ako se uzme da je Zemlja približno sfernog oblika (videti tabelu 8.1), onda je sila na površini Zemlje koja deluje na telo mase m približno jednaka:

$$F = \gamma\frac{M_z m}{R_z^2}.$$

Masa Zemlje je konstantna, dok je poluprečnik približno konstantan. Sila koja deluje na telo na površini Zemlje može da se napiše kao:

$$F = mg, \quad \text{gde je} \ \ g = \frac{\gamma M_z}{R_z^2},$$

gravitaciono ubrzanje Zemlje.

Izraz za silu Zemljine teže je dobijen za bilo koju tačku na površini Zemlje. Međutim on je vrlo dobra aproksimacija i za ne tako male visine iznad površine Zemlje. Neka se telo mase m, nalazi na visini h iznad površine Zemlje. Na telo deluje gravitaciona sila, čiji je intenzitet:

$$F = \gamma\frac{M_z m}{(R_z + h)^2} = \gamma\frac{M_z m}{R_z^2}\frac{1}{(1+\frac{h}{R_z})^2}.$$

Za visine koje su male u poređenju sa poluprečnikom Zemlje ($h/R_z \ll 1$), izraz se može razviti u Tejlorov red:

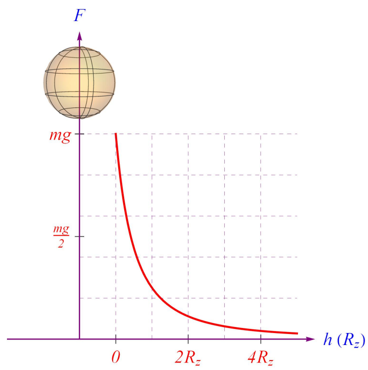
$$\frac{1}{(1+\frac{h}{R_z})^2} \approx 1 - 2\frac{h}{R_z} + \ldots.$$

Kada se ovaj rezultat uvrsti u izraz za silu, dobije se:

$$F = \gamma\frac{M_z m}{R_z^2}\left(1 - 2\frac{h}{R_z} + \ldots\right),$$

odnosno:

$$F = mg\left(1 - 2\frac{h}{R_z} + \ldots\right).$$



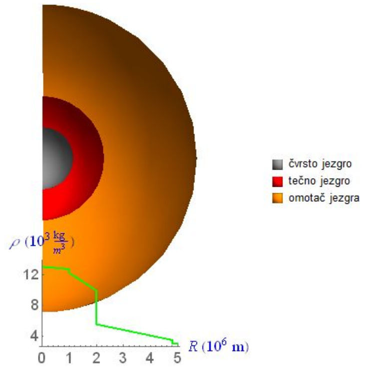
Slika 8.9: Sila Zemljine teže.

Sila Zemljine teže je uvek usmerena ka centru Zemlje, odnosno ima radijalni pravac, ka centru. U proizvoljnoj tački na površini Zemlje ovaj radijalni pravac je zapravo lokalna vertikala. Međutim u različitim tačkama lokalne vertikale nisu međusobno paralelne. Ako su tačke dovoljno bliske jedna drugoj onda su im lokalne vertikle skoro paralelne. Onda se za koordinatni sistem može uzeti Dekartov sistem, kome je z-osa duž lokalne vertikale. Tada je sila Zemljine teže, u referentnom sistemu u kome je z-osa usmerena naviše:

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z.$$

Ovaj izraz u sebi sadrži dve aproksimacije. Intenzitet sile je aproksimiran intenzitetom na površini Zemlje. Druga aproskimacija se odnosi na pravac sile. Uzeto je da su u svim tačkama sile međusobno paralelne. Drugim rečima, gravitaciono polje je aproksimirano homogenim gravitacionim poljem.

Intenzitet gravitacione sile Zemlje u zavisnosti od visine na kojoj se telo nalazi (normalno rastojanje do površine) vrlo brzo opada sa visinom, kao što se vidi na slici 8.9, ali za visine uporedive sa poluprečnikom Zemlje. Za visine koje su značajno manje od poluprečnika Zemlje aproksimacija konstantne gravitacione sile je dosta dobra. Ipak, i pored toga gravitacino ubrzanje na površini Zemlje se menja zbog nekoliko faktora, neidealnog oblika Zemlje, nehomogenosti (lokalni sastav Zemljine kore) i nadmorske visine. Čak i kad bi Zemlja bila idealna sfera, zbog svog sastava gravitaciono ubrzanje ne bi bilo isto u svim tačkama na istoj nadmorskoj visini.



Slika 8.10: Slojevi u unutrašnjosti Zemlje i njihove gustine.

Primer 8.1

Kako naći jednostavan argument da Zemlja nije homogena? Srednja gustina Zemlje je oko $6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Međutim gustine stena na površini su od 2-3.3$\times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. To znači da mora da postoji nešto mnogo gušće u dubini planete. A samim tim Zemlja nije homogena.

Kretanje u gravitacionom polju

Kretanje satelita - prva kosmička brzina

Neka jedno telo (mase m) kruži oko drugog (mase M) po kružnici poluprečnika r. Da bi mu orbita bila stabilna, u sistemu reference vezanom za njega gravitaciona sila mora da bude jednaka centrifugalnoj. Odnosno:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Odavde se dobija izraz za brzinu koju telo treba da ima da bi se našlo na stabilnoj kružnoj orbiti poluprečnika r:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}. \tag{8.8}$$

Dakle, ako je potrebno da se telo kreće po tačno određenoj kružnoj orbiti u gravitacionom polju, ono mora da ima tačno određenu brzinu, ako se sile trenja i otpora sredine mogu zanemariti. Takav je slučaj sa kretanjem satelita oko Zemlje.

Minimalna brzina koju telo treba da ima da bi se kretalo po kružnoj orbiti se dobija ako se uzme da je poluprečnik orbite jednak poluprečniku planete. Ova brzina se naziva prvom kosmičkom brzinom:

$$v_I = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}. \tag{8.9}$$

Ista brzina se dobija u slučaju kada se izračuna kojom brzinom treba baciti telo u horizontalnom hicu, pa da ono obiđe Zemlju.

Pravo bestežinsko stanje je stanje van gravitacionog polja.

Izraz za vezu između brzine satelita i poluprečnika putanje ima još interesantnih posledica. Kosmonaut u orbitalnoj stanici se kreće istim ubrzanjem kao i stanica, nema sile koja ga vuče da pritiska podloge, tako da se on u orbitalnoj stanici nalazi u prividno bestežinskom stanju.

Sa druge strane stanica koja se kreće oko Zemlje zapravo slobodno pada, jer se kreće isključivo pod dejstvom gravitacione sile. Ovo se vidi iz posmatranja problema kretanja satelita iz inercijalnog sistema. Ubrzanje stanice je paralelno sili koja je radijalnog pravca. Pošto deluje samo jedna sila, onda je i ubrzanje radijalno a to upravo centripetalno ubrzanje, koje je jednako gravitacionom.

Druga kosmička brzina

Neka se telo kreće u gravitacionom polju, i neka je gravitaciona sila jedina koja deluje na telo. Onda je mehanička energija tela održana.

$$E = const \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2,$$

za bilo koje dve tačke u prostoru 1 i 2.

Pod kojim uslovima telo može da napusti gravitaciono polje? U graničnom slučaju telo treba da se beskonačno udalji od izvora polja, ali tako da mu u beskonačnosti brzina teži nuli. Tada je ukupna mehanička energija tela, u beskonačnosti, jednaka nuli. Minimalna mehanička energija koju telo, mase m, treba da ima da bi napustilo gravitaciono polje tela mase M i poluprečnika R, je jednaka nuli, odnosno:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma\frac{mM}{R} = 0, \Rightarrow v_1^2 = \frac{2\gamma M}{R}.$$

Minimalna brzina je:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}. \tag{8.10}$$

Brzina v_{II} se naziva drugom kosmičkom brzinom ili brzinom odvajanja, i to je minimalna brzina kojom telo treba da se kreće da bi napustilo neko gravitaciono polje.

Veza poluprečnika putanje i perioda kretanja

Neka telo rotira u gravitacionom polju, po stabilnoj kružnoj putanji, poluprečnika r. Neka je vreme za koje telo opiše jedan pun krug T, period rotacije. Put koji telo pređe za to vreme je $s = 2r\pi$. Srednja brzina za jedan period je $v = \frac{2r\pi}{T}$. Ako se iskoristi brzina tela po stabilnoj kružnoj putanji dobija se:

$$T = 2r\pi\sqrt{\frac{r}{\gamma M}}, \quad \text{odnosno} \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}r^3. \tag{8.11}$$

Dakle, u gravitacionom polju koje stvara telo mase M, period obilaska tela po tačno određenoj kružnoj putanji zavisi isključivo od poluprečnika putanje.

Ukupna energija

Ukupna energija tela koje se kreće po kružnoj putanji u gravitacionom polju je:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\gamma M}{r} - \gamma\frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r}.$$

Zanimljivo je da je ukupna energija jednaka polovini potencijalne energije, u ovom slučaju.

Posmatranje kretanja galaksija je ukazalo na priličnu rupu u znanju o vasioni. Još 1933. godine je na osnovu izmerenih brzina rotacije zvezda u Mlečnom putu, kao i galaksija u jatima utvrđeno da mora da postoji još neka masa u vasioni koju ne vidimo a koja utiče na kretanje. Ta nedostajuća masa je nazvana *tamna materija*. Procenjeno je da oko 26.8 % mase u svemiru čini tamna materija. Godine 1990. je nepobitno uvrđeno da se svemir širi, način na koji se širi je ukazao da mora postojati još nešto neotkriveno što utiče na takvo širenje svemira, svi nepoznati uzroci su objedinjeni u jedan pojam, *tamna energija*. Procenjeno je da oko 68.3% svemira čini tamna energija. Sabiranje ova dva broja je lak ali pomalo neprijatan zadatak jer ukazuje na to koliko zapravo ne znamo o svemiru.

Keplerovi zakoni

Od pamtiveka su ljudi gledajući u noćno nebo prepoznavali objekte na njemu. Uočili su i pravilnost u kretanju većine nebeskih tela. Ipak prilično tačni zakoni kretanja nebeskih tela su otkriveni tek početkom sedamnaestog veka. Još u šesnaestom veku je shvaćeno da je Zemlja jedna od planeta koje se kreću oko Sunca (Kopernik, Bruno), a zatim, u sedamnaestom veku, da se na osnovu prividnih putanja planeta oko Zemlje može utvrditi putanja planeta oko Sunca (Brahe, Kepler).

Najznačajniji prodor u razumevanju kretanja nebeskih tela u Sunčevom sistemu, dao je Johan Kepler. On je posmatrajući kretanje nebeskih tela i analizirajući do tada prikupljene podatke uočio sledeće zakonitosti:

i Sve planete se kreću po eliptičnim putanjama sa Suncem u jednoj od žiža.

ii Vektor položja svake planete u odnosu na Sunce prebriše istu površinu u jednakim vremenskim intervalima.

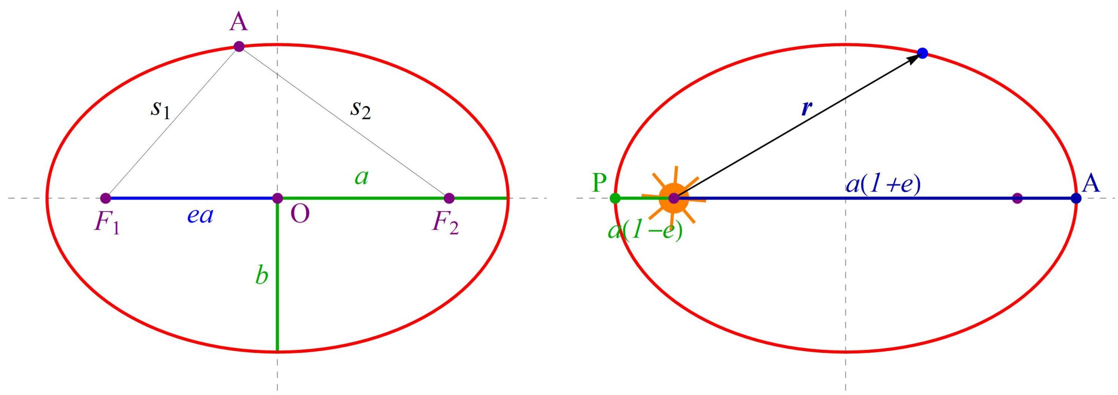
iii Kvadrat perioda obilaska planete oko Sunca je srazmeran kubu velike poluose planetine orbite.

Reč planeta potiče od grčkog *putnik* ili *lutalica*.

Ovo su znameniti Keplerovi zakoni. Treba voditi računa da je Kepler živeo pre Njutna, pa samim tim nije znao zašto se planete kreću na ovakav način, ali je sasvim tačno uočio pravilnosti.

Prvi zakon

Po prvom Keplerovom zakonu svaka planeta se kreće po eliptičnoj putanji, tako da je u jednoj od žiža Sunce. Prvi Keplerov zakon mora da se dobije iz drugog Njutnovog zakona za kretanje tela u gravitacionom polju, ako su oba zakona tačna.



Slika 8.11: Osnovni parametri elipse, i putanje planete oko sunca.

Neka se telo mase m kreće u gravitacionom polju nepokretnog tela mase M. Gravitaciona sila je jedina sila koja deluje na telo koje se kreće. Tela su na dovoljno velikom rastojanju, jedno od drugog, da se može uzeti da su materijalne tačke. Koordinatni sistem je vezan za telo mase M. Neka je početna brzina tela m jednaka v_0.

Gravitaciona sila je centralna, tako da su ukupna mehanička energija pokretnog tela i njegov moment impulsa u odnosu na ovako izabran koordinatni početak, konstantni. U početnom trenutku moment impulsa tela je vektor normalan na ravan koju određuju vektor početnog položaja tela i vektor početne brzine. S obzirom da je moment impulsa konstantan, onda je uvek normalan na istu ravan, u kojoj su trenutni vektor položaja tela i trenutna brzina, što znači da će se telo sve vreme kretati u ravni određenoj početnim uslovima.

Elipsa je kriva za koju važi da je za svaku tačku sa krive zbir rastojanja (s_1 i s_2 sa slike 8.11) do dve fiksirane tačke konstantan. Ove dve tačke (F_1 i F_2) se nazivaju žiže elipse. Centar elipse je tačno između žiža, na istoj pravoj. Najveće rastojanje od centra do krive je velika poluosa elipse, a, a najmanje je mala poluosa, b. Ekscentricitet elipse, e je po definiciji $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, i može da ima vrednosti iz intervala $e \in [0, 1]$. Sa slike se vidi da je rastojanje svake od žiža do centra elipse jednako ea. U specijalnom slučaju za kružnicu $e = 0$ ($a = b$). Planete se kreću po eliptičnim putanjama kojima je u jednoj od žiža Sunce. Tačka u kojoj je planeta najbliža Suncu naziva se *perihel*, a tačka u kojoj je najdalja od Sunca *afel*. Rastojanje planete do Sunca u perihelu je $a(1 - e)$, dok je u afelu $a(1 + e)$.

Za opisivanje kretanja tela u ravni mogu da se izaberu polarne koordinate. Brzina tela u polarnim koordinatama je (jednačina 2.16):

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

a njen kvadrat:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Osnovna jednačina dinamike je diferencijalna jednačina drugog reda. Bez obzira što je problem efektivno dvodimenzionalan (kretanje u ravni), njeno rešavanje je vrlo težak zadatak. Međutim, mogu da se iskorite zakoni održanja.

Neka su početni uslovi

$$\varphi(0) = 0,\ \rho(0) = \rho_0,\ v(0) = v_0,\ \boldsymbol{v}_0 \perp \boldsymbol{\rho}_0.$$

Mehanička energija i moment impulsa u polarnim koordinatama su:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho}, \quad L = m\rho^2\dot{\varphi}, \tag{8.12}$$

gde je $\alpha = \gamma m M$.

Iz druge jednačine može da se izrazi $\mathrm{d}t = \frac{m\rho^2}{L}\mathrm{d}\varphi$, i da se zameni u prvu. Tako se dobija diferencijalna jednačina, prvog reda, čijim rešavanjem se dobija jednačina putanje.

Ovo je jedan lep primer kako zakoni održanja mogu značajno da pojednostave problem. Korišćenjem zakona održanja dobijena je jednačina prvog reda, koju je mnogo lakše rešiti.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{m}{L^2}\left(2E\rho^4 + 2\alpha\rho^3 - \frac{L^2}{m}\rho^2\right).$$

Dobija se jednačina sa razdvojenim promenljivim, odnosno jednačina oblika:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = f(\rho), \quad \text{odnosno}, \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{f(\rho)} = \mathrm{d}\varphi,$$

gde je

$$f(\rho) = \sqrt{\frac{m}{L^2}\left(2E\rho^4 + 2\alpha\rho^3 - \frac{L^2}{m}\rho^2\right)}.$$

Jednačina se rešava neposrednom integracijom, i uz početne uslove rešenje je:

$$\rho(\varphi) = \frac{\rho_0}{c + (1 - c)\cos\varphi}, \tag{8.13}$$

gde je $c = \frac{\alpha}{m\rho_0 v_0^2}$. Ovo je opšti oblik krive drugog reda, odnosno konusnog preseka, a to može da bude elipsa, krug, parabola, hiperbola i prava.

U zavisnosti od vrednosti parametra a moguće su različite putanje tela.

- Za $c = 1$, $\rho(\varphi) = \frac{\rho_0}{c} = const$, a to slučaj kada se telo kreće po kružnici. Kada se uvrsti izraz za konstantu c dobija se brzina na stabilnoj kružnoj putanji poluprečnika ρ_0, odnosno prva kosmička brzina za rastojanje ρ_0 od izvora polja.

- Ako je $c \neq 1$ da bi putanja bila zatvorena, funkcija $\rho(\varphi)$ mora da bude konačna, za svaku vrednost ugla φ. Ako se fiksira c, vidi se da $\rho(\varphi)$ raste za tupe uglove, za koje je $\cos\varphi$ negativan. Očigledno $\rho(\varphi)$ ima maksimum za $\varphi = \pi$. Ako je maksimum konačan, onda je i funkcija za sve ostale vrednosti uglova konačna. Dakle uslov za zatvotrenu putanju je da za $\varphi = \pi$, ρ bude konačno i pozitivno, a to je ekvivalentno uslovu da $c + (1 - c) > 0$, odnosno $c > \frac{1}{2}$. Putanja je zatvorena linija u ravni, a to je elipsa. Iz uslova za c dobija se iraz $\frac{\gamma m M}{m\rho_0 v_0^2} > \frac{1}{2}$, odnosno $v_0^2 < \frac{2\gamma M}{\rho_0}$, dobija se da početna brzina mora da bude manja od druge kosmičke za rastojanje ρ_0 od izvora polja.

- Ako je $c = \frac{1}{2}$ onda je početna brzina tela jednaka drugoj kosmičkoj brzini $v_0 = v_{II}$, telo može da napusti gravitaciono polje, u beskonačnosti, i putanja više nije zatvorena. Jednačina putanje je u tom slučaju $\rho(\varphi) = \frac{2\rho_0}{1+\cos\varphi}$, što predstavlja jednačinu parabole u polarnim koordinatama.

- Ako je $c < \frac{1}{2}$, onda je početna brzina veća od druge kosmičke za tu orbitu, i putanja je otvorena i to je hiperbola.

Dakle, konačne jednačine kretanja tela u gravitacionom polju daju sve moguće putanje tela. Putanje su krive koje su konusni preseci: krug, elipsa, parabola i hiperbola. Kakva će putanja tela biti zavisi od početnih uslova (parametar c). Sa druge strane, ovim je pokazano da je prvi Keplerov zakon direktno dobijen iz drugog Njutnovog zakona i Njutnovog zakona gravitacije, što pokazuje da su međusobno saglasni.

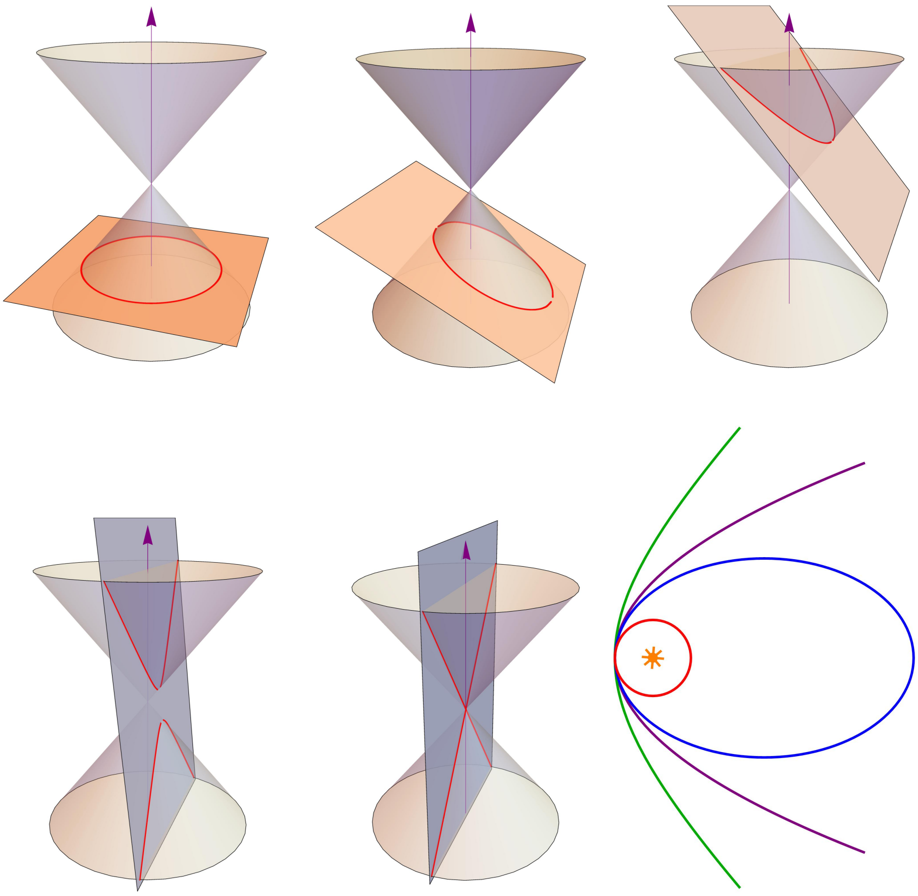
Izraz za ukupnu mehaničku energiju u polarnim koordinatama (8.12) može i drugačije da se grupiše. Izvod ugla po vremenu može da se izrazi preko momenta impulsa L, koji je konstantan, $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}$. Mehanička energija je onda:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2}\right) - \gamma\frac{mM}{\rho},$$

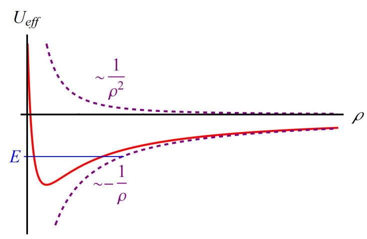
odnosno

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{L^2}{m\rho^2} - \gamma\frac{mM}{\rho}\right), \tag{8.14}$$

gde je izraz u zagradi efektivna potencijalna energija tela.



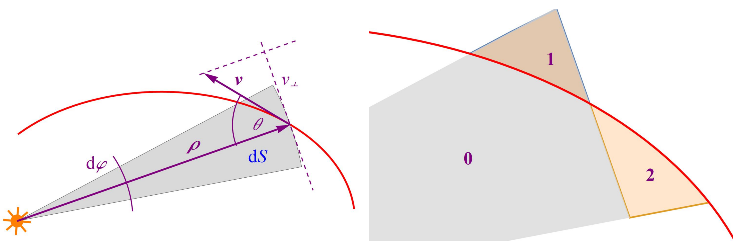
Slika 8.12: Moguće trajektorije tela u gravitacionom polju. Konusni preseci.



Slika 8.13: Efektivna potencijalna energija.

Neka je ukupna mehanička energija tela E, kao što je označeno na slici. Tada telo može da se kreće samo u oblasti u kojoj je rastojanje do izvora polja u intervalu $[\rho_{min}, \rho_{max}]$. Putanja je zatvorena, i to je elipsa za koju je $\rho_{min} = a(1-e)$, dok je $\rho_{max} = a(1+e)$. Specijalan slučaj kretanja po zatvorenoj putanji je slučaj kada je telo uvek na istom rastojanju od izvora polja, ρ_k, i tada se telo kreće po kružnici. Putanja je uvek zatvorena ako je ukupna mehanička energija negativna (finitno kretanje). Ako je ukupna mehanička energija pozitivna putanja će biti otvorena (infinitno kretanje).

Drugi zakon



Slika 8.14: Sektorska brzina.

U infinitezimalno kratkom vremenskom intervalu putanja tela je deo kružnice poluprečnika ρ. Površina površi koju vektor položaja prebriše za vreme dt je d$S = \frac{1}{2}\rho^2$dφ, što se vidi na slici 8.14. Kada se površina podeli sa dt dobija se:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{8.15}$$

Fizička veličina koja je jednaka površini koju vektor položaja prebriše u jedinici vremena naziva se *sektorska brzina*. Drugi Keplerov zakon onda glasi da je sektorska brzina svake planete konstantna.

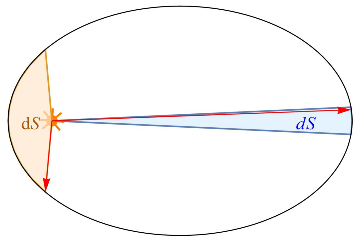
Neka je u bilo kojoj tački elipse brzina razložena na komponentu duž pravca $\boldsymbol{\rho}$ i normalno na taj pravac, i neka je normalna komponenta brzine $v_\perp = v\sin\theta$, (slika 8.14). Intenzitet pomeraja tela duž pravca normale za vreme dt je ρdφ (dužina luka poluprečnika ρ koji se vidi pod uglom dφ), pa je onda komponenta brzine $v_\perp = \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. Sektorska brzina može da se napiše kao:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\rho v_\perp = \frac{1}{2}\rho v\sin(\pi-\theta) = \frac{1}{2}\rho v\sin\theta.$$

Ugao θ je ugao između vektora $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{\rho}$ pa je:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{L}}{2m}. \tag{8.16}$$

Dakle, ako je moment impulsa tela konstantan onda je i sektorska brzina konstantna. Sa druge strane ako je sektorska brzina konstantna telo se kreće u ravni.



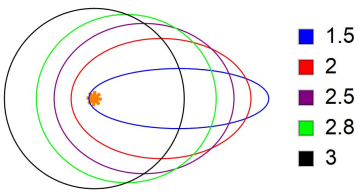
Slika 8.15: Kretanje sa konstantnom sektorskom brzinom.
Drugi Keplerov zakon važi za svaku centralnu silu.

Treći zakon

Za kružnu putanju tela u gravitacionom polju je pokazano ranije da je kvadrat perioda obilaska planete oko izvora polja proporcionalan trećem stepenu poluprečnika orbite. Kepler je pokazao da je za eleiptičnu putanju veza vrlo slična:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}a^3, \tag{8.17}$$

gde je M masa izvora polja, a a je velika poluosa elipse po kojoj se telo kreće.



Slika 8.16: Putanje koje tela obilaze za isto vreme. Velika poluosa je $a = 3$ u proizvoljnim jedinicama, veličina malih poluosa je data na slici.

Na slici 8.16 su prikazane različite putanje, ali svim putanjama su velike poluose jednake. Po trećem Keplerovom zakonu periodi obrtanja tela oko izvora polja će po svim ovim putanjama biti jednaki.

U trećem Keplerovom zakonu, za planete u Sunčevom sistemu, u konstantu proporcionalnosti ulazi masa Sunca. To bi bilo tačno da planete rotiraju oko centra Sunca, međutim one rotiraju oko centra mase sistema Sunce-planeta. U sistemu centra mase relativna čestica

Planete sa slike 8.16 se kreću različitim brzinama. Pošto im je period isti, put koji pređu se razlikuje. Put je obim elipse za šta nema analitičkog izraza, ali može da pomogne Ramanudžanova približna formula: $O \approx \pi(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)})$

koja ima redukovanu masu sistema rotira oko centra mase koji ima masu sistema. Masa sunca je oko 750 puta je veća od ukupne mase svega ostalog u Sunčevom sistemu, pa je onda redukavana masa za bilo koju planetu praktično jednaka masi planete, a ukupna masa sistema praktično jednaka masi Sunca. Postojanje planeta ipak jedva primetno utiče na kretanje Sunca.

Neka je neko masivno telo, zvezda na primer, centar sistema oko koga rotiraju značajno manja tela, planete, na primer. Svaka planeta rotira približno oko centra mase sistema zvezda-planeta, ako ima više planeta onda ta rotacija može da bude vrlo složena, mada vrlo teško primetna. Posmatrano sa strane, zvezda koja ima po neku planetu koja se kreće oko nje, podrhtava. Najosetljiviji teleskopi danas ipak mogu da registruju ovo *podrhtavanje* zvezda što ukazuje na prisustvo planeta oko njih.

Primer 8.2

Treći Keplerov zakon može da se izvede iz jednačine konusnih preseka.

Rešenje: U jednačini konusnih preseka je parametar c jednak $\frac{\gamma M}{\rho_0 v_0^2}$. Moment impulsa je konstantan, pa je jednak početnom momentu impulsa, $L = mv_0\rho_0$, odakle je $\rho_0 = \frac{L}{mv_0}$. Dalje, može da se pokaže da je ekscentricitet jednak $e = \frac{1-c}{c}$, odnosno da je $c = \frac{1}{1+e}$. Kada se izraz za c zameni u jednačinu kretanja, dobija se:

$$\rho(\varphi) = \frac{\rho_0(1+e)}{1+e\cos\varphi}.$$

Ako se u brojilac ovog izraza zamene izrazi za ρ_0 i e, dobija se:

$$\rho(\varphi) = \frac{L^2}{\gamma M m^2}\frac{1}{(1+e\cos\varphi)}.$$

Neka se u početnom trenutku telo nalazi najbliže izvoru polja (perihelu), odnosno $\rho_0 = a(1-e)$ i $\varphi = 0$:

$$a(1-e) = \frac{L^2}{\gamma M m^2(1+e)},$$

$$a(1-e^2) = \frac{L^2}{\gamma M m^2}.$$

Sa druge strane tokom jednog perioda telo opiše celu elipsu. Pa je iz drugog Keplorovog zakona:

$$\pi ab = \frac{L}{2m}T,$$

iz ove jednačine se izrazi $(L/2m)^2$ i uvrsti u prethodnu jednačinu:

$$a(1-e^2) = \frac{1}{\gamma M}\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}.$$

Iz veze za parametre elipse $b^2 = a^2(1-e^2)$, što kad se uvrsti u prethodnu jednačinu i sredi, dobija se:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}a^3.$$

Crne rupe

Izračunajmo drugu kosmičku brzinu za Sunce. Ako se uvrste vrednosti za masu i poluprečnik Sunca, dobija se oko $6 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. ($M_s = 2 \cdot 10^{30} kg$, $R_s \approx 7 \cdot 10^8 m$)

Srednja gustina Sunca je oko $1400 \frac{kg}{m^3}$. Znači da je gas u ovakvoj zvezdi gušći od vode.[1]

Ako se izraz za drugu kosmičku brzinu izrazi preko gustine Sunca dobija se:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M_s}{R_s}} = \sqrt{\frac{8\gamma\pi\rho}{3}} R_s.$$

Sunce je mala zvezda. Da li je za neke veće zvezde moguće da druga kosmička brzina bude veća od brzine svetlosti? Granica je $c = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$, odnosno:

$$R_S = \frac{2\gamma M}{c^2}.$$

Ovo je poznati izraz za takozvani *Švarcšildov radijus*. Za Sunce je Švarcšildov radijus oko 3 kilometra!

Dakle za neke zvezde je Švarcšildov radijus mnogo manji od veličine zvezde pa se ništa neobično ne očekuje. Ali ako bi postojalo telo, takvo da mu je Švarcšildov radijus veći ili jednak poluprečniku, onda bi se desile vrlo zanimljive stvari. Onda ni foton sa tog tela ne bi mogao da napusti njegovo gravitaciono polje, pa se ne bi ništa videlo što je unutar Švarcšildovog radijusa. Takvo telo bi apsorbovalo svu svetlost, pa bi bilo crno. Zato je nazvano *crna rupa* (1783!).

Površ poluprečnika jednakog Švarcšildovom radijusu se naziva *horizontom događaja*. Zbog nemogućnosti da ni jedan foton napusti crnu rupu, ne možemo mnogo toga da izmerimo osim mase, naelektrisanje ili momenta impulsa.

Konačno, u blizini horizonta događaja bi se ispoljili razni zanimljivi efekti:

- Došlo bi do crvenog pomaka svih elektromagnetnih signala, odnosno do smanjivanja frekvencije.
- Došlo bi do usporavanja vremena.
- Gravitaciona sila bi bila toliko jaka da bi svako telo rasturila do pojedinačnih atoma.
- Oko crne rupe postoji spirala gasa visoke temperature (10^6K) koji zrači X-zračenjem.
- Detekcija ovog zračenja je prilično siguran dokaz za crne rupe postoje.
- Najbolji kandidati za detekciju su dvojni sistemi crna rupa - zvezda.

[1] Temperatura na površini sunca je oko 5800 K, a u unutrašnjosti zvezde čak $1.5 \cdot 10^7$K. Na tim temperaturama mogu da postoje samo gasovi, nema tečnosti i čvrstih tela.

Neverovatno je da se dobija sasvim tačan izraz za Švarcšildov radijus, i ako u blizni velikih i masivnih zvezda ne važi Njutnova teorija gravitacije a i mora da se primeni specijalna teorija relativnosti. Korekcije na specijalnu i opštu teoriju relativnosti se potiru pa se dobija rezultat kao i u klasičnom slučaju.

Zadaci

8.1 Ne jednom od prethodnih testova jedan student je napisao da je jedini razlog zašto jabuka pada na zemlju, a ne da se Zemlja kreće naviše ka jabuci, u tome što Zemlja ima mnogo veću masu i zato mnogo jače privlači jabuku. Kako biste mu objasnili zašto nije dobio poene za ovakav odgovor?

8.2 Na osnovu osnovne jednačine dinamike ubrzanje je količnik sile i mase tela. Kako je onda gravitaciono ubrzanje isto za sva tela (u blizini Zemljine površi)?

8.3 Kada većom silom privlačite Sunce, danas u podne ili sinoć u ponoć?

8.4 Zemlja sve vreme privlači Mesec. Zašto onda Mesec zbog privlačenja ne udari u Zemlju?

8.5 Zašto dve sudarajuće galaksije mase oko 10^{11} puta veće od mase Sunca ne odvuku Zemlju iz sunčevog sistema?

8.6 Kolika je gravitaciona sila kojom interaguju dva automobila od 900 kilograma na rastojanju od 3 metra, ako automobile tretiramo kao materijalne tačke?

8.7 Ako možemo da tolerišemo do 10 % odstupanja od tačne vrednosti gravitacione sile, proceniti sa grafika 8.9 na kojim visinama je aproksimacija da je gravitaciona sila konstanta još uvek prihvatljiva.

8.8 Zemlja je najbliža Suncu u novembru a najdalja u maju. U kom mesecu Zemlja ima veću brzinu?

8.9 U kojoj tački eliptične putanje je ubrzanje planete najveće a u kojoj najmanje?

8.10 Kako bi izgledao treći Keplerov zakon kada bi gravitaciona sila bila obrnuto srazmerna trećem stepenu rastojanja, r^3? Da li bi to uticalo na prva dva zakona?

8.11 Kada se Halejeva kometa približava Suncu, jasno je da je gravitaciona sila privlači ka perihelu putanje (tačka najbliža Suncu). Koja sila gura kometu da opet ode daleko izvan Sunčevog sistema?

8.12 Mnogi ljudi misle da su astronauti u orbitalnim stanicama u bestežinskom stanju zato što su dovoljno daleko, pa je gravitaciono polje Zemlje zanemarljivo malo. Da li je to tačno? Na kom rastojanju od Zemlje treba da bude stanica da bi uticaj Zemljine gravitacije bio zanemarljiv?

8.13 Svemirski brod orbitira oko planete na kružnoj orbiti, sa periodom T. Koliki bi bio period broda ako bi planeta imala trostruko veću masu, a brod orbitirao na kružnoj putanji istog poluprečnika?

8.14 Planeta orbitira oko zvezde na kružnoj orbiti, sa periodom T. Koliki bi bio period planete ako bi planeta imala trostruko veću masu i kretala se po putanji istog poluprečnika?

8.15 Sunce privlači Mesec silom koja skoro dva puta jača od sile kojom ga privlači Zemlja. Zašto onda Mesec ne pobegne od Zemlje ka Suncu?

8.16 Za koji deo puta svemirskom brodu treba više goriva, kada leti sa Zemlje na Mesec, ili sa Meseca na Zemlju?

8.17 Planeta se okreće oko zvezde po kružnoj putanji. Koliki rad izvrši gravitaciona sila kojom zvezda privlači planetu tokom jednog perioda? Ako je putanja elipsa, onda se brzina planete menja tokom obilaska zvezde. Koliki onda rad izvrši gravitaciona sila zvezde?

8.18 Da li prva kosmička brzina zavisi od ugla pod kojim je telo ispaljeno? Da li se nešto menja ako uključimo otpor vazduha?

8.19 Projektil je ispaljen vertikalno naviše sa površine Zemlje. Gde će projektil završiti ako mu je ukupna mehanička energija (a) veća od nule; (b) manja od nule? Zanemariti uticaj ostalih planeta i Sunca u Sunčevom sistemu.

8.20 Kompanija za telekomunikacije je odlučila da postavi geostacionarni satelit koji bi sve vreme bilo tačno iznad Kragujevca. Da li je moguće da satelit ima takvu putanju na ovoj geografskoj širini?

8.21 Na slikama 8.8 i 8.9 su date gravitacione sile. Ako se u prvom slučaju uzme da je Zemlja lopta, zašto slike nisu iste?

8.22 Masa Marsa je 11% mase Zemlje. Zašto gravitaciona sila na pošini Marsa nije 11% sile Zemljine teže?

8.23 Masa Saturnovog velikog satelita Titana je oko 44 puta manja od mase Zemlje, a poluprečnik mu je oko 2.5 puta manji. (a) Koliko je gravitaciono ubrzanje na površini Titana? (b) Kolika je srednja gustina Titana? (c) Na osnovu gustine da li biste mogli da kažete nešto o sastavu Titana?

8.24 Jupiterov satelit Io je najaktivnije telo u Sunčevom sistemu po broju aktvnih vulkana. Tokom erupcije pojedini vlkani mogu da izbace materijal do 500 km iznad površine. Masa Ioa je 8.93×10^{22} kg, a poluprečnik mu je 1821 km. Na koju visinu bi dospeo materijal prilikom erupcije vulkana na Zemlji, ako bi bio izbačen istom brzinom kao na Iou?

8.25 NASA je 2004. godine lansirala satelit Aura koji ispituje Zemljinu atmosferu i klimu. Satelit se kreće po skoro kružnoj orbiti 705 km iznad površine Zemlje. (a) Koliki je period obilaska Aure oko Zemlje? (b) Kolika je brzina satelita?

8.26 Zamislite da ste kosmonaut koji se nalazi na Demosu, Marsovom satelitu. Prečnik Demosa je oko 12 km, masa mu je oko 1.5×10^{15} kg. Malo vam je dosadno pošto ste sami na satelitu, čekate ostatak ekipe. Nekim čudom imate teniski reket i lopticu. Smislite zanimljivu igru, tenis za jednog igrača. (a) Kolikom brzinom treba da bacite lopticu, tik iznad povšine, da bi ona obišla krug oko satelita i stigla do vas, da je onda udarite reketom? Da li je moguće baciti lopticu tom brzinom? (b) Koliko dugo bi trajao let loptice oko satelita? Da li bi na kraju ovaj sport mogao da ublaži vašu dosadu?

8.27 Međunarodna svemirska stanica napravi 15.65 obrtaja oko Zemlje za jedan dan. Ako je putanja približno kružnica na kojoj visini u odnosu na površinu Zemlje se stanica nalazi?

8.28 Pre nekoliko godina je otkrivena planeta (sa nadimkom vreli Jupiter) veličine Jupitera koja se kreće po skoro kružnoj orbiti oko svoje zvezde. Poluprečnik orbite je oko 9 puta manji od poluprečnika putanje Merkura oko Sunca. Planeta obiđe oko zvezde za 3.09 dana (zemaljskih). (a) Kolika je masa zvezde? (b) Kolika je brzina planete?

8.29 Gravitaciono ubrzanje na severnom polu Neptuna je 11.2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Masa Neptuna je 1.02×10^{26} kg i poluprečnik je 2.46×10^4 km. Period rotacije oko sopstvene ose je 16 sati. Kolikom silom Neptun privlači telo mase 3 kg na severnom polu, a kolikom na ekvatoru?

8.30 Brod kruži oko Zemlje na istoj orbiti kao i satelit. Oni se nalaze na dijametralno suprotnim stranama. Šta treba da uradi posada broda da bi mogli da pokupe satelit, a brod nema dovoljno goriva da stigne do satelita?

8.31 Pokazati da je moment impulsa tela u polarnim koordinatama jedak $m\rho^2\dot{\varphi}$.

8.32 Pokazati da se iz izraza za mehaničku energiju, 8.12 dobija difrencijalna jednačina prvog reda. Rešiti je neposrednom integracijom i pokazati da se dobija rešenje 8.13.

8.33 Pokazati da je uslov za infinitno kretanje da brzina tela bude veća od druge kosmičke brzine.

8.34 Ako je efektivna potencijalna energija definisana kao u jednačini 8.14, onda preostali član može da se nazove efektivnom kinetičkom energijom. Kolika je efektivna kinetička energija tela koje se kreće po kružnici?

8.35 Koristeći samo neku od definicija ravni iz matematike i činjenicu da je sektorska brzina konstantna pokažite da se u tom slučaju telo kreće u ravni.

8.36 Ako su periodi obrtanja tela po svim putanjama sa slike 8.16 jednaki, da li to znači da su im i srednje brzine jednake?

8.37 Šta bi se desilo sa putanjama planeta ako bi Sunce trenutno kolabiralo u crnu rupu? Da li bi promena trajektorije zavisila od rastojanja od Sunca?

8.38 Kada bi Sunce kolabiralo u crnu rupu, poluprečnika koji je jednak R_S, kolika bi mu bila gustina?

8.39 Prilično je izvesno da u centru Mlečnog puta postoji masivni objekat (crna rupa). Prsten sa delićima različitog materijala prečnika oko 11 svetlosnih godina rotira brzinom od oko 200 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. (a) Odredite masu objekta u centru naše galaksije. (b) Po važećim teorijama i eksperimentalnim rezultatima zvezda ne može da ima masu koja je veća od 50 masa Sunca. Da li je objekat u centru galaksije jedna zvezda? (c) Ako je u pitanju crna rupa koliki joj je Švarcšildov radijus? Uporedite rezultat sa srednjim poluprečnikom Zemljine orbite.

8.40 Astronomi su 2005. godine otkrili veliku crnu rupu u galaksiji Markarian 766. Oko ove crne rupe gomile materije se okreću sa periodom od 27 sati brzinom od 30000 km/s. (a) Koliko su daleko ove gomile materije od centra crne rupe? (b) Kolika je masa ove crne rupe? (c) Koliki je Švarcšildov radijus?

8.41 Kosmonauti u orbitalnoj stanici moraju stalno da kontrolišu masu tela. Kako kosmonauti mogu da izmere masu u bestežinskom stanju? Smislite neki način i objasnite ga.

8.42 Za planete Sunčevog sistema su u tabeli date velike poluose putanje i periodi rotacije oko Sunca.

Planeta	Velika poluosa a (10^6 km)	Period T (dani)
Merkur	57.9	88.0
Venera	108.2	224.7
Zemlja	149.6	365.2
Mars	227.9	687.0
Jupiter	778.3	4331
Saturn	1426.7	10747
Uran	2870.7	30589
Neptun	4498.4	59800

(a) Ako biste nacrtali grafik zavisnosti T^2 od a^3 dobili biste skoro pravu liniju. Zašto? Ipak ovaj grafik je prilično nepraktičan za upotrebu. (b) Nacrtajte grafik zavisnosti $\ln T$ (T u sekundama) od $\ln a$ (a u metrima). Da li će tačke opet biti skoro na pravoj liniji? Objasnite zašto. (c) Koliki će biti koeficijent pravca ove prave, na osnovu trećeg Keplerovog zakona? Koliki koeficijent ste vi dobili? (d) Koristeći odsečak na y-osi izračunajte masu Sunca. Da li vam se rezultat slaže sa poznatom vrednošću? (e) Asteroid Vesta je jedini asteroid vidljiv golim okom sa Zemlje (u idealnim uslovima). Period Veste je 1325.4 dana. Kolika je velika poluosa orbite? Na osnovu dobijenog rezultata nađite gde se Vesta nalazi u odnosu na ostale planete.

8.43 Za planete sfernog oblika mase M, zapremine V i poluprečnika R izvedite izraz kako gravitaciono ubrzanje na površini planete zavisi od srednje gustine i prečnika ($D = 2R$). U tabeli su date vrednosti gravitacionog ubrzanja i prečnika planeta u Sunčevom sistemu.

Planeta	D (km)	g (m/s^2)
Merkur	4879	3.7
Venera	12104	8.9
Zemlja	12756	9.8
Mars	6792	3.7
Jupiter	142984	23.1
Saturn	120536	9.0
Uran	51118	8.7
Neptun	49528	11.0

(a) Pretpostavite da su sve planete sfernog obllika. Izvedena jednačina za g vam pokazuje da je za konstantnu gustinu ubrzanje linerna funkcija prečnika. Nacrtajte grafik sa podacima iz tabele. Šta na osnovu njega možete da kažete o (srednjim) gustinama planeta? (b) Izračunajte srednje gustine za sve planete iz tabele. Poređajte planete po gustinama, od najmanje do najveće. (c) Znamo da Zemlja nije homogena, da je jezgro najgušće a ostali slojevi manje gusti. Pretpostavimo da je to slučaj i sa ostalim planetama. Kako ovaj podatak utiče na dosadašnju analizu? (d) Saturn ima istu srednju gustinu kao i Zemlja. Koliko je gravitaciono ubrzanje na površini Saturna, ako koristite izvedenu vezu g i D?

8.44 Pretpostavite da je putanja svih planeta u Sunčevom sistemu kružnica, i da su sve kružnice u istoj ravni. (a) Izrazite moment impulsa preko mase planete (M), poluprečnika putanje (R) i perioda obilaska oko Sunca (T). (b) Izračunajte momente impulsa svih planeta u Sunčevom sistemu, i saberite sve momente. Sabiranje ima smisla zbog pretpostavke da su sve putanje u istoj ravni. (c) Sunce se okrene oko svoje ose za 24.6 dana. Izračunajte moment impulsa Sunca. Uporedite rezultat sa ukupunim momentom svih planeta. Uporedite masu Sunca sa ukupnom masom svih planeta. Da li je sličan odnos masa i momenata impulsa? (d) Gustina Sunca nije konstantna, Sunce je najgušće u centru i gustina opada ka obodu. Da li smo zbog pretpostavke da je Sunce homogeno dobili veći ili manji moment impulsa nego što bi trebalo?

8.45 Prilikom ekspedicije u blizini crne rupe, sa broda je ispao delić koji podseća na teg. Dve kuglice spojene šipkicom od superčvrstog materijala. Masa kuglica je po 100 g. Centri kuglica su na rastojanju od 10 cm. Tegić je završio u blizini crne rupe, na 120 km od njenog centra. Crna rupa ima 5 puta veću masu od Sunca i Švracšildov radijus od 15 km. Osa (šipkica) tegića je duž radijalnog pravca ka centru crne rupe. (a) Kolika je razlika u silama koje deluju na dve kuglice? (A to je zapravo sila naprezanja šipke) (b) Da li je centar mase (ako računamo samo kuglice) na sredini rastojanja između njih? A težište?

8.46 Egzoplanete Mnogo planeta je pronađeno van Sunčevog sistema. Jedna od njih se okreće oko svoje zvezde čija je masa 0.7 M_s (mase Sunca). Masa planete je 7.9 m_z (masa Zemlje) a poluprečnik joj je 2.3 puta veći od poluprečnika Zemlje. Za planete ove veličine teorija daje vezu između gustine i sastava.

Gustina u jedinicama gustine Zemlje	Sastav
2–3	Uglavnom gvožđe
0.9–2	Gvozdeno jezgro i stenoviti omotač
0.4–0.9	Gvozdeno jezgro, sa stenovitim omotačem i nešto lakših elemenata (voda ili led)
<0.4	Vodonik i/ili helijum

(a) Na osnovu podataka datih u tabeli odredite najverovatniji sastav ove planete. (b) Odredite gravitaciono ubrzanje na površini planete. Uporedite ga sa g. (c) Posmatranja pokazuju da je orbita ove planete skoro kružna, i period obilaska oko zvezde je 9.5 dana, koliki je poluprečnik putanje planete? Uporedite ga sa poluprečnikom Zemljine putanje.

8.47 Saturn ima 100 puta veću masu od Zemlje, i 10 puta veće rastojanje od Sunca. Koliki je približno intenzitet gravitacione sile kojom Sunce privlači Saturn u poređenju sa silom kojom Sunce deluje na Zemlju?

8.48 Koliki je približno intenzitet ubrzanja Saturna u poređenju sa ubrzanjem Zemlje, pri rotaciji oko Sunca?

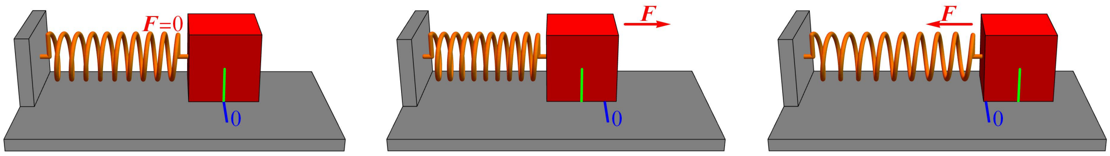
9
Periodično kretanje - Oscilacije

Vrlo važna vrsta kretanja je kretanje koje se posle određenog vremena ponavlja na isti način. Ovakvo kretanje se naziva *periodično kretanje*. Vreme potrebno telu da prvi sledeći put prođe kroz istu tačku, naziva se *period* kretanja. Primeri periodičnog kretanja su: kretanje planeta oko Sunca, kretanje tela okačenog o oprugu, kretanje klatna, kretanje elektrona u atomu, atoma u kristalu, deteta (i ne samo deteta) koje se ljulja na ljuljašci.

Da bi se telo kretalo periodično, na njega mora da deluje neka sila. Ako sila deluje tako da je uvek usmerena ka ravnotežnom položaju, odnosno ako se telo uvek kreće oko ravnotežnog položaja, po istoj putanji, onda se takvo periodično kretanje naziva *oscilatornim*.

Harmonijski oscilator

Najjednostavniji model koji opisuje oscilatorno kretanje je model *harmonijskog oscilatora* (HO).



Slika 9.1: Telo na opruzi.

Neka se telo mase m nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi. Neka je za telo zakačena laka opruga, čiji je drugi kraj učvršćen za vertikalni oslonac (slika 9.1). Kada je opruga neistegnuta, na telo ne deluje nikakva horizontalna sila, ($\boldsymbol{F} = 0$). Ako se opruga istegne, ili sabije, na telo će delovati sila koja će težiti da telo vrati u raznotežni položaj, odnosno u položaj u kome je opruga neistegnuta. Takva sila se naziva *elastična* sila. Može se pokazati da ako je elastična sila jedina sila koja deluje na telo u pravcu kretanja, onda telo osciluje oko ravnotežnog položaja. Ovakvo kretanje, kao što će biti pokazano, se dobro opisuje modelom harmonisjkog oscilatora.

Opruga je lagana, tako se njena masa može zanemariti u poređenju sa masom tela. Tokom kretanja opruga se isteže toliko da je sila u okviru Hukovog zakona, pa se može uzeti da je elastična sila sve vreme kretanja proporcionalna istezanju opruge. Podloga je glatka pa se sila trenja klizanja može zanemariti, kao i otpor vazduha. Ako je elastična sila jedina horizontalna sila, onda se duž pravca delovanja sile može postaviti koordinatna osa, x-osa na primer. Koordinatni početak može da bude u ravnotežnom položaju. Tada je projekcija sile na x-osu:

$$F_x = -kx, \tag{9.1}$$

gde je k koeficijent elastičnosti opruge, a x rastojanje tela do ravnotežnog položaja (elongacija). Koeficijent elastičnosti je praktično konstantan u domenu istezanja koje je u okviru Hukovog zakona. On zavisi od materijala od koga je opruga napravljena, kao i od geometrijskih karakteristika opruge.

Svaka sila koja je funkcija jedino rastojanja tela do ravnotežnog položaja se naziva *restituciona* sila. Sa druge strane neće svaka restituciona sila izazvati harmonijsko oscilovanje, već samo ona sila koja je linearna po rastojanju tela od ravnotežnog položaja. Elastična sila je restituciona.

Osnovna jednačina dinamike ima komponentu samo duž x-ose:

$$ma_x = -kx, \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \tag{9.2}$$

odnosno, kada se cela jednačina podeli masom tela:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{9.3}$$

Koeficijent ω^2 je uvek pozitivan, a fizička veličina ω se naziva kružna frekvencija oscilovanja. Dobijena diferencijalna jednačina je jednačina kretanja harmonijskog oscilatora. To je homogena, linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Red jednačine određuje najveći red izvoda u njoj, to je ovde drugi izvod. Jednačina je linearna zato što je linearna po svim izvodima i funkciji (nema članova na primer koji su proporcionalni kvadratu prvog izvoda). Svi koeficijenti uz izvode i funkciju su konstantni i konačno homogena je pošto ne postoji član koji eksplicitno zavisi od promenljive (u ovom slučaju vremena).

Ovakve jednačine se rešavaju tako što se pretpostavi rešenje. Potrebno je uzeti funkciju koja je proporcionalna svojim izvodima. Najopštija takva funkcija je eksponencijalna. Dakle, uzima se da je $x(t) = e^{\lambda t}$, i zameni se u diferencijalnu jednačinu 9.3. Posle izračunavanja izvoda, dobija se algebarska jednačina:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0, \quad e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0.$$

Pošto eksponecijalna funkcija nije nikada jednaka nuli, onda je rešenje:

$$\lambda^2 = -\omega^2,$$

odnosno

$$\lambda = \pm i\omega. \tag{9.4}$$

Dobijena su dva čisto kompleksna rešenja, što je posledica činjenice da je koeficijent $\frac{k}{m}$ pozitivan. Opšte rešenje jednačine 9.3 je linearna akombinacija pojedinačnih rešenja 9.4:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \tag{9.5}$$

gde su c_1 i c_2 kompleksne konstante[1].

[1] Može se pokazati da su konstante međusobno kompleksno konjugaovane, $c_2 = c_1^*$

Ako se iskoristi Ojlerova formula za kompleksne brojeve:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t),$$

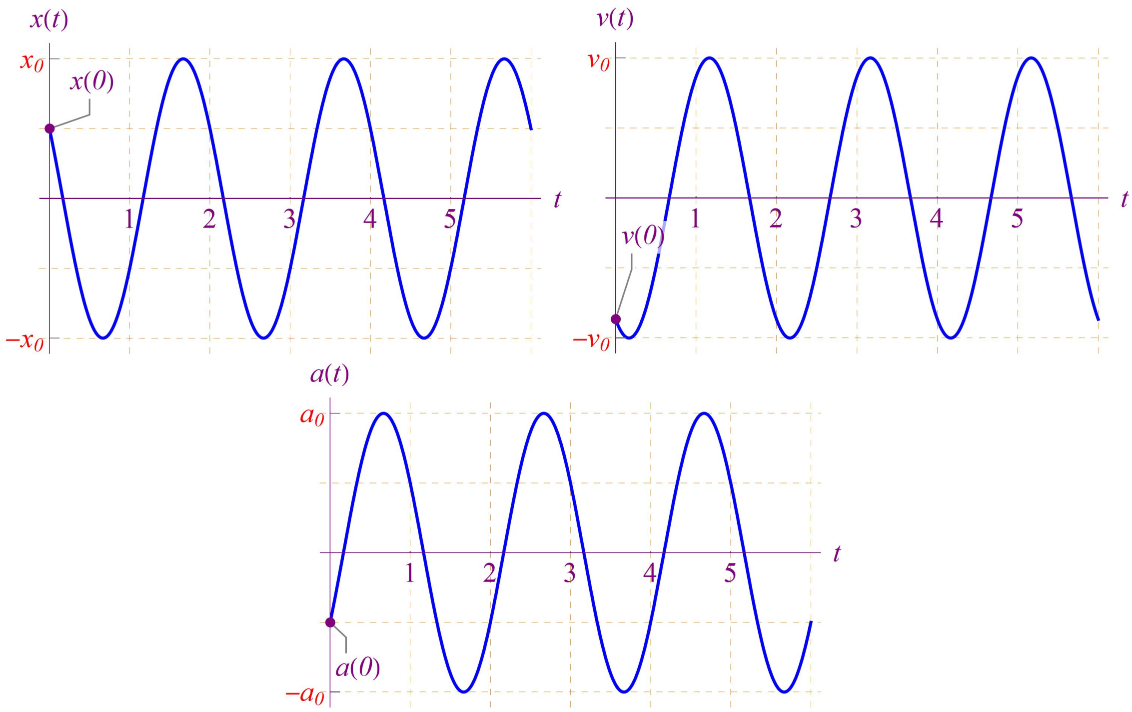
i to uvrsti u opšte rešenje, dobija se:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \tag{9.6}$$

gde su A i B, ovog puta, realne konstante. Dobijeno rešenje je očigledno periodična funkcija vremena, period je $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Može se pokazati da se iz oblika 9.6 dobija ekvivalentan oblik:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{9.7}$$

gde su nove konstante amplituda oscilovanja, x_0, i početna faza, φ_0. Amplituda oscilovanja je najveće rastojanje tela od ravnotežnog položaja tokom kretanja, dok je početna faza određena položajem tela i njegovom brzinom u početnom trenutku.



Slika 9.2: Elongacija, brzina i ubrzanje tela koje osciluje.

Diferenciranjem po vremenu jednačine 9.7 dobijaju se izrazi za brzinu i ubrzanje tela:

$$v(t) = -\omega x_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{9.8}$$

$$a(t) = -\omega^2 x_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0\right). \tag{9.9}$$

Iz jednačina 9.8 i 9.9 se lako vidi da je maksimalna brzina $v_0 = \omega x_0$, dok je maksimalno ubrzanje $a_0 = \omega^2 x_0$. Obratiti pažnju da x_0, v_0 i a_0 nisu početna elongacija, početna brzina i početno ubrzanje.

Amplituda i početna faza se mogu izračunati iz početnih uslova. Početni položaj tela i početna brzina su:

$$x(0) = x_0 \cos\varphi_0,$$

$$v(0) = -\omega x_0 \sin \varphi_0.$$

Ako se podele ove dve jednačine, dobija se:

$$\frac{v(0)}{x(0)} = -\omega \operatorname{tg} \varphi_0,$$

odnosno:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v(0)}{\omega x(0)}\right). \tag{9.10}$$

Iz jednačina za početni položaj i brzinu mogu da se izraze sinus i kosinus početne faze, kvadriraju i saberu, pa se dobija izraz za amplitudu:

$$x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2} = x_0^2. \tag{9.11}$$

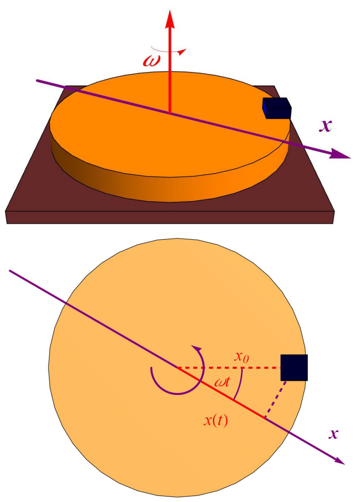
Dva specijalna slučaja za početne uslove su prikazana u tabeli:

Tabela 9.1: Specijalni slučajevi početnih uslova za harmonijski oscilator

	(a)	(b)
φ_0	0	$\pm\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	$x_0 \cos(\omega t)$	$\mp x_0 \sin(\omega t)$
$x(0)$	x_0	0
$v(0)$	0	$\mp \omega x_0$

Slučaj pod (a) odgovara kretanju pri kome telo kreće iz amplitudnog položaja bez početne brzine, dok u slučaju pod (b) telo kreće iz ravnotežnog položaja, početnom brzinom v_0, na jednu ili drugu stranu od ravnotežnog položaja (otud $\mp$).

Postoji analogija između rotacionog kretanja oko nepokretne ose i oscilatornog kretanja duž jednog pravca. Neka je telo nepokretno u odnosu na disk koji rotira oko vertikalne ose (slika 9.3), konstantnom ugaonom brzinom. Neka je rastojanje tela do ose rotacije x_0, i neka je x-osa horizontalna, i nepokretna (ne rotira sa diskom). Koordinata $x(t)$ tela je projekcija vektora položaja tela na x-osu. Tada je $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. Ova analogija može da razjasni korišćenje termina kružna frekvencija kod oscilatornog kretanja.



Slika 9.3: Analogija sa rotacionim kretanjem.

Energija harmonijskog oscilatora

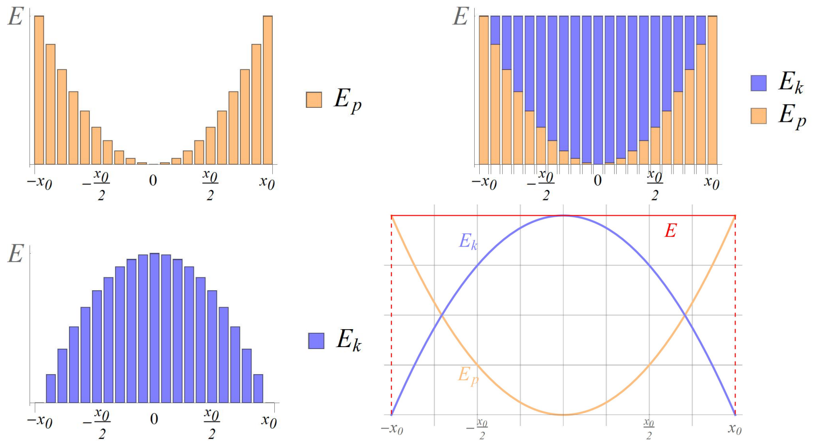
Ranije je pokazano da je elastična sila konzervativna, i da je odgovarajuća potencijalna energija $E_p = k\frac{x^2}{2}$. Ako se zanemari trenje između tela i podloge, onda je mehanička energija oscilatora konstantna. Kada se izrazi za $x(t)$ (jednačina 9.7) i $v(t)$ (9.8) uvrste u izraze za kinetičku i potencijalnu energiju, dobija se:

$$E_p = \frac{k}{2} x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \tag{9.12}$$

$$E_k = \frac{m}{2}\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \tag{9.13}$$

Očigledno je da je ukupna mehanička energija konstantna:

$$E = E_p + E_k = \frac{kx_0^2}{2}\Big(\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)\Big) = \frac{kx_0^2}{2}. \tag{9.14}$$

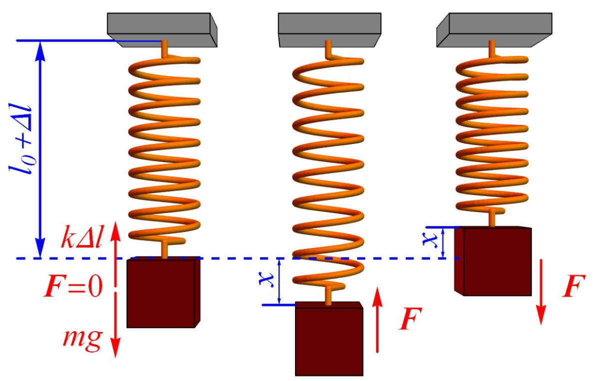


Slika 9.4: Energija harmonijskog oscilatora.

Na prvoj slici 9.4 je prikazana potencijalna energija harmonijskog oscilatora u nekoliko položaja tela, pod pretpostavkom da telo kreće iz amplitudnog položaja bez početne brzine. S obzirom da je mehanička energija konstantna, kinetička energija se dobija dopunjavanjem do mehaničke, što je predstavljeno plavim stupcima na slici 9.4. Plavi stupci predstavljaju vrednosti kinetičke energije u izabranim položajima tela, pa kinetička energija izgleda kao na trećoj slici 9.4. Dakle, iz činjenice da je mehanička energija konstantna i da je poznata zavisnost potencijalne energije od elongacije, lako se dobija oblik kinetičke energije, četvrta slika 9.4.

Primeri: Vertikalni oscilator

Ako se lagana opruga sa telom na jednom kraju, okači tako da vertikalno visi, dobija se vertikalni oscilator. Za razliku od horizontalnog slučaja, gde je ravnotežni položaj bio položaj u kome je opruga neistegnuta, u vertikalnom slučaju pod dejstvom gravitacione sile na telo, opruga se istegne. Ravnotežni položaj je položaj u kome je rezultujuća sila jednaka nuli, a to je položaj u kome je intenzitet gravitacione sile jednak intenzitetu elastične sile. Neka je Δl istezanje usled delovanja gravitacione sile, onda je $k\Delta l = mg$.



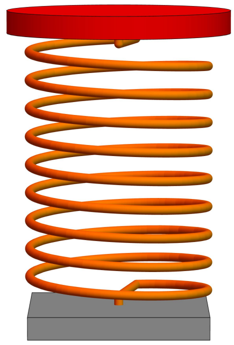
Slika 9.5: Vertikalni harmonijski oscilator.

Jednačina kretanja za oscilator je:

$$m\ddot{z} = -k(\Delta l + z) + mg = -kz, \tag{9.15}$$

gde je z rastojanje do razvnotežnog položaja. Vidi se da je jednačina ista kao u horizontalnom slučaju, samo što $z = 0$ ne odgovara neistegnutoj opruzi.

Na isti način se dobija jednačina kretanja i za telo koje je na vrhu opruge, kao što je prikazano na slici 9.6.



Slika 9.6: Vertikalni harmonijski oscilator sa telom na vrhu.

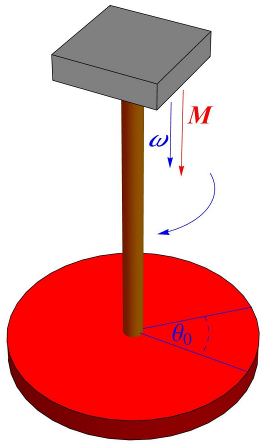
Primeri: Torziono klatno

Homogeni masivni disk, mase M, je fiksiran za elastični štap, koji je drugim krajem fiksiran za nosač, kao što je prikazano na slici 9.7. Neka se disk zarotira za neki ugao, θ_0 na primer, oko vertikalne ose koja je duž štapa, tako da se pri tome štap malo uvrne. Može se pokazati da na sistem deluje sila čiji je moment jednak $M = -\kappa\theta$, gde je θ ugao uvrtanja, a κ torziona konstanta. Jednačina kretanja sistema je tada:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa\theta,$$

odnosno:

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I}\theta.$$



Slika 9.7: Torziono klatno.

Dobijena jednačina je istog tipa kao i jednačina za harmonijski oscilator, pa je i rešenje istog oblika:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

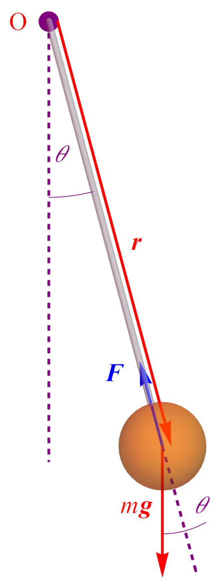
gde je $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$.

Male oscilacije

Neka na telo deluje sila koja teži da ga vrati u ravnotežni položaj, odnsono u položaj u kome je sila jednaka nuli. Ako se za mala pomeranja tela od ravnotežnog položaja jednačina kretanja svodi na jednačinu harmonijskog oscilatora, onda se u tom slučaju govori o malim oscilacijama tela. Tačna jednačina kretanja tela, za proizvoljna pomeranja ne mora da bude jednačina harmonisjkog oscilatora.

Jednostavno (matematičko) klatno

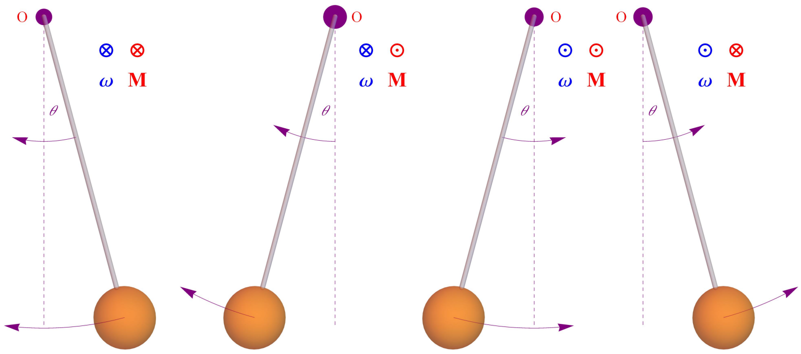
Jednostavno (matematičko) klatno je sistem koji se sastoji od masivnog tela koje je okačeno o neistegljivu dugačku nit. Dužina niti je značajno veća od dimenzija tela, pa se može uzeti da je telo materijalna tačka. Masa tela je značajno veća od mase niti, pa se može uzeti da je masa niti zanemarljivo mala.



Slika 9.8: Jednostavno klatno.

Na telo deluju gravitaciona sila i sila zatezanja. Ako se momenti sila računaju u odnosu na tačku vešanja niti, onda je moment sile zatezanja jednak nuli, pošto je ona kolinearna sa vektorom položaja tela (slika 9.8).

Moment inercije tela u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja je $I = mL^2$, a moment gravitacione sile, u odnosu na istu tačku



Slika 9.9: Jednostavno klatno, moment gravitacione sile i ugaona brzina.

je $\boldsymbol{M}_g = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_g$. Intenzitet momenta je $M_g = mgL\sin\theta$, gde je θ ugao otklona klatna. Jednačina kretanja klatna je:

$$I\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta,$$

odnosno:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I}\sin\theta = \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2}\sin\theta = \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Znak - u prvoj jednačini potiče od toga što moment gravitacione sile uvek teži da smanji ugao otklona. Na slici 9.9 su prikazani moment gravitacione sile i ugaona brzina klatna. Vidi se da je moment gravitacione sile uvek tako usmeren da teži da vrati telo u ravnotežni položaj. Dobijena jednačina očigledno nije jednačina harmonijskog oscilatora. Ipak, ako se uzme da su uglovi otklona tokom kretanja mali, onda je:

$$\sin\theta \approx \theta,$$

i tada se dobija jednačina za harmonijski oscilator:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{9.16}$$

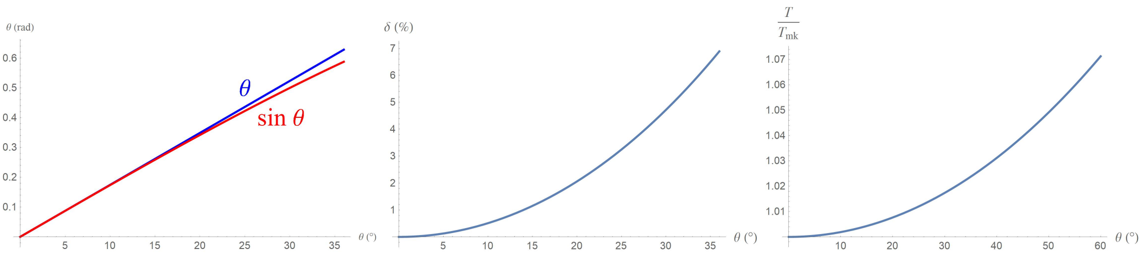
Kružna frekvencija klatna je $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, a period oscilovanja je $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Period ne zavisi od mase tela. Izrazi za period i kružnu frekvenciju su tačni samo za male uglove otklona. Šta smatramo malim uglovima zavisi i od toga koliku tačnost želimo da postignemo. Iz uslova aproksimacije se vidi da su mali uglovi oni za koje je sinus ugla približno jednak uglu (u radijanima). To je vrlo dobra aproksimacija za uglove manje od 10 stepeni. Na slici 9.10 je prikazan ugao u radijanima i njegov sinus. Vidi se da za potrebe procene, aproksimacija malih uglova može da bude korektna i za mnogo veće uglove od 10 stepeni.

Primer 9.1

Veći uglovi Može se pokazati da se iz tačne jednačine kretanja dobija sledeći izraz za period oscilovanja klatna:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{9}{64}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \dots\right), \tag{9.17}$$

gde je θ_0 amplitudni otklon od ravnotežnog položaja. Rezultat za period matematičkog klatna se od ovog rezultata za amplitudni ugao od 15°, razlikuje za manje od 0.5%. Poređenje ovog perioda i perioda matematičkog klatna je prikazano na slici 9.10, desno.

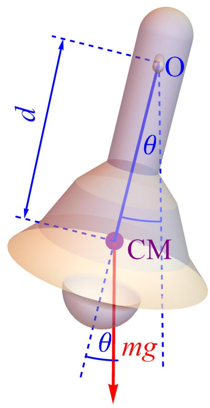


Slika 9.10: Ugao u radijanima i njegov sinus (levo). Razlika u procentima (sredina). Količnik tačnog perioda i perioda matematičkog klatna, u zavisnosti od amplitudnog ugla.

Fizičko klatno

Ako telo koje osciluje ne može da se aproksimira materijalnom tačkom, onda model jednostavnog klatna nije dobar. Nešto opštiji model tela koje osciluje je model fizičkog klatna.

Neka telo proizvoljnog oblika može da osciluje oko ose koja prolazi kroz jednu tačku na telu. Masa tela je m, i neka je poznat moment inercije tela u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja, kao na slici 9.11. Pokazano je da je za gravitacionu silu moguće uzeti da deluje na centar mase tela. Neka je rastojanje od tačke vešanja do centra mase jednako d. Ako se sila trenja u tački vešanja može zanemariti, onda gravitaciona sila jedina deluje na telo. Moment gravitacione sile je $\boldsymbol{M}_g = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_g$, gde je $\boldsymbol{r}$ vektor položaja centra mase tela u odnosu na tačku vešanja. Odgovarajuća komponenta momenta sile je jednaka: $M_g = -mgd\sin\theta$. Jednačina kretanja fizičkog klatna je:



Slika 9.11: Fizičko klatno.

$$I\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta,$$

odnosno:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I}\sin\theta.$$

Ako su uglovi otklona tokom kretanja mali onda se može uzeti da je $\sin\theta \approx \theta$ i dobija se:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0. \tag{9.18}$$

Kružna frekvencija i period klatna su:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \tag{9.19}$$

Svako telo nezanemarljivih dimenzija može da bude fizičko klatno. Potrebno je samo da može da osciluje pod dejstvom sile Zemljine teže, oko ose koja je horizontalna. Osa ne mora da prolazi kroz telo. Telo može da bude okačeno o konac, žicu... Čak konac ne mora da bude zanemarljive mase, onda telo i konac zajedno čine fizičko klatno. Jedino je važno da centar mase klatna ne bude previše udaljen od tačke vešanja, jer ako jeste onda oblik i dimenzije tela prestaju da budu važne.

Izraz za period klatna ukazuje na mogućnost da se merenjem perioda može odrediti moment inercije tela u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja.

U primerima sa klatnima se vidi i osnovna ideja aproksimacije malih oscilacija. Prvo je potrebno naći jednačinu kretanja tela. Onda se napravi aproksimacija za male pomeraje oko ravnotežnog položaja. Ako se dobije jednačina harmonijskog oscilatora u njoj se lako prepoznaje kružna frekvencija, i dalje se lako nalazi period oscilovanja.

Vredi napomenuti da se u primerima klatana ne vidi vrlo važan korak u problemu malih oscilacija. U složenijim problemima nije uvek jednostavno naći ravnotežni položaj. Tek kada se zna ravnotežni položaj može se analizirati kretanje tela (sistema) oko njega.

Vibracije molekula

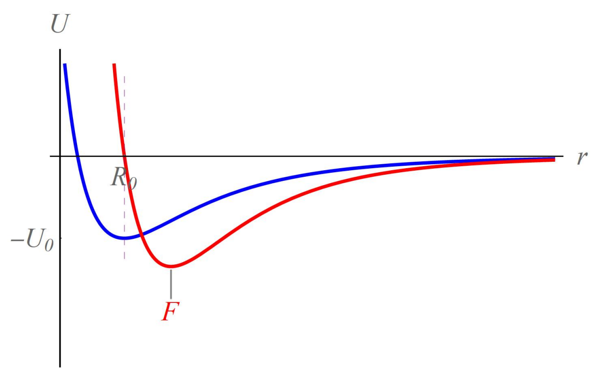
Vrlo zanimljiv i ilustrativan primer oscilacija je kretanje atoma u molekulu. Razmotrimo slučaj dvoatomskog molekula. Atomi u molekulu interaguju silom koja je posledica nalektrisanja atoma, ali je složenija i slabija od standardne Kulonove interakcije (atomi su elektroneutralni, ali nalektrisanje ne mora da bude homogeno raspoređeno, tako da u tom slučaju postoji interakcija elektrostatičkog porekla). Dobar model za ovu interakciju je takozvana Van der Valsova interakcija. Eksperimentalno je utvrđeno da je Van der Valsova interakcija centralna, pa je samim tim i kozervativna. Potencijalna energija atoma je:

$$U = U_0 \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{6} \right], \tag{9.20}$$

gde je r relativno rastojanje između atoma u molekulu, R_0 je konstanta koja predstavlja ravnotežno rastojanje između atoma, dok je U_0 konstanta koja zavisi od vrste atoma, i ima dimenzije energije.

Radijalna komponenta sile (u ovom slučaju to je jedina komponenta sile), u sfernim koordinatama se računa kao izvod potencijalne energije po međusobnom rastojanju između atoma:

$$F_r = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 12\frac{U_0}{R_0} \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r} \right)^{7} \right]. \tag{9.21}$$



Slika 9.12: Potencijalna energija interakcije atoma u molekulu i radijalna komponenta sile.

Na slici 9.12 je prikazana potencijalna energija i radijalna komponenta sile. Vidi se da za $r = R_0$ potencijalna energija ima minimum, a radijalna komponenta sile je jednaka nuli, što potvrđuje pretpostavku da se radi o ravnotežnom položaju.

Kada je $r < R_0$ onda je količnik $\frac{R_0}{r} > 1$. Trinaesti stepen broja većeg od jedan je sigurno veći od njegovog šestog stepena, pa je radijalna komponenta sile pozitivna, i samim tim sila je odbojna. U slučaju kada je $\frac{R_0}{r} < 1$, prvi član u izrazu za silu je manji od drugog, pa je samim tim radijalna kompoenta sile negativna, odnosno sila je privlačna. Dakle, kada su atomi na manjem rastojanju od ravnotežnog odbijaju se, a kada su na većem od ravnotežnog privlače se. Ovo je tipična osobina restitucione sile, mada je njen oblik značajno drugačiji od oblika elastične sile.

Ipak, za mala odstupanja od ravnotežnog položaja izraz za silu se može pojednostaviti. Neka je $x = r - R_0$, odnosno $r = x + R_0$. Kada se nova promenljiva uvrsti u izraz za silu, dobija se:

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{7}\right],$$

odnosno:

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1+\frac{x}{R_0})^{13}} - \frac{1}{(1+\frac{x}{R_0})^{7}}\right].$$

Ako telo osciluje oko ravnotežnog položaja, za mala odstupanja $\frac{x}{R_0} \ll 1$, pa se članovi tipa $(1+y)^n$, za $y \ll 1$, mogu razviti u red:

$$(1+y)^n \approx 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \dots.$$

Tada je:

$$\frac{1}{(1+\frac{x}{R_0})^{13}} \approx 1 - 13\frac{x}{R_0},$$

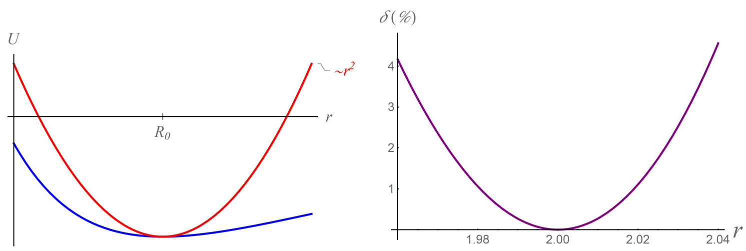
$$\frac{1}{(1+\frac{x}{R_0})^{7}} \approx 1 - 7\frac{x}{R_0}.$$

Kada se ovi izrazi uvrste u izraz za silu, dobija se:

$$F_r = -72\frac{U_0}{R_0^2}x = -kx.$$

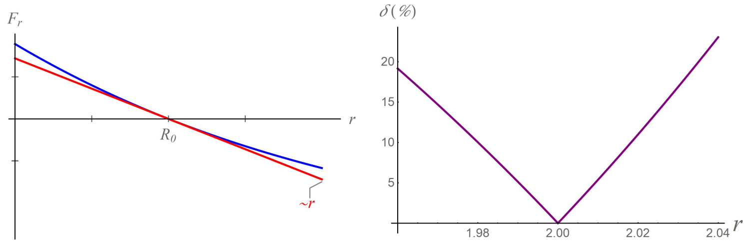
U ovoj aproksimaciji potencijalna energija je jednaka:

$$U_h = -U_0 + 72\frac{U_0}{R_0}x^2.$$



Slika 9.13: Poređenje Van der Valsove potencijalne energije sa aproksimativnom za male oscilacije (levo). Relativno odstupanje aproksimativne potencijalne energije, $\delta = 100\frac{U-U_h}{U}$.

Dobijen je oblik elastične sile. Dakle za mala odstupanja od ravnotežnog položaja atomi u molekulu osciluju kao harmonijski oscilatori, odnosno kao dva tela povezana elestičnom oprugom. Ako se ovaj primer uporedi sa klatnom može se uočiti još jedna važna stvar. Aproksimacija malih oscilacija za sistem od dva atoma je dovoljno dobra za vrlo mala odstupanja oko ravnotežnog položaja. Ona daje dobre rezultate za frekvenciju oscilovanja ali mnogi drugi efekti se ne mogu objasniti, na primer zašto se tela šire kada se zagrevaju. Na slici 9.13 je dato poređenje aproksimativne potencijalne energije i Van der Valsove potencijalne energije. Uzeto je da je $R_0 = 2$ a. j. (proizvoljne jedinice), i dato je poređenje za odstupanja koja su najviše $\frac{R_0}{50}$ (amplituda oscilovanja). Vidi se da je u amplitudnim položajima odstupanje oko 4 %.



Slika 9.14: Poređenje Van der Valsove sile sa aproksimativnom elastičnom (levo). Relativno odstupanje je prikazano na desnoj slici, $\delta = 100\frac{F-F_{rh}}{F}$.

Još veća razlika je u radijalnoj komponenti sile, kao što se vidi na slici 9.14.

Prigušene oscilacije

Do sada su harmonijske oscilacije razmatrane u idealnom slučaju. Zanemareno je trenje sa podlogom, sila otpora sredine, neidealnost opruge. U realnom slučaju uvek postoji neka disipativna sila. Delovanje disipativne sile se naziva *prigušenje*. Najjednostavniji slučaj prigušenja je slučaj u kome sila zavisi od brzine tela. Ako se telo kreće duž jednog pravca, sila je:

$$F = -bv, \tag{9.22}$$

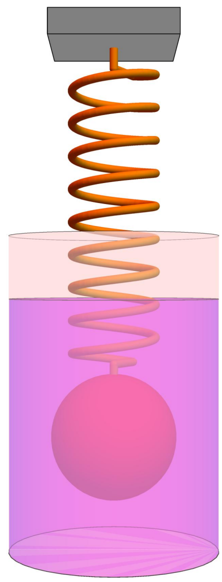
gde je b koeficijent prigušenja. Ovakava sila je sila otpora sredine pri kretanju tela kroz fluid, malom brzinom.

Jednačina kretanja prigušenog oscilatora je:

$$ma = -kx - bv,$$

odnosno, kada se podeli masom tela i sve prebaci na jednu stranu:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$



Slika 9.15: Prigušeni harmonijski oscilator. Telo se kreće kroz fluid, tako da na njega deluje sila otpora sredine $F = -bv$.

Neka je $\frac{b}{m} = 2\beta$ i $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, onda je jednačina kretanja:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{9.23}$$

Konstante β i ω_0^2 su pozitivne. Diferencijalna jednačina kretanja je istog tipa kao idealnom slučaju, i rešava se na isti način. Pretpostavi se da je rešenje oblika $x(t) = e^{\lambda t}$, i ovo rešenje ze uvrsti u diferencijalnu jednačinu 9.23 i dobije se sledeća algebarska jednačina:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Rešenje se lakše dobija ako se jadnačina dopuni do punog kvadrata:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2 - \beta^2 + \omega_0^2 = 0,$$

odnosno:

$$(\lambda+\beta)^2 = -(\omega_0^2-\beta^2).$$

Neka je $\omega_0^2-\beta^2=\omega^2$. Od znaka ω^2 zavisi smisao rešenja. Ako je ω^2 pozitivno, onda je $\sqrt{-\omega^2}$ čisto kompleksan broj ($\sqrt{-\omega^2}=\pm\imath\omega$). Ovo kompleksno rešenje odgovara oscilatornom kretanju, kao i u idealnom slučaju. Ako je ω^2 negativno, ($\omega_0^2<\beta^2$) kretanje uopšte neće da bude oscilatorno. Dakle, zanima nas samo slučaj kada je ω^2 pozitivno. Rešenje algebarske jednačine je:

$$\lambda = -\beta \pm \imath\omega, \tag{9.24}$$

odnosno:

$$x_{\pm}(t) = e^{-\beta t \pm \imath\omega t}.$$

Opšte rešenje jednačine je linearna kombinacija partikularnih rešenja:

$$x(t) = Ax_+ + Bx_- = Ae^{-\beta t+\imath\omega t} + Be^{-\beta t-\imath\omega t},$$

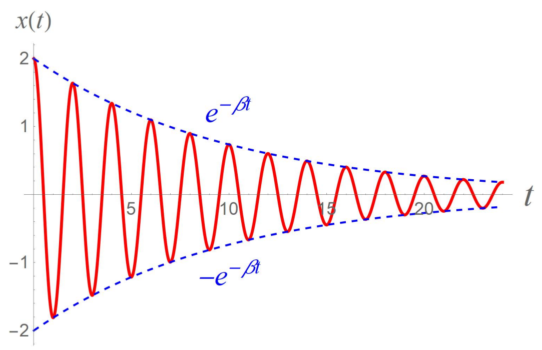
odnosno:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\imath\omega t}+Be^{-\imath\omega t}\right).$$

Član u zagradi je identičan rešenju u idealnom slučaju 9.5, pa se na isti način može napisati preko trigonometrisjkih funkcija:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t+\varphi_0\right), \tag{9.25}$$

gde su x_0 i φ_0 konstante koje se određuju iz početnih uslova. Konstanta x_0 je početno rastojanje tela od ravnotežnog položaja, ali to nije amplituda, pošto se najveće rastojanje tela do ravnotežnog položaja menja sa vremenom. Čitav član $x_0e^{-\beta t}$ je „trenutna" amplituda. Kao što se vidi na slici 9.16 u svakom trenutku maksimalno rastojanje tela od ravnotežnog položaja je upravo $x_0e^{-\beta t}$.



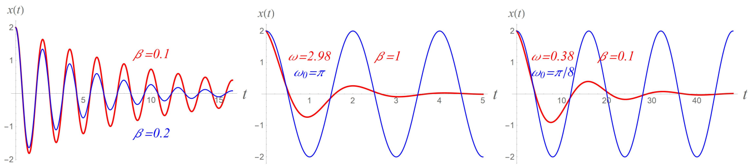
Slika 9.16: Elongacija prigušenog oscilatora u zavisnosti od vremena.

Iz konačne jednačine kretanja se vidi još nekoliko važnih stvari. Pošto je:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \tag{9.26}$$

vidi se da je kružna frekvencija prigušenih oscilacija manja od kružne frekvencije idealnog oscilatora. To dalje znači da je period prigušenog oscilatora veći od idealnog, i zavisi od koeficijenta prigušenja.

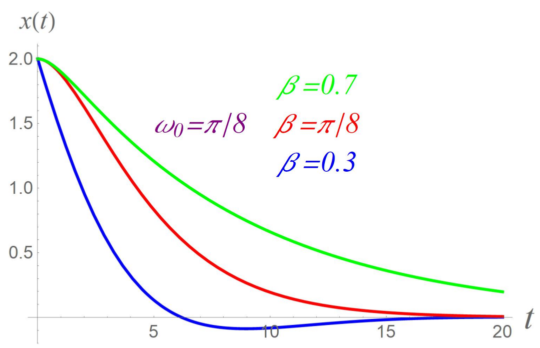
I pored očigledne razlike u kružnim frekvencijama prigušenog i neprigušenog oscilatora, razlika je mala, kao što se vidi na slici 9.17.



Slika 9.17: Poređenje prigušenih oscilacija za različite koeficijente prigušenja (levo). Poređenje kružne frekvencije prigušenog i neprigušenog oscilatora (sredina i desno).

Razlika se primećuje u situaciji kada je veliko prigušenje i mali period, ili malo prigušenje i veliki period.

Izraz za kružnu frekvenciju prigušenog oscilatora daje još jedan važan slučaj. Oscilatorno kretanje postoji kada je $\omega_0 > \beta$. To znači da postoji granična vrednost koeficijenta prigušenja za koju prestaje oscilatorno kretanje, $\beta = \omega_0$, odnsono $b = 2\sqrt{km}$. Granična vrednost koeficijenta prigušenja se naziva *kritično prigušenje*. Pri kritičnom prigušenju telo se vraća u ravnotežni položaj i tu ostaje. Ako je koeficijent prigušenja veći od kritičnog, telo se takođe vraća u ravnotežni položaj, ali mu za to treba više vremena nego u kritičnom slučaju, kao što je prikazano na slici 9.18.



Slika 9.18: Kritično prigušenje.

Gubitak energije

Ukupna mehanička energija prigušenog oscilatora je:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Diferenciranjem po vremenu ovog izraza dobija se:

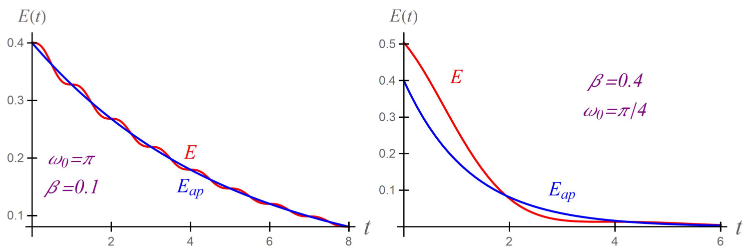
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -bv^2.$$

Dakle:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -bv^2. \tag{9.27}$$

Promena energije je uvek negativna pa se zato i zove gubitak energije oscilatora ili snaga prigušenja.

Ukupna mehanička energija prigušenog oscilatora se smanjuje tokom vremena, i u opštem slučaju zavisnost od vremena je složena. U problemima u kojima je koeficijent prigušenja znatno manji od sopstvene kružne frekvencije oscilatora ($\beta \ll \omega_0$) ukupna mehanička energija opada skoro eksponencijalno, kao što je prikazano na slici



Slika 9.19: Mehanička energija prigušenog oscilatora.

9.19. U tom slučaju je ukupna mehanička energija približno proporcionalna kvadratu trenutne amplitude:

$$E \approx E_{ap} = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\beta t}.$$

Ako je odnos $\frac{\beta}{\omega_0}$ veći, odstupanje od aproskimativnog izraza je veće, kao što se vidi na slici 9.19 (desno).

Prinudne oscilacije

Na oscilator, osim gravitacione, elastične i sile otpora sredine može da deluje još neka sila. Ako je ta dodatna sila periodična, onda će ona izazvati *prinudne oscilacije*, a sila se naziva *prinudnom silom*.

Neka je periodična sila oblika:

$$F = F_0 \cos \Omega t, \tag{9.28}$$

gde je Ω kružna frekvencija prinudne sile.

Jednačina kretanja prinudnog oscilatora je:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \tag{9.29}$$

Diferencijalna jednačina je nehomogena linearna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Rešava se u dva koraka. Rešenje je zbir rešenja homogenog dela i partikularnog rešenja,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Rešenje homogenog dela je rešenje za prigušene oscilacije. Partikularno rešenje nehomogene jednačine je uvek istog funkcionalnog oblika kao nehomogeni deo jednačine,

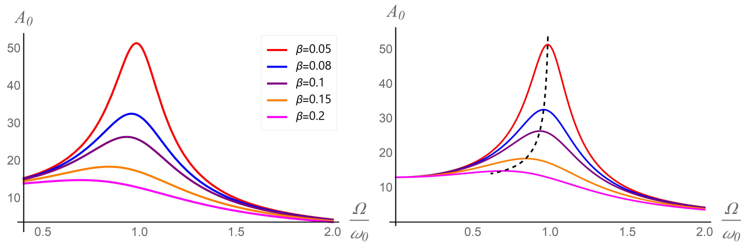
$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t).$$

Koeficijenti A i B se određuju tako što se partikularno rešenje uvrsti u diferencijalnu jednačinu, i tako se dobije sistem algebarskih jednačina u kojima su nepoznate traženi koeficijenti. Može da se pokaže da je partikularno rešenje obika:

$$x_p(t) = A_0 \cos(\Omega t - \phi),$$

gde je:

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \tag{9.30}$$



Slika 9.20: Zavisnost amplitude prinudnih oscilacija od kružne frekvencije prinudne sile (levo). Položaj maksimuma amplitude u zavisnosti od koeficijenta prigušenja (desno).

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{2\beta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right),$$

amplituda A_0 i faza ϕ prinudnih oscilacija.

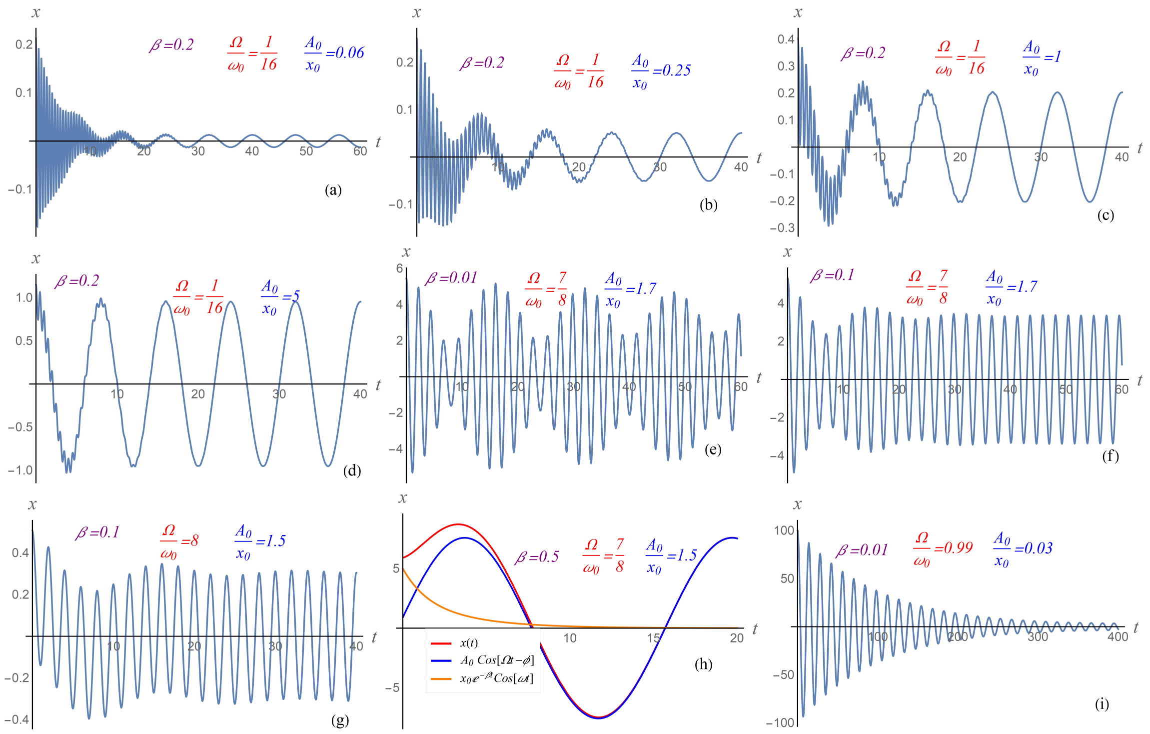
Konačno rešenje jednačine prinudnih oscilacija je zbir rešenja homogenog dela i partikularnog rešenja:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos \omega t + A_0 \cos(\Omega t - \phi).$$

S obzirom da prvi član opada sa vremenom, posle dovoljno dugog vremena telo će oscilovati frekvencijom prinudne sile. Vreme za koje će prinudna sila „preuzeti" oscilovanje tela zavisi od odnosa nekoliko parametara, ali presudno zavisi od koeficijenta prigušenja.

U izrazu za amplitudu prinudnih oscilacija se vidi da amplituda zavisi od odnosa kružne frekvencije prinudne sile i sopstvene frekvencije oscilatora. Kada kružna frekvencija prinudne sile dostigne tačno određenu vrednost frekvencije koja je vrlo bliska sopstvenoj frekvenciji oscilatora, amplituda ima maksimum. Ova pojava se naziva *rezonanca*, a kružna frekvencija prinudne sile rezonantna frekvencija. Povećanje amplitude zavisi od koeficijenta prigušenja, kao što se može videti na slici 9.20.

Kako će se prinudni oscilator kretati zavisi od mnogo faktora. Nekoliko fizičkih veličina utiče na način kretanja. Na slici 9.21 je prikazano nekoliko zanimljivih slučajeva. Na slikama (a)-(d) je prikazano kako oscilovanje zavisi od odnosa sopstvene amplitude i amplitude prinudnog dela (A_0). Za fiksirani odnos kružnih frekvencija A_0 je proporcionalno amplitudi prinudne sile. Vidi se da što je prinudna sila jača, to je uticaj sopstvenih prigušenih oscilacija na prinudne oscilacije manji. Na slikama (e) i (f) su prikazane situacije koje su vrlo bliske rezonanci. Vidi se da vreme posle koga telo počne da oscluje frekvencijom prinudne sile zavisi od koeficijenta prigušenja, što je prigušenje manje, to je vreme duže. Posebno je zanimljiva slika (e) koja odgovara veoma malom koeficijentu prigušenja. Slika je gotovo identična slici koja se dobija za modulisane oscilacije (u slučaju kada nema prigušenja). Kada se uporede slike (f) i (g), vidi se da se blizu rezonance amplituda značajno povećava, i ako je koeficijent prigušenja isti na obe slike, i odnos amplitude prinudne sile i sopstvene amplitude približno isti u oba slučaja. Ako je prigušenje vrlo veliko, na slici (h) se vidi da prigušeni oscilator vrlo kratko i vrlo malo utiče na prinudne oscilacije. Konačno, na poslednjoj slici (i) je prikazana situacija vrlo bliska rezonanci, ali u slučaju kada je amplituda sile i njoj odgovarajuća amplituda prinudnog dela oscilovanja



Slika 9.21: Elongacija prinudnih oscilacija za različite vrednosti sopstvene frekvencije oscilatora, frekvencije prinudne sile, koeficijenta prigušenja, sopstvene amplitude i amplitude prinudne sile.

mnogo manja od amplitude prigušenog oscilatora sa malim koeficijentom prigušenja. Potrebno je mnogo vremena da sopstvene oscilacije utihnu i da preostanu samo one čisto prinudne, ali bez obzira koliko je slaba prinudna sila, oscilator se ne zaustavlja, nego konačno osciluje frekvencijom prinudne sile.

Rezonanca je vrlo važna pojava i ima vrlo korisnu primenu ali ponekad i destruktivnu prirodu.

Primeri:

- Ljuljaška: Svi se verovatno sećaju kako da se dugo ljuljaju na ljuljašci, a da ih niko ne gura. Potrebno je samo imati dobar ritam pokreta nogama. Ovim periodičnim pokretima zapravo postižemo rezonancu sa sopstvenom frekvecijom ljuljaške (klatna). Čim prestanemo sa pokretima, ljuljaška se vrlo brzo zaustavi.
- Orbitalna rezonanca: Zanimljiv primer rezonance je primećen kod planeta koje imaju više satelita, u slučaju kada su odnosi perioda satelita mali celi brojevi. Sateliti se periodično nađu na pravcu koji prolazi kroz centar planete. U tom položaju gravitaciona sila između satelita je najveća, i ta sila koja periodično postiže svoj maksimum i deluje na satelite kao što pokreti nogama deluju na dete koje se ljulja na ljuljašci, odnosno sateliti se međusobno „guraju".
- Električna rezonanca: U radio i televizijskim prijemnicima rezonanca omogućava biranje stanica. Kada se podešava frekvencija na radiju, na primer, menja se frekvencija sopstvenih električnih oscilacija. Kada se dostigne frekvencija željene radio stanice, usled

rezonance signal se značajno pojača i željena stanica može da se sluša.

- Akustička rezonanca: Rezonantne kutije su tako konstruisane da vazduh u njima može da osciluje tačno određenim frekvencijama. Kada zvučni talas pogodi neku od tih sopstvenih frekvencija kutije dolazi do značajnog pojačavanja intenziteta zvuka. Mnogi muzički instrumenti imaju rezonantne kutije. Takođe, akustička rezonanca se lepo vidi i u slučajevima kada intenzivan zvuk može da razbije staklenu čašu. Interesantan primer je i stvaranje zvuka u čaši delimično napunjenoj vodom, trljanjem ivica čaše.

- Plimska rezonanca: Kada plimski talas ima frekvenciju koja je vrlo bliska sopstvenoj frekvenciji okeanskih talasa odbijenh od obale, dolazi do rezonance, i efekat plime je primetno veći nego kad rezonance nema.

- Sistem ogledala u laseru predstavlja rezonantnu kutiju za elektromagnetne talase, odnsono svetlost.

- Nuklearna magnetna rezonanca: Ako se na atomsko jezgro koje se nalazi u jakom statičkom magnetnom polju, primeni i slabo oscilatorno magnetno polje, na određenim frekvencijama magnetnog polja se dobija elektromagnetni signal koji odgovara magnetnom polju jezgra. Magnetno polje jezgra zavisi i od hemisjkog okruženja i od sastava jezgra, pa se ovaj rezonantni signal koristi za karakterizaciju uzoraka, najčešće organskih molekula.

Zadaci

9.1 Koje su sve aproksimacije napravljene da bi se kretanje tela zakačenog za oprugu moglo opisati modelom harmonijskog oscilatora?

9.2 Pokazati da je $x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$ i $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\,(-\frac{B}{A})$ (jednačina 9.7).

9.3 Kada osoba mase $m = 100$ kg sedne u automobil mase $M = 1$ t, blizu centra mase automobila, automobil se spusti za $\Delta z = 2.5$ cm. Kada automobil tokom vožnje naleti na neravninu počne da osciluje. Naći period ovih oscilacija, ako se zanemari trenje.

9.4 Telo je zakačeno za kraj lake opruge i osciluje kao harmonijski oscilator. Telo se nalazi na glatkoj podlozi, i osciluje sa amplitudom A. (a) Ako se amplituda udvostruči kako se promeni put koji prelazi telo tokom jednog perioda? (b) Šta se dešava sa periodom? (c) Kako se menja maksimalna brzina tokom oscilovanja?

9.5 Telo zakačeno za kraj idealne lake opruge se nalazi na glatkom stolu i osciluje horizontalno kao harmonijski oscilator. Na telu se nalazi kamen koji sve vreme oscilovanja miruje u odnosu na telo. U trenutku kada oscilator dostigne amplitudni položaj sklonite kamen, bez pomeranja tela, koje nastavlja da oscijuje. Kako će se promeniti: (a) frekvencija oscilovanja; (b) period oscilovanja; (c) amplituda; (d) maksimalna knetička energija; (e) maksimalna brzina tela?

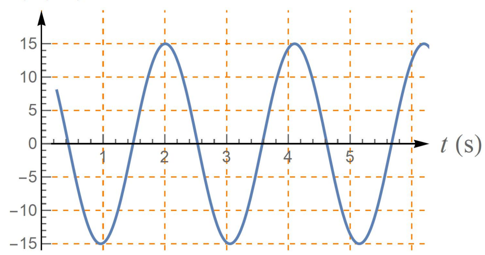
9.6 Telo zakačeno za kraj idealne lake opruge se nalazi na glatkom stolu i osciluje horizontalno kao harmonijski oscilator. Na telu se nalazi kamen koji sve vreme oscilovanja miruje u odnosu na telo. U kojim tačkama putanje oscilatora je sila trenja koja deluje na kamen najveća, a u kojim najmanja?

9.7 Idealnu, laku, elastičnu oprugu presečete na dva jednaka dela. Koliki će biti koeficijent elastičnosti polovine opruge? Ako isto telo oscijuje zakačeno za celu, a zatim i za pola opruge kako će se promeniti period oscilovanja?

9.8 Dva identična tela su spojena idealnom lakom oprugom, i leže na glatkom stolu. Ako približite tela, sabijajući oprugu i pustite ih, da li će kretanje tela biti moguće opisati harmonijskim oscilovanjem? Objasnite. Koliki će biti period oscilovanja u poređenju sa periodom oscilovanja jednog tela zakačenom na istu ovu oprugu, čiji je drugi kraj fiksiran?

9.9 Kosmonauti na orbitalnim stanicama masu mogu da mere na sledeći način: stolica mase 50 kg je pričvršćena na oprugu, a drugi kraj opruge je fiksiran za zid stanice. Kada je stolica prazna napravi jednu oscilaciju za 1.50 s. Kada kosmonatutkinja sedi na stolici, ne dodirujući nogama podlogu onda stolica napravi jednu oscilaciju za 2.4 s. Kolika je masa kosmonautkninje?

9.10 Na horizontalnom glatkom stolu osciluje harmonijski oscilator. Koeficijent elastičnosti opruge je 5.4 N/m. Na grafiku je prikazano ubrzanje tela u zavisnosti od vremena. (a) Kolika je masa tela? (b) Kolika je amplituda oscilovanja? (c) Kolika je maksimalna sila kojom opruga deluje na telo?



9.11 Marsovci su vas oteli, uspavali i smestili u sobu bez prozora. Kada se probudite ne osećate nikakvo kretanje. Pored odeće, ostavili su vam lančić sa identifikacionom pločicom i ručni sat. Kako uz pomoć ova tri predmeta možete da utvrdite da li ste i dalje na Zemlji, ili ste stigli na Mars?

9.12 Pre nekoliko godina naučnicima je pošlo za rukom da naprave vrlo osetljivu tehniku za merenje mase virusa. Laserom se meri frekvencija oscilovanja tankog silicijumskog vlakna (oko 30 nm dugačkog) bez virusa, a potom sa virusom zakačenim za vlakno. Razlika u masama se vidi u razlici u frekvencijama. Silicijumsko vlakno se dosta dobro može opisati modelom tela zakačenog o idealnu oprugu. (a) Naći količnik frekvencija oscilovanja vlakna sa virusom i bez njega. (b) Merenjem je dobijeno da je masa vlakna 2.10×10^{-16} g, frekvencija sa virusom 2.87×10^{14} Hz, a bez virusa 2.00×10^{15} Hz. Kolika je masa virusa?

9.13 *Trzaj* (poteg) je brzina promene ubrzanja. (a) Brzina harmonijskog oscilatora je $v = -\omega A \sin(\omega t)$. Naći kako trzaj zavisi od vremena. (b) U kojoj tački trzaj ima najveću pozitivnu vrednost? A u kojoj najveću negativnu? (c) U kojoj tački je trzaj jednak nuli?

9.14 Na putovanju ulazite u vrlo visok toranj. Unutra je prilično mračno. Vidite jedan konopac, na sred prostorije, koji izgleda kao da visi sa vrha tornja. Kako biste odredili dužinu konopca bez penjanja do vrha?

9.15 Klatno je okačeno o plafon u liftu i osciluje. Šta se dešava sa periodom oscilovanja kada: (a) lift ubrzava naviše; (b) se lift kreće naviše konstantnom brzinom; (c) se lift kreće naniže konstantnom brzinom; (d) lift ubrzava naniže; (e) lift usporava naniže; (f) lift usporava naviše?

9.16 Ako je period klatna koje osciluje na površini Zemlje T, koliki je period istog klatna u međunarodnoj svemirskoj stanici koja orbitira oko Zemlje?

9.17 Sat sa klatnom ste poneli na vrh planine, zbog izvođenja ogleda, da li će on na vrhu da žuri, kasni ili će pokazivati isto vreme kao i na površini Zemlje?

9.18 Kako će se promeniti period matematičkog klatna ako mu se amplituda poveća dva puta? Da li će ista promena biti i za period fizičkog klatna?

9.19 U kojoj tački putanje tela koje predstavlja klatno je sila zatezanja konca najveća? A u kojoj najmanja?

9.20 Zamislite da možete da vrlo precizno napravite klatno tako da može da posluži kao etalon za jedinicu za merenje vremena. Da li bi takvo klatno bilo bolje od trenutno važećeg etalona za sekundu? Objasnite.

9.21 Oscilovanje klatna može da se vidi i kao rotacija oko tačke vešanja. Da li su u tom slučaju kružna frekvencija i ugaona brzina klatna ista stvar? Objàsnite.

9.22 Homogeni štap, dužine L, okačen je tako da stoji vertikalno, a tačka vešanja je u njegovom centru. Koliki će biti period oscilovanja ako se štap malo izvede iz ravnotežnog položaja?

9.23 Homogeni štap, dužine L, okačen je tako da stoji vertikalno, a tačka vešanja je u jednom njegovom kraju. Koliki će biti period oscilovanja ako se štap malo izvede iz ravnotežnog položaja?

9.24 Paleontolozi su pronašli skamenjene otiske stopala T-rexa, a nešto dalje i njegov skelet. Izmerili su rastojanje između dva otiska iste noge, i ono je bilo $s = 4$ m. Dužina zadnje noge dinosaurusa je bila $L = 3$ m. Na osnovu ovih podataka proceniti brzinu T-rexa kada je ostavio otiske.

9.25 Molekul Ar_2 je molekul koji čine dva vrlo slabo vezana atoma. Ako je $U_0 = 1.68 \times 10^{-21}$J, $R_0 = 3.82 \times 10^{-10}$m, kolika je frekvenca oscilovanja atoma argona? Ako je amplituda oscilovanja $x_0 = 1 \times 10^{-11}$m izračunati maksimalno ubrzanje atoma.

9.26 U kojim tačkama, u jedinicama amplitude, je elastična potencijalna energija jednaka kinetičkoj energiji harmonijskog oscilatora?

9.27 Homogeni puni disk mase 7.0 kg, poluprečnika 25.0 cm visi na metalnoj žici tako da je disk u horizontalnoj ravni a žica je zakačena je za centar diska. Tangencijalna sila od 5 N koja deluje na tačku na obodu diska zarotira disk za ugao 3.5°, uvrćući žicu. Zatim se disk prepusti sam sebi (torziono klatno) i počne da osciluje. (a) Kolika je torziona konstanta žice? (b) Koliki je period oscilovanja ovog klatna?

9.28 Na moru ste. Treba da se ukrcate na brod koji je vezan za dok. Vreme nije idealno, i zbog talasa brod mase 2000 kg, osciluje gore-dole, tako da mu je amplituda 30 cm. Vreme potrebno da brod napravi jednu punu oscilaciju je 4 s. Kada je brod u najvišoj tački deo palube na koji treba da stanete je tačno u nivou doka. Osećate blagu mučninu, jer prethodno veče niste mogli da odolite morskim plodovima, pa biste da pređete na brod samo dok je razlika u visinama doka i palube manja od 10 cm. Ako je vaša masa 60 kg, koliko imate vremena dok je brod u željenom intervalu razlike u visinama?

9.29 U visokoj prostoriji ste postavili klatno, tešku kuglu okačenu o laganu čeličnu žicu. Dužinu žice možete precizno da podešavate. Merite dužinu klatna i period oscilovanja klatna. Klatno je pri svakom merenju izvedeno iz ravnotežnog položaja tako da je kugla na rastojanju 2 m od vertikalnog položaja žice. Lopta je mnogo manja od dužine žice u svim merenjima. Rezultati merenja su dati u tabeli:

L (m)	2.30	2.50	3.00	4.00	5.00	6.00	8.00	10.00	12.00
T (s)	3.27	3.35	3.36	4.08	4.54	4.95	5.70	6.36	6.96

(a) Nacrtajte grafik zavisnosti kvadrata perioda od dužine klatna. Da li su sve tačke blizu prave linije? (b) Nacrtajte samo pet poslednjih tačaka i odredite nagib prave. Da li ste dobili ono što bi trebalo za matematičko klatno? (c) Nacrtajte ponovo sve tačke, ali sada kako T/T_0 zavisi od L, gde je T_0 period matematičkog klatna za istu dužinu. Sa tog grafika odredite amplitudni ugao za koji je razlika izmerenog perioda i perioda matematičkog klatna 5 %. (d) Uporedite izmerene rezultate sa aproksimativnom formulom iz primera 9.17. Nacrtajte grafik T/T_a, u zavisnosti od L, gde je T_a period dobijen iz aprosimativne formule. Odredite amplitudni ugao za koji se rezultati razlikuju za 5 %.

Prigušene i prinudne oscilacije

9.30 Amortizeri na motornim vozilima su opruge koje su vrlo blizu kritičnog rigušenja. Ako bi vozilo oscilovalo duže vreme posle nailaska na neravninu onda bi vožnja postala nestabilna, pogotovo ako bi se naletelo na novu neravninu. Ako bi prigušenje bilo veće od kritičnog, povratak u ravnotežu bi duže trajao, pa bi vožnja opet mogla da bude nastabilna.

9.31 Pokazati da je u slučaju kritičnog prigušenja zavisnost elongacije od vremena:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}(1 + \beta t).$$

U početnom trenutku telo je u amplitudnom položaju, i početna brzina je jednaka nuli.

9.32 Pokazati da je u slučaju nadkritičnog prigušenja zavisnost elongacije od vremena:

$$x(t) = \frac{x_0}{2\omega} e^{-\beta t} \left((\omega + \beta) e^{\omega t} + (\omega - \beta) e^{-\omega t} \right).$$

U početnom trenutku telo je u amplitudnom položaju, i početna brzina je jednaka nuli.

9.33 Šta je električnom oscilatornom kolu uzrok prigušenja?

9.34 Izračunati brzinu prigušenog oscilatora, ako se u početnom trenutku nalazio u amplitudnom položaju.

9.35 Pokazati da je ukupna mehanička energija prigušenog oscilatora:

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-2\beta t}\left(1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\cos(2\omega t) + \frac{\beta\omega}{\omega_0^2}\sin(2\omega t)\right).$$

Pokazati da se u slučaju slabog prigušenja dobija gore navedeni aproksimativni izraz. U početnom trenutku telo je u amplitudnom položaju.

9.36 Izračunajte ukupnu mehaničku energiju prinudnog oscilatora sa prigušenjem.

9.37 Zamislite da ste inženjer koji konstruiše građevine koje su u najvećoj mogućoj meri sigurne prilikom zemljotresa. Kakva bi trebalo da bude sopstvena frekvencija građevina u odnosu na očekivanu frekvenciju zemljotresa? Da li građevine treba da imaju veliki ili mali koeficijent prigušenja?

Literatura

I. E. Irodov. *Fundamental Laws of Mechanics*. Mir Publishers Moscow, 1980.

Д. В. Сивухин. *Механика, Общий курс физики, том 1*. Наука, Москва, 1989.

Roger A. Freedman Hugh D. Young and A. Lewis Ford. *Sears And Zemansky's: University physics with modern physics*. Addison-Wesley, 13 edition, 2012.

Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physics For Scientists and Engineers with Modern Physics*. W. H. Freeman and Company, New York, 2008.

Charles Kittel, Walter D. Knight and Malvin A. Ruderman. *Mechanics, Berkeley Physics Course - Volume 1*. McGraw-Hill 1973.

Richard Feynman, Robert B. Leighton and Matthew L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics (The Definitive and Extended Edition)*. Addison Wesley, 2005.

Dragomir Krpić. *Fizička mehanika*. Fizički fakultet, Beograd, 2005.